

УДК 681.511.26

DOI: [10.26102/2310-6018/2025.48.1.023](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2025.48.1.023)

О достижимости консенсуса в мультиагентных системах управления с лидером

Ян Шуай✉

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва,
Российская Федерация*

Резюме. В работе предлагается распределенный алгоритм управления мультиагентными системами с лидером. Основная цель исследования – обеспечение асимптотической сходимости состояний всех агентов-последователей к состоянию лидера, при условии использования каждым агентом только локальной информации, полученной от соседних узлов. Динамика агентов моделируется системой второго порядка – двойным интегратором, что позволяет учесть как положение, так и скорость агентов. Такое описание точнее отражает свойства реальных систем по сравнению с часто применяемыми упрощенными моделями первого порядка. Формализация топологии коммуникационных связей между агентами осуществляется с помощью теории графов. Разработанный алгоритм основан на идее управления с закреплением и использует локальную информацию о состояниях соседних агентов и лидера. Методом Ляпунова и анализом собственных значений исследована устойчивость системы и получены аналитические условия для коэффициентов усиления, гарантирующие достижение консенсуса. Для иллюстрации работоспособности и эффективности предложенного алгоритма проведено численное моделирование в среде MATLAB. Траектория лидера выбрана на основе оптимальной траектории, полученной в предыдущих исследованиях авторов. Результаты подтверждают, что состояния агентов-последователей асимптотически сходятся к состоянию лидера с течением времени. Предложенный алгоритм может найти применение при решении задач группового управления мобильными роботами, беспилотными аппаратами и другими распределенными техническими системами.

Ключевые слова: мультиагентные системы, распределенное управление, консенсус, структура лидер-ведомые, теория графов, управление с закреплением, групповое управление.

Для цитирования: Ян Ш. О достижимости консенсуса в мультиагентных системах управления с лидером. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2025;13(1). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1805> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.023

On achievability of consensus in multi-agent control systems with a leader

Yang Shuai✉

Lomonosov Moscow State University, Moscow, the Russian Federation

Abstract. The paper proposes a distributed control algorithm for multi-agent systems with a leader. The main objective is to ensure the asymptotic convergence of the states of all follower agents to the state of the leader, under the condition that each agent uses only local information obtained from neighboring nodes. The dynamics of the agents are modeled by a second-order system – a double integrator, which allows to take into account both the position and velocity of the agents. This description more accurately reflects the properties of real systems compared to the commonly used simplified first-order models. Graph theory is employed to formalize the topology of communication links between agents. The developed algorithm is based on the idea of pinning control and uses local information about the states of neighboring agents and the leader. The Lyapunov method and eigenvalue analysis were used to study the stability of the system and to obtain analytical conditions for the gain factors that guarantee the

achievement of consensus. To illustrate the efficiency and effectiveness of the proposed algorithm, numerical simulations are conducted in MATLAB. The leader's trajectory is chosen based on the optimal trajectory obtained in previous studies by the authors. The results confirm that the states of the follower agents asymptotically converge to the state of the leader over time. The proposed algorithm can be applied to solve problems of group control of mobile robots, unmanned vehicles, and other distributed technical systems.

Keywords: multi-agent systems, distributed control, consensus, leader-follower structure, graph theory, pinning control, group control.

For citation: Yang S. On achievability of consensus in multi-agent control systems with a leader. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2025;13(1). (In Russ.). URL: <https://moitvivr.ru/ru/journal/pdf?id=1805> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.023

Введение

Мультиагентные системы (МАС) вызывают повышенный интерес исследователей благодаря их широкому спектру применений, включая формирование космических аппаратов, кооперацию мобильных роботов, кластеризацию беспилотных летательных аппаратов и организацию сенсорных сетей [1]. В контексте МАС проблема консенсуса представляет собой фундаментальную задачу, заключающуюся в достижении всеми агентами системы согласованного состояния или поведения. Решение данной проблемы имеет ключевое значение для эффективного функционирования и координации МАС в различных прикладных областях.

