УДК 517.95
DOI: 10.26102/2310-6018/2026.62.11.015

Совместное мерозначное описание потока и диссипации при фиксированном дефекте коэрцитивности

Е.Ю. Щетинин✉

Севастопольский государственный университет, Севастополь, Российская Федерация

Резюме. При исчезновении регуляризации в вырожденной диффузионной системе необходимо различать диссипацию предельных переменных и остаток, связанный с концентрациями и регуляризацией. Для систем с фиксированным дефектным подпространством построено совместное мерозначное описание состояния и двух шуровских каналов. Оба потока представлены моментами одной меры Юнга, а граф-коэрцитивный дефект разложен на явную плотность и неотрицательную остаточную меру. Получены критерий исчезновения остатка и его оценка через относительную диссипацию. Для нелинейного трехкомпонентного класса с постоянным ядром доказаны априорные оценки сходимости состояния и обоих каналов при ограниченности градиентов активных компонент решения сравнения. Оценки зависят от начальной погрешности и модуля непрерывности тепловой полугруппы на профиле компоненты в ядре; пространственный градиент этой компоненты не требуется. Вместе с оценкой регуляризационной энергии они исключают остаток и устанавливают независимость предела от подпоследовательности и выбора регуляризации в указанном семействе. Построено семейство регуляризованных решений с нелинейной недиагональной подвижностью, зависящей от разрывной компоненты. Для ступенчатого профиля квадраты ошибок и относительная диссипация регуляризованных решений ограничены величиной $C\sqrt{\lambda}$. Предельное состояние не имеет полного пространственного градиента, а граф-коэрцитивный дефект остается положительным. Построение опирается на регуляризованную семью Щетинина и Шевчука и ее общие энтропийные оценки.

Ключевые слова: кросс-диффузия, фиксированный дефект коэрцитивности, дополнение Шура, совместная мера Юнга, мерозначное представление потока, остаточная диссипация, сходимость регуляризации, частичная пространственная регулярность.

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Севастопольского государственного университета, проект 42-01-09/319/2025-1.

Для цитирования: Щетинин Е.Ю. Совместное мерозначное описание потока и диссипации при фиксированном дефекте коэрцитивности. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2026;14(11). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/article?id=2640 DOI: 10.26102/2310-6018/2026.62.11.015

Joint measure-valued description of flux and dissipation with a fixed coercivity defect

E.Yu. Shchetinin✉

Sevastopol State University, Sevastopol, the Russian Federation

Abstract. In the vanishing-regularization limit for a degenerate diffusion system, dissipation represented by the limiting variables must be distinguished from a residual contribution due to concentration and regularization. For systems with a fixed defect subspace, we construct a joint measure-valued description of the state and two Schur channels. Both fluxes are represented as moments of one Young measure, and the graph-coercive defect is decomposed into an explicit density and a nonnegative residual measure. We obtain a criterion for the residual to vanish and an estimate in terms of relative dissipation. For a nonlinear three-component class with a constant mobility kernel, we prove a priori

© Щетинин Е.Ю., 2026

convergence estimates for the state and both channels, assuming bounded gradients of the active components of the comparison solution. The estimates depend on the initial error and the continuity modulus of the heat semigroup applied to the kernel-component profile; no spatial gradient of that component is required. Together with a regularization-energy estimate, they exclude the residual and establish independence of the limit from the subsequence and the choice of regularization within the specified family. We construct a family of regularized solutions with nonlinear nondiagonal mobility depending on a discontinuous component. For a step profile, the squared errors and the relative dissipation of the regularized solutions are bounded by $C\sqrt{\lambda}$. The limiting state has no full spatial gradient, while the graph-coercive defect is positive. The construction relies on the regularized family of Shchetinin and Shevchuk and its general entropy estimates.

Keywords: cross-diffusion, fixed coercivity defect, Schur complement, joint Young measure, measure-valued flux representation, residual dissipation, regularization convergence, partial spatial regularity.

Funding: The work was financially supported by Sevastopol State University, project 42-01-09/319/2025-1.

