

УДК 681.51

DOI: [10.26102/2310-6018/2026.61.10.021](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2026.61.10.021)

Следящее управление ориентацией космического аппарата на основе метода бэкстеппинга с предопределенным временем при неопределенности матрицы инерции и внешних возмущениях

Ван Цзэюй^{1,2}, Чжу Лун^{1✉}, М.С. Селезнева¹, К.А. Неусыпин¹, Л. Фу²

¹Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

²Бэйханский университет, Пекин, Китайская Народная Республика

Резюме. Рассматривается задача следящего управления ориентацией жесткого космического аппарата при неопределенности матрицы инерции и действии ограниченных внешних возмущений. Ориентационное движение описывается с использованием модифицированных параметров Родрига. Для объединения параметрических неопределенностей и внешних воздействий вводится обобщенное возмущение, оценивание которого выполняется нелинейным расширенным наблюдателем состояния с конечным временем сходимости ошибки оценивания. На основе метода бэкстеппинга синтезирован закон следящего управления с предопределенным временем. Его параметризация позволяет непосредственно задавать требуемую верхнюю границу времени переходного процесса, не связывая ее с начальными условиями системы. Для замкнутой системы получены условия практической устойчивости с предопределенным временем; доказательство основано на прямом методе Ляпунова. Численное моделирование проведено для трехосного движения космического аппарата при периодических возмущениях и изменяющейся матрице инерции. Сопоставление с регулятором с фиксированным временем сходимости показывает, что предлагаемый подход обеспечивает настраиваемую длительность переходного процесса, малые ошибки отслеживания ориентации и ограниченные управляющие моменты. Вычислительная структура сохраняет явную связь параметра настройки с требуемым временем маневра. Полученные результаты подтверждают применимость разработанного закона управления к задачам высокоточного ориентационного маневрирования.

Ключевые слова: жесткий космический аппарат, следящее управление ориентацией, метод бэкстеппинга, предопределенное время, расширенный наблюдатель состояния, неопределенность матрицы инерции.

Для цитирования: Ван Ц., Чжу Л., Селезнева М.С., Неусыпин К.А., Фу Л. Следящее управление ориентацией космического аппарата на основе метода бэкстеппинга с предопределенным временем при неопределенности матрицы инерции и внешних возмущениях. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2026;14(10). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=2601> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.61.10.021

Predefined-time backstepping attitude tracking control of a spacecraft under inertia-matrix uncertainty and external disturbances

Z. Wang^{1,2}, L. Zhu^{1✉}, M.S. Selezneva¹, K.A. Neusypin¹, L. Fu²

¹Bauman Moscow State Technical University, Moscow, the Russian Federation

²Beihang University, Beijing, the People's Republic of China

Abstract. The attitude tracking problem for a rigid spacecraft is considered in the presence of inertia-matrix uncertainty and bounded external disturbances. The rotational motion is described by modified Rodrigues parameters. Parametric uncertainty and external actions are combined into a lumped disturbance, which is estimated by a nonlinear extended state observer whose estimation error converges in finite time. A predefined-time tracking law is then synthesized by the backstepping method. Its parameterization allows the required upper bound of the transient duration to be assigned directly and independently of the initial conditions. Sufficient conditions for practical predefined-time stability of the closed-loop system are established using the direct Lyapunov method. Numerical simulations are performed for three-axis spacecraft motion with periodic disturbances and a time-varying inertia matrix. Comparison with a fixed-time controller demonstrates that the proposed approach provides an adjustable transient duration, small attitude-tracking errors, and bounded control torques. Simulations with several values of the predefined-time parameter additionally confirm that the settling-time bound can be selected through one design parameter. The obtained results indicate that the developed control law is suitable for high-accuracy spacecraft attitude maneuvers under model uncertainty and external perturbations.

Keywords: rigid spacecraft, attitude tracking control, backstepping method, predefined-time, extended state observer, inertia-matrix uncertainty.

For citation: Wang Z., Zhu L., Selezneva M.S., Neusypin K.A., Fu L. Predefined-time backstepping attitude tracking control of a spacecraft under inertia-matrix uncertainty and external disturbances. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2026;14(10). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/journal/article?id=2601> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.61.10.021

Введение

Следящее управление ориентацией космического аппарата относится к ключевым задачам современных космических миссий, включая групповое движение, сближение и стыковку, орбитальное обслуживание и исследование дальнего космоса [1]. Требования к точности ориентационного движения возрастают, тогда как неопределенность матрицы инерции и внешние возмущения усложняют синтез закона управления. В этих условиях актуальной остается разработка методов, сочетающих высокую точность, робастность и заранее задаваемую длительность переходного процесса.

Для управления ориентацией космических аппаратов разработаны методы с конечным временем сходимости [2] и с фиксированным временем сходимости [3, 4]. В первом случае время сходимости, как правило, зависит от начальных условий и параметров регулятора. Методы с фиксированным временем устраняют зависимость от начального состояния, однако верхняя граница времени сходимости выражается через совокупность коэффициентов регулятора и поэтому не всегда удобна для непосредственной настройки.

Концепция управления с предопределенным временем позволяет задавать требуемую верхнюю границу времени сходимости одним параметром [5]. В современных исследованиях этот подход применяется к задачам следящего управления ориентацией при неопределенности модели, внешних возмущениях и отказах исполнительных органов [6, 7]. Для практических систем целесообразно рассматривать сходимость ошибок в заданную малую окрестность начала координат, поскольку точное достижение нуля может быть ограничено неучтенной динамикой, погрешностями измерений и возмущающими воздействиями.