Проблемы консенсуса можно классифицировать на две основные категории: консенсус без лидера и консенсус с лидером. В случае консенсуса без лидера все агенты посредством взаимодействия асимптотически сходятся к общему, априори неопределенному состоянию [2–5]. В противоположность этому, задача консенсуса с лидером предполагает наличие одного или нескольких узлов-лидеров, при этом цель остальных агентов (именуемых последователями) заключается в отслеживании состояния или траектории лидера [6–8].

Проблема консенсуса с лидером обладает рядом существенных преимуществ. Во-первых, она обеспечивает контролируемость поведения всей системы, позволяя прецизионно управлять движением группы посредством корректировки траектории лидера, что критически важно в задачах управления формациями и кооперативного поиска. Во-вторых, данный подход значительно повышает робастность системы: лидер, функционируя как генератор команд, не подвержен влиянию состояний последователей, что способствует поддержанию стабильного управления в сложных или неопределенных средах. Более того, метод с лидером предоставляет системе повышенную адаптивность к изменениям окружающей среды и вариациям требований задачи, поскольку модификация поведения всей системы может быть реализована путем корректировки поведения исключительно лидера.

В настоящем исследовании представлен анализ мультиагентных систем (МАС) с лидером, основанный на модели динамики второго порядка для описания динамики агентов. Разработан распределенный алгоритм управления, обеспечивающий асимптотическую сходимость состояний агентов-последователей к состоянию лидера. Анализ устойчивости системы проводится с применением метода функций Ляпунова и анализа собственных значений матрицы состояния системы. Особую значимость представляет практическое применение разработанного алгоритма: в качестве траектории лидера использована оптимальная траектория движения одиночного мобильного робота в среде с препятствиями, полученная в предшествующих исследованиях автора. Статья имеет следующую структуру: во втором разделе

приводятся основные понятия и постановка задачи; в третьем разделе предлагается распределенный алгоритм управления и проводится анализ сходимости; в четвертом разделе эффективность алгоритма проверяется путем численного моделирования в среде MATLAB; в пятом разделе подводятся итоги работы и обсуждаются направления дальнейших исследований.

Постановка задачи консенсуса МАС на графах

Рассмотрим взвешенный ориентированный граф $G = (V, E, A)$, состоящий из конечного множества вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, множества ребер $E \subseteq V \times V$ и взвешенной матрицы смежности $A = [a_{ij}] \in R^{N \times N}$. Ребро $(v_j, v_i) \in E$ означает передачу информации от узла j к узлу i , при этом $a_{ij} > 0$ (что также подразумевает, что j является соседом i), в противном случае $a_{ij} = 0$. В данной работе рассматриваются только простые графы без петель, то есть $a_{ii} = 0$ для всех $i \in \{1, \dots, N\}$.

Определим входящую степень вершины i как $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$, а матрицу входящих степеней как $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_N\} \in R^{N \times N}$. Матрица Лапласа определяется как $L = D - A$. Отсюда следует, что $Le_N = 0$, где $e_N = [1, 1, \dots, 1]^T \in R^N$.

Рассмотрим МАС, состоящую из одного лидера и N агентов-последователей. Динамика i -го агента-последователя второго порядка может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) &= v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t), \end{aligned}$$

где $p_i(t)$, $v_i(t)$, $u_i(t)$ – соответственно обозначают положение, скорость и управляющее входное воздействие i -го агента.

Вводя вектор состояния $x_i(t) = [p_i(t) \ v_i(t)]^T$, $i = 1, \dots, N$, уравнение динамики i -го агента в переменных состояния принимает вид:

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t),$$

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes I_N$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes I_N$, (\otimes – произведения Кронекера).

В контексте МАС, глобальное состояние всех агентов-последователей может быть представлено следующим образом:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $x(t) = [p^T(t) \ v^T(t)]^T$, $p(t) = [p_1(t) \ p_2(t) \ \dots \ p_N(t)]^T$, $v(t) = [v_1(t) \ v_2(t) \ \dots \ v_N(t)]^T$, $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_N(t)]^T$.