For citation: Shchetinin E.Yu. Joint measure-valued description of flux and dissipation with a fixed coercivity defect. *Modeling, Optimization and Information Technology.* 2026;14(11). (In Russ.). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/article?id=2640 DOI: 10.26102/2310-6018/2026.62.11.015

Введение

В моделях взаимосвязанного переноса диффузия может ослабевать или исчезать в отдельных направлениях пространства состояний. При исследовании таких систем используют невырожденную регуляризацию и затем устремляют ее параметр к нулю. При этом необходимо различать диссипацию, представленную предельными переменными, и остаток, связанный с концентрациями и регуляризацией. Если энтропийная оценка не контролирует полный пространственный градиент ∇w переменной $w = Dh(u)$, слабых пределов состояния и потока недостаточно для восстановления квадратичной диссипации. Цель работы – разделить эти вклады и установить условия исчезновения остатка без требования полного градиента предельного состояния.

Энтропийные методы для кросс-диффузии развиты в исследованиях [1, 2]; при недостатке сильной компактности используются меры Юнга [3] и диссипативные мерозначные решения [4]. Существование слабых решений и частичная регулярность исследованы для различных классов систем в [5, 6], гиперболически-параболическая нормальная форма – в [7], слабая-сильная единственность – в [8]. Энтропийный подход применяется также к системам Максвелла-Стефана [9].

В работе [10] рассмотрена система, в которой потеря коэрцитивности допускается на фиксированном подпространстве E_P, а блок подвижности на его ортогональном дополнении E_Q равномерно положителен. Построены регуляризованные решения и граф-коэрцитивный мерозначный предел, сохраняющий обе части потока, энтропийную меру и диссипационный дефект. В настоящей работе сохраняются ограниченное пространство состояний и барьерная энтропия этой постановки. Подпространство регуляризации фиксировано; ядро и ранг всей матрицы подвижности могут меняться.

Предельное описание и отсутствие остаточной диссипации. Из любой регуляризованной семьи теоремы 5 можно выделить подпоследовательность, порождающую совместную меру $\mathcal{V}_{t,x}$ состояния a и две контролируемые переменные g, z. В шуровском разложении подвижности переменная g представляет граф-градиент, а z – градиент дефектной компоненты, взвешенный квадратным корнем дополнения Шура. Теоремы 16–17 выражают через эту меру оба потока и диссипацию.

Априорное условие исчезновения остатка получено в теореме 24 для нелинейного трехкомпонентного класса с постоянным ядром подвижности. Градиенты двух активных компонент решения сравнения предполагаются ограниченными. Третья компонента входит в коэффициенты обоих потоков и может быть разрывной. Для регуляризованных решений установлена оценка

$$\sup_{0\le t\le T} \| u^{\lambda}(t) - u(t) \|_2^2 + \| G_\lambda - G \|_{L^2(Q_T)}^2 + \| Z_\lambda - Z \|_{L^2(Q_T)}^2 \le C\mathcal{E}_\lambda,$$

где $\mathcal{E}_\lambda \to 0$ определяется начальной погрешностью, модулем сильной непрерывности тепловой полугруппы на заданном профиле и параметром регуляризации. Вместе с отдельной оценкой регуляризационной энергии это неравенство позволяет применить следствие 22 и исключить остаточную меру. При предпосылках теоремы 24 предел единственен в указанном классе и не зависит от выбора диагональной регуляризации в рассматриваемых координатах. Пространственный градиент компоненты в ядре не требуется.

В примере 25 эти условия выполнены для нелинейной недиагональной подвижности, зависящей от разрывной компоненты. Квадраты ошибок состояния и обоих каналов, а также относительная диссипация регуляризованных решений ограничены величиной $C\sqrt{\lambda}$. Таким образом, отсутствие остатка следует из оценок решений до построения предельной меры.