В настоящей работе предлагается метод следящего управления ориентацией жесткого космического аппарата на основе метода бэкстеппинга с предопределенным временем (Predefined-Time Backstepping Control, PTBC). Обобщенное возмущение, включающее неопределенность матрицы инерции и внешние воздействия, оценивается нелинейным расширенным наблюдателем состояния (Extended State Observer, ESO) с конечным временем сходимости ошибки оценивания. Основные результаты работы

состоят в синтезе виртуального и фактического законов управления, выводе достаточных условий практической устойчивости с предопределенным временем и сравнительной проверке полученного метода численным моделированием.

Материалы и методы

Ориентационное движение жесткого космического аппарата описывается с использованием модифицированных параметров Родрига (МПР). В соответствии с [8] кинематические и динамические уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \frac{1}{4}M(\sigma)\Omega, \\ J\dot{\Omega} = -\Omega^\times J\Omega + u + d, \end{cases} \quad (1)$$

где $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]^T \in \mathbb{R}^3$ обозначает МПР, $\Omega \in \mathbb{R}^3$ – угловая скорость, $u \in \mathbb{R}^3$ – управляющий момент, $d \in \mathbb{R}^3$ – внешнее возмущение, а $J > 0 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ – матрица инерции жёсткого космического аппарата. Учитывая неопределённости, J можно выразить как $J = J_0 + \Delta J$, где J_0 – известная симметричная положительно определённая матрица, а ΔJ – дифференцируемая неопределённая часть матрицы инерции J . Для вектора $a = [a_1, a_2, a_3]^T$, символ $a^\times$ обозначает соответствующую кососимметрическую матрицу. Матрица $M(\sigma)$ определяется выражением:

$$M(\sigma) = (1 - \sigma^T \sigma)I_3 + 2\sigma^\times + 2\sigma\sigma^T. \quad (2)$$

Пусть σ_e будут ошибками ориентации в виде МПР между желаемой ориентацией σ_d и фактической ориентацией σ . Обозначим ω как ошибочную угловую скорость между желаемой угловой скоростью Ω_d и фактической угловой скоростью Ω , которая удовлетворяет $\omega = \Omega - C\Omega_d$:

$$C = I_3 - \frac{4(1 - \sigma_e^T \sigma_e)}{(1 + \sigma_e^T \sigma_e)^2} \sigma_e^\times + \frac{8}{(1 + \sigma_e^T \sigma_e)^2} (\sigma_e^\times)^2. \quad (3)$$

С учетом введенных обозначений модель ошибок отслеживания ориентации жесткого космического аппарата записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_e = \frac{1}{4}M(\sigma_e)\omega, \\ J\dot{\omega} = -(\omega + C\Omega_d)^\times J(\omega + C\Omega_d) + J(\omega^\times C\Omega_d - C\dot{\Omega}_d) + u + d. \end{cases} \quad (4)$$

Лемма 1 [9]. Рассмотрим нелинейную систему $\dot{x} = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, а $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная нелинейная функция. Пусть $V(x)$ является C^1 гладкой положительно определенной функцией, система называется практически устойчивой к конечному времени, если выполняется условие:

$$\dot{V}(x) \leq -\lambda_1 V^{\rho_1}(x) - \lambda_2 V(x) + \lambda_3 V^{\rho_2}(x), \quad (5)$$

где $0 < \rho_2 < \rho_1 < 1$ и $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, то состояние системы за конечное время T_r входит в область $\mathcal{D}_r$:

$$\mathcal{D}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \theta_1 V^{\rho_1 - \rho_2}(x) + \theta_2 V^{1 - \rho_2}(x) < \lambda_3\}, \quad (6)$$

где $0 < \theta_i < \lambda_i$, $i = 1, 2$ и время T_r ограничены следующим образом:

$$T_r \leq \frac{\ln[1 + (\lambda_2 - \theta_2)V^{1 - \rho_1}(x_0)/(\lambda_1 - \theta_1)]}{(\lambda_2 - \theta_2)(1 - \rho_1)}. \quad (7)$$

Лемма 2 [10]. Рассмотрим нелинейную систему $\dot{x} = f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, а $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывная нелинейная функция. Пусть $V(x)$ является C^1

гладкой положительно определенной функцией, система называется практически устойчивой к конечному времени, если выполняется условие:

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left[\lambda_1 V^{1-\frac{\rho}{2}}(x) + \lambda_2 V^{1+\frac{\rho}{2}}(x) \right] + \eta, \quad (8)$$

где $0 < \rho < 1$, $\lambda_1, \lambda_2, T_c > 0$, $0 < \eta < +\infty$. Тогда траектория системы обладает свойством практической предопределенно-временной устойчивости, а остаточное множество решения системы определяется следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow T} x \in \left\{ x \in \mathbb{R}^n \left| V(x) \leq \min \left\{ \left(\frac{\eta \rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\pi \lambda_1 (1-\theta)} \right)^{\frac{2}{2-\rho}}, \left(\frac{\eta \rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\pi \lambda_2 (1-\theta)} \right)^{\frac{2}{2+\rho}} \right\} \right. \right\}, \quad (9)$$

здесь $0 < \theta < 1$, а гарантированное время установления задается как $T = T_c / \sqrt{\theta}$.