Аналогично, состояние лидера может быть представлено следующим образом:

$$\dot{x}_0 = Ax_0, \tag{2}$$

где $x_0 = [p_0 \ v_0]^T$.

Задача управления заключается в разработке распределенного закона управления, обеспечивающего асимптотическое следование всех агентов-последователей за лидером таким образом, что:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [x_0 - x_i] = [0], \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Синтез алгоритма управления МАС и анализ устойчивости

Для корректного представления распределенного закона управления необходимо ввести следующее определение и предположение:

Определим матрицу связи $G = \text{diag}\{g_i\} \in R^{N \times N}$, $i = 1, \dots, N$, характеризующую взаимодействие между лидером и N агентами-последователями. Элемент $g_i > 0$, если i -й агент-последователь может получать информацию от лидера, и $g_i = 0$ в противном случае. Матрица G называется матрицей закрепления.

Предположим, что граф G , описывающий топологию коммуникаций в МАС, содержит остовное дерево с лидером в качестве корневой вершины. Более того, по крайней мере один агент-последователь способен получать информацию непосредственно от лидера, то есть в матрице закрепления G существует хотя бы один ненулевой элемент.

Рассмотрим следующий закон управления:

$$u_i = \alpha \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (p_j - p_i) + g_i (p_0 - p_i) \right) + \beta \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (v_j - v_i) + g_i (v_0 - v_i) \right), \quad (3)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – коэффициенты усиления.

Тогда динамика i -го агента-последователя может быть представлена следующим образом:

$$\dot{x}_i = Ax_i + BK \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} (x_j - x_i) + g_i (x_0 - x_i) \right),$$

где $K = [\alpha \quad \beta]$ – матрица коэффициентов обратной связи.

Для представления динамики всей группы агентов-последователей в компактной форме, можно использовать следующее глобальное описание системы:

$$\dot{x} = (I_N \otimes A - (L + G) \otimes BK)x + ((L + G) \otimes BK)x_0.$$

Лемма 1. Пусть дан комплексный многочлен:

$$f(s) = s^2 + (a + ib)s + c + id,$$

где $a, b, c, d \in R$. Тогда $f(s)$ является многочленом Гурвица тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $abd + a^2c - d^2 > 0$ [9].

Лемма 2. При выполнении предположения в предыдущем тексте, матрица $L+G$ является невырожденной. Более того, все ее собственные значения расположены в открытой правой полуплоскости [10].

Теорема. Рассмотрим МАС с N агентами-последователями (1) и лидирующим узлом (2). При условии, что вышеупомянутые предположения о топологической структуре системы выполняются, и параметры α и β в матрице обратной связи удовлетворяют условию (4), применение распределенного закона управления (3) обеспечивает решение задачи распределенного консенсусного отслеживания для МАС.

Доказательство. Определим ошибку отслеживания для i -го агента-последователя как $e_i = x_i - x_0$, тогда глобальный вектор ошибки отслеживания всех агентов-последователей может быть представлен как:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_0 = \\ &= (I_N \otimes A - (L + G) \otimes BK)x + ((L + G) \otimes BK)x_0 - Ax_0 = \\ &= (I_N \otimes A - (L + G) \otimes BK)e = A_c e. \end{aligned}$$

Условием асимптотической устойчивости системы является требование, чтобы матрица A_c была гурвицевой. Подставляя конкретные выражения для A , B и K в A_c , получаем:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I_N \\ -\alpha(L + G) & -\beta(L + G) \end{bmatrix}.$$

Характеристический полином матрицы A_c может быть представлен следующим образом:

$$\det(sI_{2N} - A_c) = \det \left(\begin{bmatrix} sI_N & -I_N \\ \alpha(L + G) & sI_N + \beta(L + G) \end{bmatrix} \right) = \\ = \det(s^2 I_N + s\beta(L + G) + \alpha(L + G)).$$