Обе части предельного потока имеют моментное представление:

$$\bar{J} = J_g^{[10]} + J_S^{[10]}, \qquad J_g^{[10]} = \langle \mathcal{V}, B(a)g \rangle, \qquad J_S^{[10]} = \langle \mathcal{V}, S_{\mathrm{Sh}}(a)^{1/2} z \rangle.$$

Шуровская плотность диссипации равна $D_{\mathrm{Sh}}(a,g,z) = g{:}\,B_{QQ}(a)g + |z|^2$. Для слабого-* предела m полных диссипационных мер имеем:

$$m = \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}} \rangle\, dxdt + \mu_{\mathrm{diss}}, \qquad \mu_{\mathrm{diss}} \ge 0,$$

$$\mu_{\mathrm{diss}}^{[10]} = \mu_{\mathrm{diss}} + \mathcal{R}_{\mathrm{Sh}}\, dxdt, \qquad \mathcal{R}_{\mathrm{Sh}} = \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}} \rangle - c_0 |\langle \mathcal{V}, g \rangle|^2 \ge 0,$$

где c_0 – константа нижней граф-коэрцитивной оценки, $\mu_{\mathrm{diss}}^{[10]}$ – дефект из работы [10], а μ_{diss} – остаток после учета вторых моментов обоих каналов. Явная плотность может быть положительной и при сильной сходимости структурных переменных. Меры рассматриваются на замкнутом цилиндре. Их связь с пространством мер [10] при отсутствии граничной энтропийной массы установлена после теоремы 17.

В общей постановке поток определяется моментной формулой $\bar{J} = \langle \mathcal{V}, J_{\mathrm{Sh}} \rangle$. Для нее достаточно парных распределений состояния с каждым каналом. Равенство $\bar{J} = B(\bar{u})\nabla Dh(\bar{u})$ требует дополнительных условий, поскольку полный градиент предельного состояния может отсутствовать. Пространственная связь переменных с исходной системой задается порождением регуляризованными решениями согласно определениям 14–15.

Теорема 20 характеризует исчезновение остатка через порождающую последовательность. Примеры 21 и 23 показывают, что диссипация второго канала может сохраняться без концентрационных и регуляризационных потерь.

Хопф и Юнгель [11, определение 1, теоремы 5 и 7] использовали совместные меры состояния и контролируемого градиента для системы с линейными давлениями. Они доказали сходимость конечно-объемной схемы и мерозначную сильную единственность относительно положительного решения с непрерывными первыми производными всех компонент. В рассматриваемой здесь системе совместная мера описывает оба шуровских канала и их вклад в полную диссипацию.

Эльбар [12, теорема 1.3] построил слабое решение специальной одномерной системы двух популяций с различными подвижностями, используя совместную меру и компенсированную компактность. В настоящей работе диссипация порожденного предела разделяется без предварительного устранения осцилляций. При этом ранг дополнения Шура может меняться.

Хайцингер и Юнгель [13] установили слабую-сильную единственность для систем с заполнением объема и энтропией типа Больцмана. В определении 2 этой работы решение сравнения положительно и имеет ограниченные пространственные производные всех компонент; теорема 1 использует структурные условия на расширенную матрицу подвижности. В теореме 24 настоящей статьи компонента в ядре постоянна по времени, ограничена по пространству и входит в коэффициенты обоих активных потоков. Ее пространственный градиент в оценках (75)–(77) не используется.

В препринте Щетинина, Шевчука и Салпагарова [14] исследован предел регуляризации для состояния в симплексе долей, компоненты которого неотрицательны и имеют единичную сумму. Рассмотрены переходы гладкого решения сравнения между внутренностью симплекса и его гранями. При обращении компоненты в нуль подвижность теряет ранг, а скорость сходимости зависит от условий контакта с гранью. Теорема 24 относится к постоянному ядру и допускает разрывное полное состояние; скорость (81) определяется тепловым сглаживанием скачка.

Полученные результаты структурно усиливают предельное описание [10]: оба потока представлены согласованными моментами, а диссипационный дефект точно разделен на явную плотность и остаток. Оценки (75)–(77) позволяют априорно исключить остаток для нелинейного класса с частичной пространственной регулярностью. Существование регуляризованной семьи и ее общие оценки используются в форме, установленной в работе [10]. Построение совместной меры опирается на стандартную блочную алгебру и компактность мер Юнга, а доказательство теоремы 24 – на энергетическое сравнение и свойства тепловой полугруппы.