Синтез системы следящего управления ориентацией. Зададим виртуальный управляющий вход ω^* в виде:

$$\omega^* = -K\sigma_e - \frac{2\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\lambda_1 2^{-\frac{\rho}{2}} \|\sigma_e\|^{-\rho} + \lambda_2 2^{\rho} \|\sigma_e\|^{\rho} \right) \sigma_e, \quad (10)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, T_c > 0$, $0 < \rho < 1$, $K = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$, $k_i > 0, i = 1, 2, 3$. Введем ошибку виртуального управления $\chi = \omega - \omega^*$. Дифференцируя χ по времени, получаем:

$$\dot{\chi} = \dot{\omega} - \dot{\omega}^* = F + J_0^{-1}u + \delta, \quad (11)$$

где функции F и δ определяются следующими выражениями:

$$F = J_0^{-1} [-(\omega + C\Omega_d)^\times J_0(\omega + C\Omega_d) + J_0(\omega^\times C\Omega_d - C\dot{\Omega}_d)] - \dot{\omega}^*, \quad (12)$$

$$\delta = J_0^{-1} [-(\omega + C\Omega_d)^\times \Delta J(\omega + C\Omega_d) - \Delta J J^{-1}u + \Delta J J^{-1}(\omega + C\Omega_d)^\times J(\omega + C\Omega_d) + (I_3 - \Delta J J^{-1})d]. \quad (13)$$

Для ошибки ориентации σ_e выберем функцию Ляпунова:

$$V_1 = 2\sigma_e^T \sigma_e, \quad (14)$$

дифференцируя функцию V_1 по времени, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\sigma_e^T M(\sigma_e) K \sigma_e - \frac{2\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\lambda_1 V_1^{-\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 2^{\frac{\rho}{2}} V_1^{\frac{\rho}{2}} \right) \sigma_e^T M(\sigma_e) \sigma_e + \sigma_e^T M(\sigma_e) \chi \leq \\ &\leq -k(1 + \sigma_e^T \sigma_e) \sigma_e^T \sigma_e - \frac{\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\lambda_1 V_1^{1-\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 2^{\frac{\rho}{2}} V_1^{1+\frac{\rho}{2}} \right) + (1 + \sigma_e^T \sigma_e) \sigma_e^T \chi, \end{aligned} \quad (15)$$

где $k = \min\{k_i, i = 1, 2, 3\}$.

Рассмотрим следующую кандидатную функцию Ляпунова:

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \chi^T \chi, \quad (16)$$

дифференцируя функцию V_2 по времени, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \sigma_e^T M(\sigma_e) (\omega^* + \chi) + \chi^T (F + J_0^{-1}u + \delta) \leq \\ &\leq -k(1 + \sigma_e^T \sigma_e) \sigma_e^T \sigma_e - \frac{\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\lambda_1 V_1^{1-\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 2^{\frac{\rho}{2}} V_1^{1+\frac{\rho}{2}} \right) + \\ &+ \chi^T [(1 + \sigma_e^T \sigma_e) \sigma_e + F + J_0^{-1}u + \delta]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь можно заметить, что функция δ в уравнении (11) включает все элементы системы, содержащие неопределенности и внешние возмущения. Таким образом, δ может рассматриваться как обобщенное возмущение системы. На практике обобщенное

возмущение δ не может быть измерено напрямую. Для решения этой проблемы в данном разделе вводится ESO, предназначенный для оценки обобщенного возмущения. Перед введением ESO необходимо сформулировать следующую преобразованную систему, представленную в терминах двух состояний системы $z_1 = \omega$ и $z_2 = \delta$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = N + A^{-1}M_e^{-T}u + z_2, \\ \dot{z}_2 = \dot{\delta}. \end{cases} \quad (18)$$

Предполагается, что производная обобщенного возмущения ограничена: $|\dot{\delta}| \leq \bar{\delta}$. $N = A^{-1}B\omega + A^{-1}F$, A и B определяются выражениями (19) и (20).

$$A = M_e^{-T}J_0M_e^{-1}, \quad (19)$$

$$B = M_e^{-T}J_0M_e^{-1}\dot{M}_eM_e^{-1} - M_e^{-T}(M_e^{-1}\sigma_e + C\Omega_d)^\times J_0M_e^{-1}. \quad (20)$$

Определим $\hat{z}_i$, $i = 1, 2$ как выходы ESO. Ошибки оценки наблюдателя задаются как $e_i = z_i - \hat{z}_i$, $i = 1, 2$. Применяя подход, изложенный в работе [11], предлагается следующий вид ESO:

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 = N + A^{-1}M_e^{-T}u + \hat{z}_2 + b^{a_1}l_1 \text{sig}^{a_1}(e_1) + bl_2e_1, \\ \dot{\hat{z}}_2 = b^{2a_1}l_3 \text{sig}^{a_2}(e_1) + b^{a_1+1}l_4 \text{sig}^{a_1}(e_1) + b^2l_5e_1. \end{cases} \quad (21)$$

где $b > 0$, $a_1 \in (\frac{1}{2}, 1)$, $a_2 = 2a_1 - 1$ и $l_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, 5$. Кроме того, a_1, a_2 и l_i удовлетворяют условиям $a_1l_3l_5 > l_2^2l_3 + a_1(1 + a_1)^2l_1^2l_2^2$ и $4l_5(l_2l_3 + l_1l_4) > l_2l_4^2$.