Второе уравнение выше выводится с использованием формулы Шура. Пусть λ_i обозначает i -е собственное значение матрицы $L+G$. Тогда можно получить следующее выражение:

$$\det(sI_{2N} - A_c) = \prod_{i=1}^N (s^2 + s\beta\lambda_i + \alpha\lambda_i).$$

Пишем как $f(s, \lambda_i) = s^2 + s\beta\lambda_i + \alpha\lambda_i$. Согласно лемме 1, для всех собственных значений λ_i , коэффициенты усиления α и β должны удовлетворять следующему условию:

$$\beta > 0, \frac{\beta^2}{\alpha} > \frac{\text{Im}^2\{\lambda_i\}}{\text{Re}^3\{\lambda_i\} + \text{Re}\{\lambda_i\}\text{Im}^2\{\lambda_i\}}, \quad (4)$$

В процессе решения вышеуказанных условий используется свойство $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ из леммы 2. Поскольку A_c является матрицей Гурвица, существует положительно определенная диагональная матрица P , такая что:

$$PA_c + A_c^T P = -Q,$$

где Q – некоторая положительно определенная матрица.

Опираясь на теорему Ляпунова, определим функцию Ляпунова $V = e^T P e$. Производная функции Ляпунова имеет вид:

$$\dot{V} = e^T P \dot{e} + \dot{e}^T P e = e^T P A_c e + e^T A_c^T P e = e^T (P A_c + A_c^T P) e = e^T Q e < 0.$$

Поскольку матрица Q положительно определена, производная функции Ляпунова отрицательна для всех ненулевых e , что гарантирует асимптотическую устойчивость системы. Другими словами, последователи успешно завершили отслеживание состояния лидера, что означает достижение консенсуса в МАС.

Компьютерная апробация синтезированного алгоритма управления МАС

Для подтверждения эффективности предложенного метода управления было проведено численное моделирование в следе MATLAB. В рамках исследования рассматривалась МАС, состоящая из одного лидера и 4 агент-последователей. Топология взаимодействия агентов показана на Рисунке 1. Динамика каждого агента описывалась моделью второго порядка.

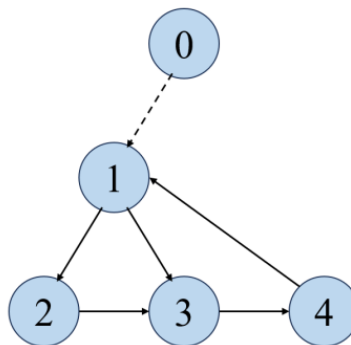


Рисунок 1 – Топологии графа G
 Figure 1 – Topology of Graph G

Моделирование осуществлялось в дискретном времени с шагом дискретизации $T_s = 0,1$ с. Матрица коэффициентов обратной связи $K = [4,1059 \ 4,1716]$. Начальные позиции агентов-последователей: $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-0,5;0)$, $(0,5;-1,5)$. Их начальные скорости равны 0.

Траектория лидера была заимствована из предыдущей работы автора [11], в которой решалась задача планирования оптимальной траектории движения одиночного мобильного робота в среде с препятствиями. Посредством упрощения модели робота до материальной точки и применения модифицированного алгоритма оптимизации роя частиц были получены высококачественные траектории, удовлетворяющие различным ограничениям. Использование результатов этого исследования в качестве траектории лидера в данной работе является обоснованным и обеспечивает преемственность.