Материалы и методы

Энтропийная постановка

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченная область с границей класса C^2, $T > 0$ и

$$Q_T = (0,T) \times \Omega.$$

Для матриц $X, Y \in \mathbb{R}^{N\times d}$ запись $X{:}Y = \sum_{i,\alpha} X_{i\alpha} Y_{i\alpha}$ обозначает скалярное произведение Фробениуса; $|X|^2 = X{:}X$. Матрицы подвижности действуют на каждый столбец. В задаче с нулевым нормальным потоком обозначение $H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ используем для пространства, двойственного к $H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Слабая дивергенция поля $F \in L^2$ определяется равенством $\langle -\nabla\cdot F, v\rangle = \int_\Omega F : \nabla v\, dx$ при $v \in H^1$.

Предельные меры рассматриваем на компакте $\mathcal{K}_T = [0,T] \times \overline{\Omega}$. Через $\mathcal{M}_+(\mathcal{K}_T)$ обозначаем множество конечных неотрицательных мер Радона. Плотности на Q_T отождествляем с мерами на $\mathcal{K}_T$, продолженными нулем вне Q_T. Под слабой-* сходимостью мер понимаем сходимость интегралов со всеми непрерывными функциями на $\mathcal{K}_T$. Такое пространство мер позволяет учитывать возможную концентрацию на пространственной границе.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^N$ – открытое ограниченное выпуклое множество, а $\overline{D}$ – его замыкание.

Плотность энтропии $h \in C^3(D)$ строго выпукла и имеет полунепрерывное снизу продолжение на $\overline{D}$ со значениями в $[0,+\infty]$. Предполагается барьерное условие

$$h(u) \to +\infty \qquad \text{при} \qquad \operatorname{dist}(u, \partial D) \downarrow 0.$$

Определение барьерной энтропии. Барьерной энтропией на D называется выпуклая плотность h, стремящаяся к $+\infty$ при приближении к ∂D. Ее продолжение h на границу равно $+\infty$, а каждое подуровневое множество $\{u \in D: h(u) \le M\}$ компактно содержится в D. Это условие налагается на саму плотность h, а не только на ее производную.

Отображение

$$Dh: D \to \mathbb{R}^N$$

является C^2-диффеоморфизмом. Его обратное отображение обозначается как

$$U = (Dh)^{-1}: \mathbb{R}^N \to D.$$

Предполагаются оценки:

$$\xi \cdot D^2 h(u)\xi \ge c_h|\xi|^2, \qquad \| DU(w) \| + \| D^2 U(w) \| \le C_U.$$

Определение энтропийных переменных. Энтропийные переменные – компоненты градиента плотности энтропии по состоянию: $w = Dh(u)$, то есть $w_i = \partial h(u)/\partial u_i$. Буква D в записи Dh означает дифференцирование по u, а ∇w – пространственный градиент. Условие диффеоморфности обеспечивает обратный переход $u = U(w)$. Для гладких функций $\nabla w = D^2 h(u)\nabla u$.

Реакционный член $R \in C^1(D; \mathbb{R}^N)$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и удовлетворяет

$$|R(u)| \le C_R, \qquad Dh(u) \cdot R(u) \le C_R\big(1 + h(u)\big).$$

Начальные данные удовлетворяют

$$u_0 \in L^1(\Omega; D), \qquad h(u_0) \in L^1(\Omega)$$

и допускают энтропийно согласованную аппроксимацию $u_0^\lambda \in H^1(\Omega; D)$, для которой

$$u_0^\lambda \to u_0 \quad \text{в } L^1(\Omega; \mathbb{R}^N),$$
$$\int_\Omega h\left(u_0^\lambda\right) dx \to \int_\Omega h\left(u_0\right) dx.$$