Динамика ошибки оценивания наблюдателя может быть записана в виде:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -b^{a_1}l_1 \text{sig}^{a_1}(e_1) - bl_2e_1 + e_2, \\ \dot{e}_2 = -b^{2a_1}l_3 \text{sig}^{a_2}(e_1) - b^{a_1+1}l_4 \text{sig}^{a_1}(e_1) - b^2l_5e_1 + \dot{\delta}. \end{cases} \quad (22)$$

Обозначим ε_i , $i = 1, 2, 3$ как вспомогательные переменные, которые задаются следующим образом:

$$\varepsilon_i = [b^{a_1} \text{sig}^{a_1}(e_{1i}), be_{1i}, e_{2i}]^T. \quad (23)$$

Производная по ε_i дает:

$$\dot{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} -a_1b^{a_1}|e_{1i}|^{a_1-1}[b^{a_1}l_1 \text{sig}^{a_1}(e_{1i}) + bl_2e_{1i} - e_{2i}] \\ -b^{a_1+1}l_1 \text{sig}^{a_1}(e_{1i}) - b^2l_2e_{1i} + be_{2i} \\ -b^{2a_1}l_3 \text{sig}^{a_2}(e_{1i}) - b^{a_1+1}l_4 \text{sig}^{a_1}(e_{1i}) - b^2l_5e_{1i} + \dot{\delta}_i \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Рассмотрим следующий кандидат в функцию Ляпунова:

$$V_{0i} = \varepsilon_i^T \Gamma \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (25)$$

где Γ является положительно определенной матрицей следующего вида:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l_1^2 + 2l_3/a_1 & l_1l_2 & -l_1 \\ l_1l_2 & l_2^2 + 2l_5 & -l_2 \\ -l_1 & -l_2 & 2 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

тогда, взяв производную по времени от V_{0i} , получаем:

$$\dot{V}_{0i} = -l_1b^{a_1}|e_{1i}|^{a_1-1}\varepsilon_i^T P_1 \varepsilon_i - b\varepsilon_i^T P_2 \varepsilon_i + \dot{\delta}_i P_3 \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (27)$$

где

$$P_1 = \begin{bmatrix} a_1 l_1^2 + l_3 & 0 & -a_1 l_1 \\ 0 & (2 + a_1) l_2^2 + l_5 & -(1 + a_1) l_2 \\ -a_1 l_1 & -(1 + a_1) l_2 & a_1 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} (1 + 2a_1) l_1^2 l_2 + l_2 l_3 + l_1 l_4 & -\frac{l_2 l_4}{2} & l_4 \\ -\frac{l_2 l_4}{2} & l_2 l_5 + l_3^2 - l_2^2 & -l_2^2 \\ l_4 & -l_2^2 & l_2 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = [-l_1 \quad -l_2 \quad 2]. \quad (28)$$

Теорема 1. Если положительные константы b , a_1 , a_2 и l_i удовлетворяют условиям, указанным в формуле (21), тогда вспомогательные переменные ε_i системы (24) могут сойтись в конечное время T_e в область D_e , близкую к нулю.

$$D_e = \left\{ \varepsilon_i \in \mathbb{R}^3 \left| \theta_1 V_{0i}^{\rho-\frac{1}{2}}(\varepsilon_i) + \theta_2 V_{0i}^{\frac{1}{2}}(\varepsilon_i) < \mu_3 \right. \right\}, \quad (29)$$

$$T_e \leq \frac{\ln \left[1 + \frac{(\mu_2 - \theta_2) [V_{0i}(\varepsilon_{i0})]^{1-\rho}}{\mu_1 - \theta_1} \right]}{(\mu_2 - \theta_2)(1-\rho)}. \quad (30)$$

здесь ε_{i0} , $i = 1, 2, 3$ – начальное значение ε_i ; $\mu_1 = l_1 b \lambda_{\min}(P_1) \lambda_{\max}^{-\rho}(\Gamma)$, $\mu_2 = b \lambda_{\min}(P_2) \lambda_{\max}^{-1}(\Gamma)$, $\mu_3 = \sqrt{3} \bar{\delta} \|P_3\| \lambda_{\min}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $\rho = \frac{3a_1-1}{2a_1}$, $0 < \theta_1 < \mu_1$, $0 < \theta_2 < \mu_2$.

Доказательство. Из уравнения (23) следует, что $b|e_{1i}| \leq \|\varepsilon_i\|^{\frac{1}{a_1}}$. Следовательно, уравнение (27) можно записать в виде:

$$\dot{V}_{0i} \leq -l_1 b \|\varepsilon_i\|^{\frac{a_1-1}{a_1}} \varepsilon_i^T P_1 \varepsilon_i - b \varepsilon_i^T P_2 \varepsilon_i + \delta_i P_3 \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (31)$$

С учетом того, что матрицы Γ , P_1 и P_2 являются положительно определенными, выполняется следующее неравенство:

$$\begin{cases} \lambda_{\min}(P_j) \|\varepsilon_i\|^2 \leq \varepsilon_i^T P_j \varepsilon_i, & i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \\ \lambda_{\min}(\Gamma) \|\varepsilon_i\|^2 \leq V_{0i} \leq \lambda_{\max}(\Gamma) \|\varepsilon_i\|^2, & i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (32)$$

где обозначим $\lambda_{\min}(P_j)$, $j = 1, 2$ как минимальное собственное значение матрицы P_j .