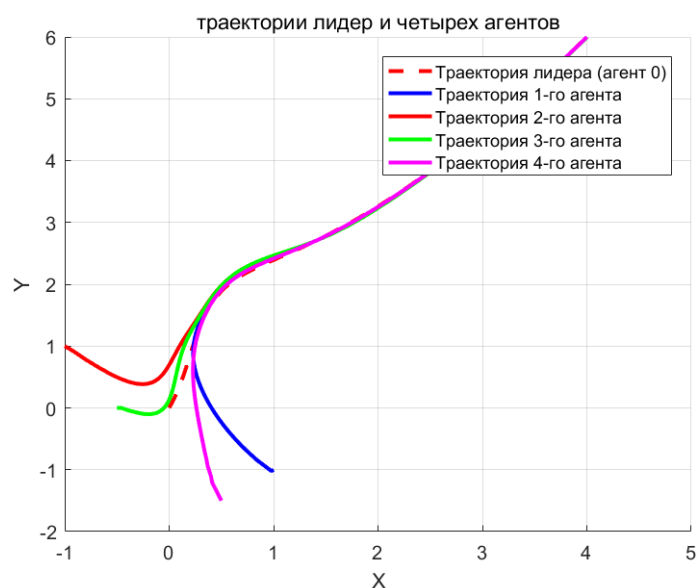


Рисунок 2 – Профили траекторий движения лидера и последователей
 Figure 2 – Motion trajectory profiles of leader and followers

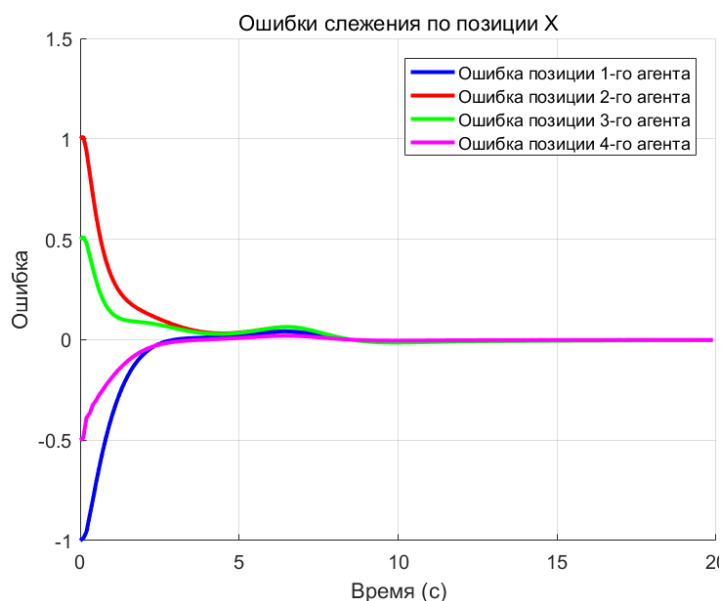


Рисунок 3 – Профили ошибок слежения по позиции по координатам X
 Figure 3 – X-coordinate position tracking error profiles

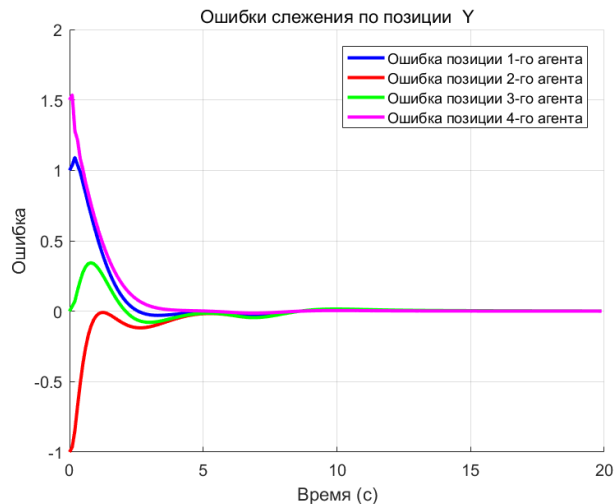


Рисунок 4 – Профили ошибок слежения по позиции по координатам Y
Figure 4 – Y-coordinate position tracking error profiles