Семейство аппроксимаций выбираем с равномерно ограниченной начальной энтропией:

$$\sup_{0<\lambda\le 1} \int_\Omega h\left(u_0^\lambda\right) dx < \infty.$$

Предполагаем, что

$$B \in C^1\big(D; \mathbb{R}^{N\times N}_{\mathrm{sym}}\big),$$

матрица подвижности непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и

$$B(u) \ge 0, \qquad \| B \|_{L^\infty(D)} + \| DB \|_{L^\infty(D)} \le C_B.$$

Для $0 < \lambda \le 1$ рассматривается система

$$\partial_t u^\lambda - \nabla \cdot \big(B_\lambda\big(u^\lambda\big)\nabla w^\lambda\big) = R\big(u^\lambda\big), \qquad w^\lambda = Dh\big(u^\lambda\big), \tag{1}$$

с условием нулевого нормального потока и начальным состоянием u_0^λ. Матрицу B_λ зададим после введения разложения $E_Q \oplus E_P$.

Разложение подвижности и диссипации

Пусть $P = P^{\top} = P^2$ – фиксированный ортогональный проектор ранга

$$r = \mathrm{rank} P \in \{1, \dots, N-1\},$$

и $Q = I - P$. Положим

$$E_P = P\mathbb{R}^N, \qquad E_Q = Q\mathbb{R}^N.$$

Тогда

$$\mathbb{R}^N = E_Q \oplus E_P.$$

Предполагается, что блок

$$B_{QQ}(u): E_Q \to E_Q, \qquad B_{QQ}(u)\xi = QB(u)Q\xi$$

равномерно коэрцитивен: существует $\alpha_Q > 0$ такое, что

$$\xi \cdot B_{QQ}(u)\xi \geq \alpha_Q |\xi|^2, \qquad \xi \in E_Q, \quad u \in \overline{D}. \tag{2}$$

В частности,

$$\| B_{QQ}(u)^{-1} \| \leq \alpha_Q^{-1}.$$

Определим оператор связи

$$K_{\mathrm{Sh}}(u) = B_{QQ}(u)^{-1} QB(u)P: E_P \to E_Q. \tag{3}$$

Определение дополнения Шура. Для блочной матрицы $M = \left(M_{ij}\right)_{i,j=1}^{2}$ с обратимым блоком M_{11} дополнением Шура этого блока называется оператор $M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$, возникающий при исключении первой группы переменных. В разложении подвижности по двум подпространствам дополнение блока B_{QQ} имеет вид

$$S_{\mathrm{Sh}}(u) = PB(u)P - PB(u)QB_{QQ}(u)^{-1}QB(u)P: E_P \to E_P. \tag{4}$$

Неотрицательность дополнения Шура и факторизация квадратичной формы в лемме 1 и предложении 3 следуют из [10, лемма 6], а разложение потока в предложении 4 – из [10, лемма 7]. В лемме 2 используется непрерывность матричного квадратного корня. Для удобства приведем доказательства в принятых обозначениях.

Лемма 1 (Неотрицательность дополнения Шура). Для каждого $u \in \overline{D}$ оператор $S_{\mathrm{Sh}}(u)$ симметричен и неотрицателен на E_P.

Доказательство. Для $p \in E_P$ положим $q = -K_{Sh}(u)p$. Из (3), (4) и симметрии B следует

$$0 \leq (q+p) \cdot B(u)(q+p) = p \cdot S_{Sh}(u)p.$$

Следовательно, $S_{Sh}(u)$ неотрицателен; симметрия следует из (4).

Лемма 2 (Непрерывность квадратного корня). Отображение $u \mapsto S_{\mathrm{Sh}}(u)^{1/2}$ непрерывно на $\overline{D}$. В частности, $\| S_{\mathrm{Sh}}(u)^{1/2} \| \leq C_S, \ u \in \overline{D}$.