Таким образом, уравнение (31) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{0i} &\leq -l_1 b \lambda_{\min}(P_1) \|\varepsilon_i\|^{\frac{3a_1-1}{a_1}} - b \lambda_{\min}(P_2) \|\varepsilon_i\|^2 + \bar{\delta} P_3 \varepsilon_i \leq \\ &\leq -l_1 b \lambda_{\min}(P_1) (\|\varepsilon_i\|^2)^{\frac{3a_1-1}{2a_1}} - b \lambda_{\min}(P_2) \|\varepsilon_i\|^2 + \sqrt{3} \bar{\delta} \|P_3\| \|\varepsilon_i\| \leq \\ &\leq -\mu_1 V_{0i}^{\rho} - \mu_2 V_{0i} + \mu_3 V_{0i}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Из Леммы 1 следует, что вспомогательные переменные ε_i , $i = 1, 2, 3$ системы (24) могут сойтись в конечное время T_e в область, близкую к нулю, D_e , то есть:

$$\lim_{t \rightarrow T_e} \varepsilon_i \in D_e = \left\{ \varepsilon_i \in \mathbb{R}^3 \left| \theta_1 V_{0i}^{\rho-\frac{1}{2}}(\varepsilon_i) + \theta_2 V_{0i}^{\frac{1}{2}}(\varepsilon_i) < \mu_3 \right. \right\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (34)$$

Таким образом, доказательство завершено.

На этой основе разрабатывается предопределенный по времени регулятор слежения за ориентацией на основе метода пошагового синтеза (Predefined-time

Backstepping Controller, PTBC) следующего вида:

$$u = -J_0 \left[(1 + \sigma_e^T \sigma_e) \sigma_e + F + \hat{z}_2 + \frac{1}{2\gamma^2} \chi + \frac{\pi}{2\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\lambda_1 2^{\frac{\rho}{2}} \|\chi\|^{-\rho} + \lambda_2 \|\chi\|^{\rho} \right) \chi \right], \quad (35)$$

где $\gamma > 0$.

Теорема 2. Под действием регулятора (35) ошибки системы (4) σ_e и ω могут сойтись в настраиваемое предопределенное время $T = \sqrt{2} T_c$ в область, близкую к нулю.

Доказательство. Подставляя регулятор (35) в уравнение (17), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -k(1 + \sigma_e^T \sigma_e) \sigma_e^T \sigma_e - \frac{\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\lambda_1 V_1^{1-\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 2^{\frac{\rho}{2}} V_1^{1+\frac{\rho}{2}} \right) - \\ &- \frac{\pi}{2\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left[\lambda_1 \left(\frac{1}{2} \|\chi\|^2 \right)^{-\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 2^{\frac{\rho}{2}} \left(\frac{1}{2} \|\chi\|^2 \right)^{\frac{\rho}{2}} \right] \chi^T \chi - \frac{1}{2\gamma^2} \chi^T \chi + \chi^T e_2 \leq \quad (36) \\ &\leq -\frac{\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left[\lambda_1 V_1^{1-\frac{\rho}{2}} + \lambda_1 \left(\frac{1}{2} \|\chi\|^2 \right)^{1-\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 2^{\frac{\rho}{2}} V_1^{1+\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 2^{\frac{\rho}{2}} \left(\frac{1}{2} \|\chi\|^2 \right)^{1+\frac{\rho}{2}} \right] + \\ &+ \frac{\gamma^2}{2} \|e_2\|^2. \end{aligned}$$

так как $1 - \frac{\rho}{2} \in (0, 1)$ и $1 + \frac{\rho}{2} \in (1, 2)$, выполняются следующие две группы неравенств:

$$\begin{cases} V_1^{1-\frac{\rho}{2}} + \left(\frac{1}{2} \|\chi\|^2 \right)^{1-\frac{\rho}{2}} \geq \left(V_1 + \frac{1}{2} \|\chi\|^2 \right)^{1-\frac{\rho}{2}} = V_2^{1-\frac{\rho}{2}}, \\ V_1^{1+\frac{\rho}{2}} + \left(\frac{1}{2} \|\chi\|^2 \right)^{1+\frac{\rho}{2}} \geq 2^{-\frac{\rho}{2}} \left(V_1 + \frac{1}{2} \|\chi\|^2 \right)^{1+\frac{\rho}{2}} = 2^{-\frac{\rho}{2}} V_2^{1+\frac{\rho}{2}}. \end{cases} \quad (37)$$

Подставляя приведённые выше неравенства в уравнение (36), получаем:

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\lambda_1 V_2^{1-\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 V_2^{1+\frac{\rho}{2}} \right) + \eta, \quad (38)$$

где $\|e_2\|^2 \leq \nu$, $\eta = \frac{\nu \gamma^2}{2}$.

Далее проверим, могут ли все состояния системы ошибок (4) сойтись в предопределенное время под действием регулятора (35). Можно рассмотреть два случая:

1) $V_2^{1-\frac{\rho}{2}} > \frac{2\eta\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\pi \lambda_1}$, уравнение (38) можно записать в виде:

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{1}{2} \lambda_1 V_2^{1-\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 V_2^{1+\frac{\rho}{2}} \right). \quad (39)$$

2) $V_2^{1+\frac{\rho}{2}} > \frac{2\eta\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\pi \lambda_2}$, уравнение (38) можно записать в виде:

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{\pi}{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \left(\lambda_1 V_2^{1-\frac{\rho}{2}} + \frac{1}{2} \lambda_2 V_2^{1+\frac{\rho}{2}} \right). \quad (40)$$