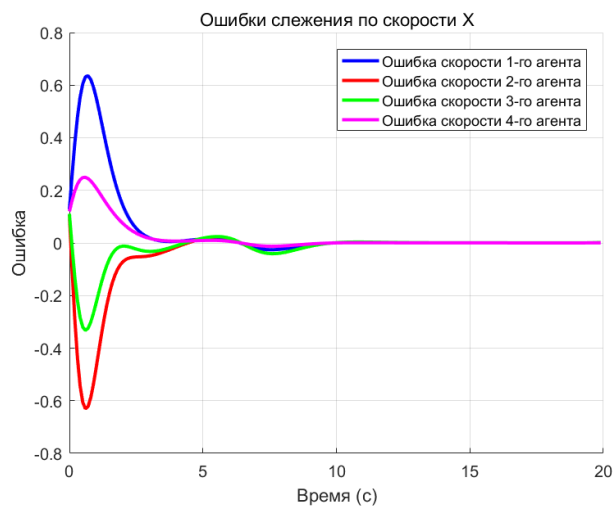


Рисунок 5 – Профили ошибок слежения по скорости по координатам X
Figure 5 – X-coordinate velocity tracking error profiles

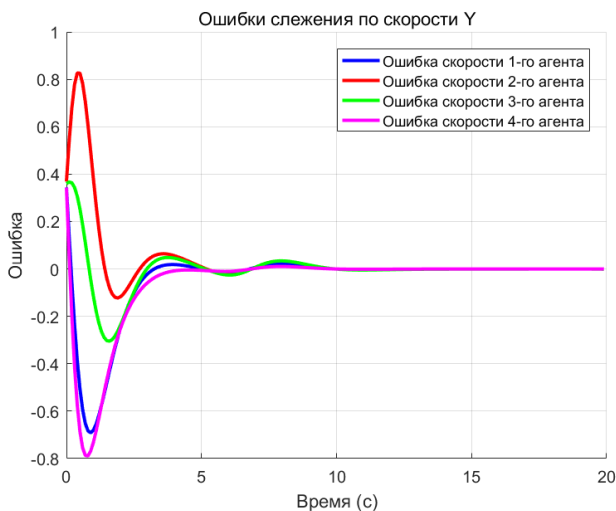


Рисунок 6 – Профили ошибок слежения по скорости по координатам Y
Figure 6 – Y-coordinate velocity tracking error profiles

На Рисунке 2 изображены траектории движения лидера и четырех агентов-последователей в плоскости XY. Несмотря на существенное рассогласование начальных положений агентов, в процессе движения все агенты-последователи успешно перестраиваются и сходятся к траектории лидера. Важно отметить, что переходные процессы происходят плавно, без резких изменений направления движения. Динамика ошибок слежения по позиции по координатам X и Y (Рисунок 3 и Рисунок 4) демонстрирует экспоненциальный характер сходимости. После переходного процесса, длительность которого составляет приблизительно 5 секунд, ошибки слежения стабилизируются в достаточно малой окрестности нуля. На Рисунке 5 и Рисунке 6 представлены графики ошибок слежения по скоростям по координатам X и Y соответственно. Характер изменения скоростей агентов-последователей соответствует скорости лидера, что обеспечивает согласованное движение группы. Наблюдаемые колебания скорости в установившемся режиме объясняются сложной геометрией траектории лидера и необходимостью постоянной подстройки движения последователей. Тем не менее, амплитуда этих колебаний остается в допустимых пределах, что подтверждает эффективность алгоритма. В целом, результаты моделирования убедительно демонстрируют, что разработанный распределенный закон управления обеспечивает эффективное кооперативное слежение в МАС с лидером как по положению, так и по скорости.

Заключение

В данной работе предложен распределенный алгоритм управления для МАС с лидером. Разработанный подход использует только локальную информацию и обеспечивает асимптотическую сходимость состояний (положений и скоростей) агентов-последователей к состоянию лидера. Теоретический анализ устойчивости подтверждает достижение консенсуса при выполнении полученных условий на коэффициенты обратной связи. Результаты численного моделирования демонстрируют высокую эффективность и быструю сходимость алгоритма. Предложенный метод закладывает теоретический фундамент для проектирования распределенных контроллеров в реальных МАС с ограниченными коммуникациями и может найти применение для координации групп беспилотных летательных аппаратов, наземных роботов и других технических систем.