Ниже проводится анализ сходимости для случая 1. Проинтегрировав обе части уравнения (39) по $t \in (0, t(\chi_0))$, можно получить:

$$t(\chi_0) \leq \frac{\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\pi} \int_0^{V_2(\chi_0)} \frac{1}{\frac{1}{2} \lambda_1 V_2^{1-\frac{\rho}{2}} + \lambda_2 V_2^{1+\frac{\rho}{2}}} dV_2 \leq \frac{2\sqrt{2} T_c}{\pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{2\lambda_2}{\lambda_1}} V_2^{\frac{\rho}{2}}(\chi_0) \right). \quad (41)$$

Из свойств арктангенса следует, что время $t(\chi_0)$, необходимое системе ошибок (4) для перехода от начального состояния χ_0 к устойчивому состоянию, удовлетворяет $\sup t(\chi_0) = \sqrt{2} T_c$, $\forall \chi_0 \in \mathbb{R}^3$. Следовательно, все состояния системы (4) могут сойтись в предопределенное время $T = \sqrt{2} T_c$ в множество $D_1 = \left\{ V_2 \in \mathbb{R} \mid V_2^{1-\frac{\rho}{2}} \leq \frac{2\eta\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\pi \lambda_1} \right\}$. Аналогично, для случая 2 все состояния системы ошибок (4) могут сойтись в предопределенное время T в множество $D_2 = \left\{ V_2 \in \mathbb{R} \mid V_2^{1+\frac{\rho}{2}} \leq \frac{2\eta\rho T_c \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\pi \lambda_2} \right\}$.

Таким образом, согласно Лемме 2, система ошибок слежения за ориентацией космического аппарата (4) под действием регулятора (35) обладает предопределенной временной устойчивостью, то есть σ_e и ω могут сойтись в предопределенное время T в множество:

$$D = D_1 \cap D_2. \quad (42)$$

Таким образом, доказательство завершено.

Результаты и обсуждение

Численное моделирование проведено для жесткого космического аппарата с номинальной матрицей инерции, приведенной в [12]:

$$J_0 = \begin{bmatrix} 20 & 1,2 & 0,9 \\ 1,2 & 17 & 1,4 \\ 0,9 & 1,4 & 15 \end{bmatrix} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \quad (43)$$

Неопределенность задается $\Delta J = \text{diag}(\sin(0,1t), 2\sin(0,2t), 3\sin(0,3t)) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, внешнее периодическое возмущение предполагается следующим образом:

$$d(t) = [1 + 5\cos(0,1t), 2 + 5\cos(0,2t), 1 - 5\sin(0,1t)]^T \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (44)$$

Начальное угловое положение $\sigma(0) = [-0,1579; 0,1368; 0,0947]^T$, а начальная угловая скорость $\Omega(0) = [0,0,0]^T \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. Заданное угловое положение составляет $\sigma_d(t) = [0,03\cos(0,2t), \sin(0,3t), \sin(0,4t)]^T$.

Кроме того, начальные значения ESO предполагаются равными $\hat{z}_i(0) = [0,01; 0,01; 0,01]^T$, $i = 1, 2$. Параметры ESO выбраны следующим образом: $a_1 = \frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $b = 0,09$, $l_1 = 0,7$, $l_2 = 0,7$, $l_3 = 0,3$, $l_4 = 1,0$, $l_5 = 3,5$.

Параметры регулятора (35) выбраны следующим образом: $K = \text{diag}(0,05; 0,05; 0,05)$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\rho = 0,3$, $\gamma = 0,5$, $T_c = 25$.

Далее проводится сравнение предложенного в данной работе регулятора с регулятором с фиксированным временем сходимости (Fixed-Time Controller, FTC), представленным в работе Jiang et al. [4]. Результаты моделирования показаны на Рисунках 1–3.

Из Рисунков 1 и 2 видно, что под действием регулятора РТВС время сходимости как МПР, так и угловой скорости космического аппарата меньше, чем при использовании регулятора FTC.

Из Рисунков 1 и 2 также видно, что при выборе различных параметров регулятора $T_c = 25$, $T_c = 5$ и $T_c = 100$ и проведении сравнительных моделирований подтверждается: под действием РТВС время сходимости системы ошибок определяется только одним управляющим параметром T_c и не зависит от начального состояния системы, при этом космический аппарат может завершить задачу слежения за ориентацией в предопределенное время T .

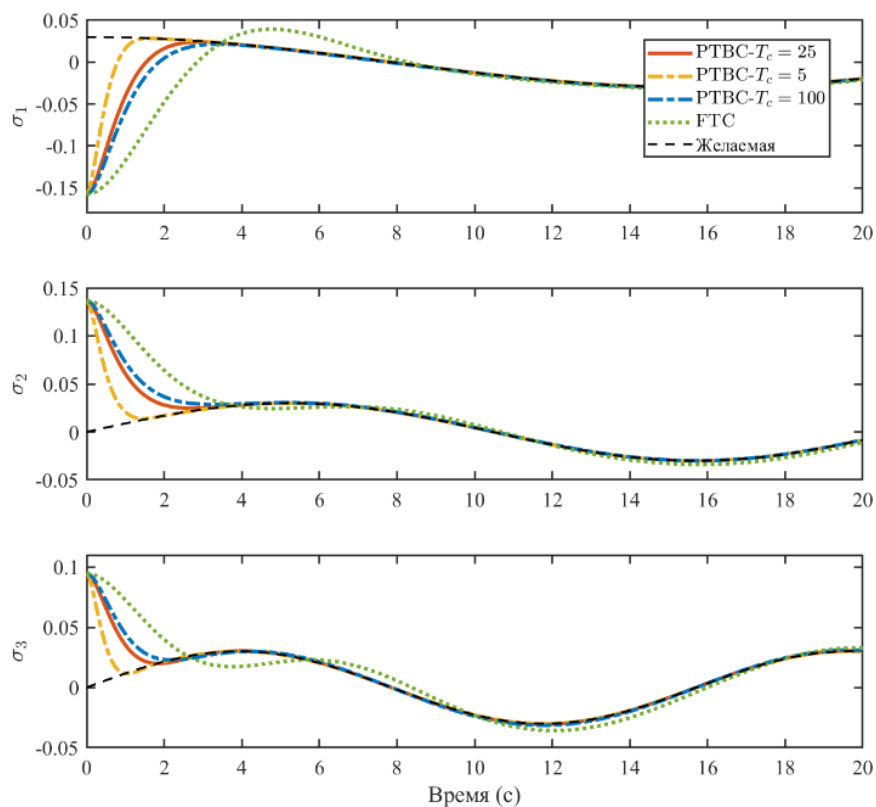


Рисунок 1 – Отслеживание ориентации космического аппарата в МРП
Figure 1 – Spacecraft attitude tracking in modified Rodrigues parameters

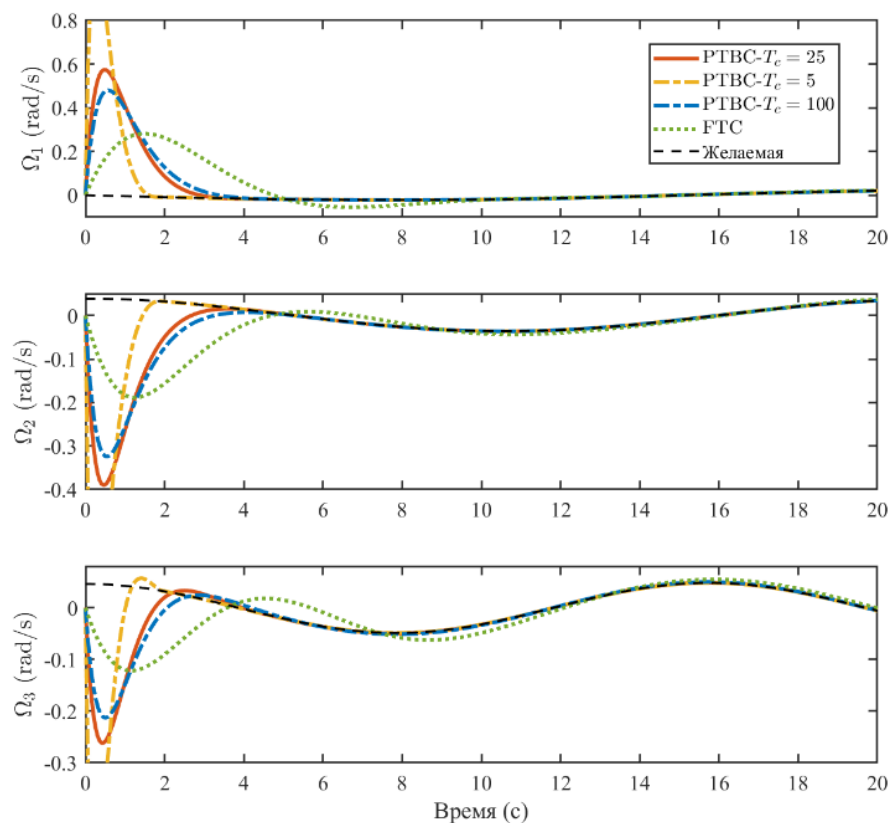


Рисунок 2 – Отслеживание угловой скорости космического аппарата
Figure 2 – Spacecraft angular-velocity tracking

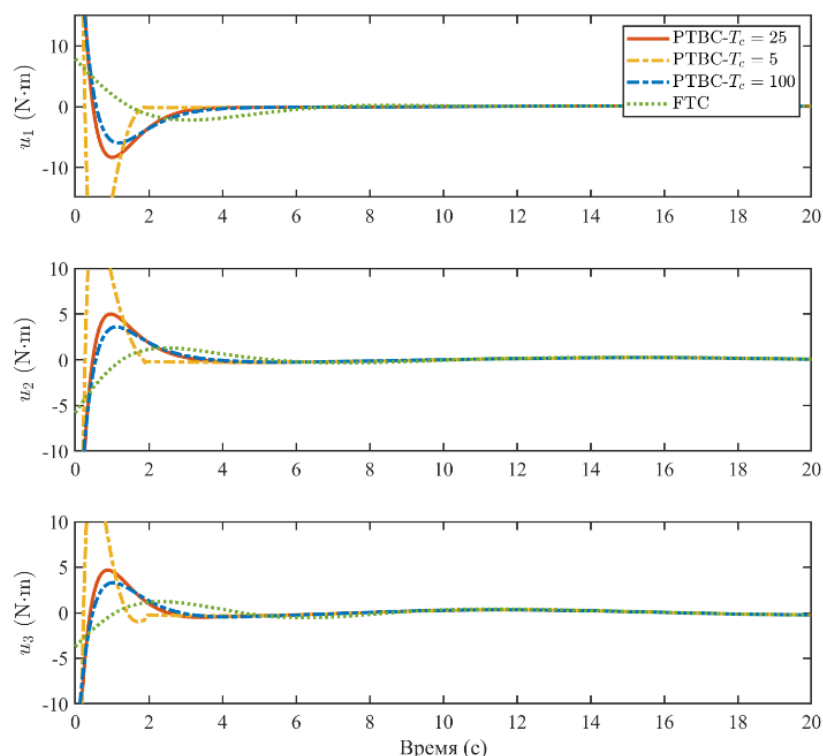


Рисунок 3 – Сравнение управляющих моментов
Figure 3 – Comparison of control torques