Дальнейшие исследования будут сфокусированы на применении алгоритма в системах с более сложной динамикой, а также на изучении влияния временных задержек, изменений топологии, шумовых возмущений и других практических ограничений на производительность и робастность, что позволит повысить практическую ценность и расширить область применения разработанного подхода.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Ян Ш. Распределенное оптимальное управление мультиагентными системами. *Journal of Advanced Research in Technical Science*. 2024;(40):36–42. <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2024-40-36-42>
 Yang Sh. Optimal consensus control of multi-agent systems. *Journal of Advanced Research in Technical Science*. 2024;(40):36–42. (In Russ.). <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2024-40-36-42>
2. Jadbabaie A., Lin J., Morse A.S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2003;48(6):988–1001. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.812781>

3. Olfati-Saber R., Murray R.M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2004;49(9):1520–1533. <https://doi.org/10.1109/TAC.2004.834113>
4. Ren W. On Consensus Algorithms for Double-Integrator Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2008;53(6):1503–1509. <https://doi.org/10.1109/TAC.2008.924961>
5. Джунусов И.А., Фрадков А.Л. Синхронизация в сетях линейных агентов с обратными связями по выходам. *Автоматика и телемеханика*. 2011;(8):41–52. Dzhunusov I.A., Fradkov A.L. Synchronization in networks of linear agents with output feedbacks. *Automation and Remote Control*. 2011;72(8):1615–1626. <https://doi.org/10.1134/S0005117911080029>
6. An S., Lian J., Wang D. Distributed Tracking Control of Multi-Agent Systems With Transfer Restricted Switching Topologies: A Cycle Stabilization Approach. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*. 2023;10(4):1964–1974. <https://doi.org/10.1109/TNSE.2023.3237245>
7. Lui D.G., Petrillo A., Santini S. Leader tracking control for heterogeneous uncertain nonlinear multi-agent systems via a distributed robust adaptive PID strategy. *Nonlinear Dynamics*. 2022;108(1):363–378. <https://doi.org/10.1007/s11071-022-07240-w>
8. Liang D., Wang C., Cai X., Li Yu, Xu Yu. Distributed fixed-time leader-following consensus tracking control for nonholonomic multi-agent systems with dynamic uncertainties. *Neurocomputing*. 2021;430:112–120. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.10.094>
9. Chen Ya., Zhao Qi., Zheng Yu., Zhu Yu. Containment control of hybrid multi-agent systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2022;32(3):1355–1373. <https://doi.org/10.1002/rnc.5883>
10. Lewis F.L., Zhang H., Hengster-Movric K., Das A. *Cooperative Control of Multi-Agent Systems: Optimal and Adaptive Design Approaches*. London: Springer; 2014. 307 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-5574-4>
11. Ян Ш. Планирование траектории движения мобильного робота в среде с препятствиями на основе модифицированного алгоритма оптимизации роя частиц. *Ученые записки физического факультета Московского университета*. 2023;(4). <http://uzmu.phys.msu.ru/abstract/2023/4/2340707/>
Yang S. Mobile robot trajectory planning in an environment with obstacles based on a modified particle swarm optimization algorithm. *Memoirs of the Faculty of Physics Lomonosov Moscow State University*. 2023;(4). (In Russ.). <http://uzmu.phys.msu.ru/abstract/2023/4/2340707/>

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ян Шуай, аспирант, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация. **Yang Shuai**, postgraduate student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, the Russian Federation.
e-mail: shuai.yang21@physics.msu.ru

Статья поступила в редакцию 05.02.2025; одобрена после рецензирования 17.02.2025; принята к публикации 21.02.2025.

The article was submitted 05.02.2025; approved after reviewing 17.02.2025; accepted for publication 21.02.2025.