Заключение

Разработан метод следящего управления ориентацией жесткого космического аппарата на основе метода бэкстеппинга с предопределенным временем при неопределенности матрицы инерции и внешних возмущениях. Нелинейный расширенный наблюдатель состояния обеспечивает оценивание обобщенного возмущения с конечным временем сходимости ошибки оценивания. На основе прямого метода Ляпунова получены условия практической устойчивости замкнутой системы с предопределенным временем. Численное моделирование подтвердило, что длительность переходного процесса регулируется одним параметром, а ошибки ориентации и угловой скорости сходятся в малую окрестность нуля при ограниченных управляющих моментах. По сравнению с регулятором с фиксированным временем сходимости предложенный подход обеспечивает более наглядную настройку требуемого времени маневра. Перспективным направлением дальнейших исследований является учет насыщения исполнительных органов и проверка метода на полунатурном стенде.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Zhang J., Zhao W., Shen G., Xia Y. Disturbance observer-based adaptive finite-time attitude tracking control for rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*. 2021;51(11):6606–6613. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2019.2947320>
2. Gao Sh., Liu X., Jing Y., Dimirovski G. A novel finite-time prescribed performance control scheme for spacecraft attitude tracking. *Aerospace Science and Technology*. 2021;118(11):107044. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.107044>
3. Zou A.-M., Kumar K.D., de Ruiter A.H.J. Fixed-time attitude tracking control for rigid spacecraft. *Automatica*. 2020;113(4):108792. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.>

- [108792](#)
4. Jiang B., Li Ch., Hou Sh., Ma G. Fixed-time attitude tracking control for spacecraft based on adding power integrator technique. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2020;30(6):2515–2532. <https://doi.org/10.1002/rnc.4897>
 5. Xie Sh., Chen Q., He X. Predefined-time approximation-free attitude constraint control of rigid spacecraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2023;59(1):347–358. <https://doi.org/10.1109/TAES.2022.3183550>
 6. Cao T., Gong H., Han B. Observer-based predefined-time attitude control for spacecraft subject to loss of actuator effectiveness. *Processes*. 2022;10(11):2294. <https://doi.org/10.3390/pr10112294>
 7. Hu L., Wang Z., Chen Ch., Yue H. Adaptive approximate predefined-time guaranteed performance control of uncertain spacecraft. *Mathematics*. 2025;13(5):832. <https://doi.org/10.3390/math13050832>
 8. Du H., Zhang J., Wu D., Zhu W., Li H., Chu Zh. Fixed-time attitude stabilization for a rigid spacecraft. *ISA Transactions*. 2020;98(4):263–270. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2019.08.026>
 9. Li B., Hu Q., Yang Y. Continuous finite-time extended state observer based fault tolerant control for attitude stabilization. *Aerospace Science and Technology*. 2018;84:204–213. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.10.006>
 10. Wu C., Yan J., Shen J., Wu X., Xiao B. Predefined-time attitude stabilization of receiver aircraft in aerial refueling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*. 2021;68(10):3321–3325. <https://doi.org/10.1109/TCSII.2021.3067695>
 11. Zhang J., Biggs J.D., Ye D., Sun Zh. Extended-state-observer-based event-triggered orbit-attitude tracking for low-thrust spacecraft. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2020;56(4):2872–2883. <https://doi.org/10.1109/TAES.2019.2955257>
 12. Wu Y.-Y., Zhang Y., Wu A.-G. Attitude tracking control for rigid spacecraft with parameter uncertainties. *IEEE Access*. 2020;8:38663–38672. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2974572>

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Ван Цзэюй, аспирант кафедры ИУ-1 «Системы автоматического управления», Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация; Бэйханский университет, Пекин, Китайская Народная Республика.
e-mail: wzy1239054499@yandex.ru

Zeyu Wang, Postgraduate at the Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, the Russian Federation; Beihang University, Beijing, the People's Republic of China.

Чжу Лун, аспирант кафедры ИУ-1 «Системы автоматического управления», Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация; Бэйханский университет, Пекин, Китайская Народная Республика.
e-mail: zhul0018@gmail.com

Long Zhu, Postgraduate at the Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, the Russian Federation; Beihang University, Beijing, the People's Republic of China.

Селезнева Мария Сергеевна, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры ИУ-1 «Системы автоматического управления», Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

e-mail: ms.selezneva@bmstu.ru

Maria S. Selezneva, Doctor of Engineering Sciences, Docent, Professor at the Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, the Russian Federation.

Неусыпин Константин Авенирович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой ИУ-1 «Системы автоматического управления», Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

e-mail: neysipin@mail.ru

Konstantin A. Neusypin, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, the Russian Federation.

Фу Ли, PhD, профессор, Бэйханский университет, Пекин, Китайская Народная Республика.

e-mail: fuli@buaa.edu.cn

Li Fu, PhD, Professor, Beihang University, Beijing, the People's Republic of China.

Статья поступила в редакцию 04.08.2026; одобрена после рецензирования 14.10.2026; принята к публикации 23.10.2026.

The article was submitted 04.08.2026; approved after reviewing 14.10.2026; accepted for publication 23.10.2026.