Доказательство. Непрерывность B и равномерная обратимость B_{QQ} обеспечивают непрерывность S_{Sh} как отображения в конус симметричных неотрицательных матриц. По функциональному исчислению равномерная непрерывность функции $s \mapsto \sqrt{s}$ на компактном интервале, содержащем спектры всех $S_{\mathrm{Sh}}(u)$, влечет непрерывность неотрицательного симметричного квадратного корня. Это свойство сохраняется при изменении ранга S_{Sh}; дифференцируемость квадратного корня далее не требуется.

Для $\xi \in \mathbb{R}^N$ положим

$$q = Q\xi, \qquad p = P\xi,$$

и определим

$$G_{\mathrm{Sh}}(u,\xi) = q + K_{\mathrm{Sh}}(u)p \in E_Q, \tag{5}$$

$$Z_{\mathrm{Sh}}(u,\xi) = S_{\mathrm{Sh}}(u)^{1/2}p \in E_P. \tag{6}$$

Величины G_{Sh} и Z_{Sh} будем называть структурными градиентными переменными, или, кратко, структурными переменными.

Предложение 3 (Факторизация диссипации). Для всех $u \in \overline{D}$ и $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\xi \cdot B(u)\xi = G_{\mathrm{Sh}}(u,\xi) \cdot B_{QQ}(u)G_{\mathrm{Sh}}(u,\xi) + |Z_{\mathrm{Sh}}(u,\xi)|^2. \tag{7}$$

Доказательство. В разложении $E_Q \oplus E_P$ определения (3), (4) дают факторизацию

$$B(u) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ K_{Sh}^{\top} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{QQ} & 0 \\ 0 & S_{Sh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K_{Sh} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Единичные блоки действуют на соответствующих подпространствах. Применяя эту факторизацию к $\xi = q + p$, получаем (7).

Для матриц $\Xi \in \mathbb{R}^{N\times d}$ операторы действуют по столбцам. Положим

$$G_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi) = Q\Xi + K_{\mathrm{Sh}}(u)P\Xi,$$

$$Z_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi) = S_{\mathrm{Sh}}(u)^{1/2}P\Xi.$$

Тогда

$$\Xi : B(u)\Xi = G_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi) : B_{QQ}(u)G_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi) + |Z_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi)|^2. \tag{8}$$

Положим

$$\mathcal{G}_Q = E_Q^d, \qquad \mathcal{G}_P = E_P^d,$$

и введем плотность нерегуляризованной диссипации

$$D_{\mathrm{Sh}}(a,g,z) = g : B_{QQ}(a)g + |z|^2. \tag{9}$$

Из (2)

$$D_{\mathrm{Sh}}(a,g,z) \geq \alpha_Q|g|^2 + |z|^2. \tag{10}$$

Для $a \in \overline{D}$, $g \in \mathcal{G}_Q$, $z \in \mathcal{G}_P$ определим

$$J_{\mathrm{Sh}}(a,g,z) = B_{QQ}(a)g + K_{\mathrm{Sh}}(a)^{\top}B_{QQ}(a)g + S_{\mathrm{Sh}}(a)^{1/2}z. \tag{11}$$

Первое слагаемое принадлежит E_Q^d, а два последних – E_P^d.

Выразим разложение потока из [10, лемма 7] через переменную Z_{Sh} и установим оценку линейного роста для перехода к мере Юнга.

Предложение 4 (Представление потока). Для всех $u \in \overline{D}$ и $\Xi \in \mathbb{R}^{N\times d}$

$$B(u)\Xi = J_{\mathrm{Sh}}\big(u, G_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi), Z_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi)\big). \tag{12}$$

Кроме того, существует $C_J > 0$ такое, что

$$|J_{\mathrm{Sh}}(a,g,z)| \leq C_J(|g| + |z|). \tag{13}$$

Доказательство. Для одного столбца $\xi = q + p$ положим $g = q + K_{Sh}(u)p$ и $z = S_{Sh}(u)^{1/2}p$. Из той же блочной факторизации имеем

$$B(u)\xi = B(u)g + S_{Sh}(u)p = B_{QQ}(u)g + K_{Sh}(u)^{\top}B_{QQ}(u)g + S_{Sh}(u)^{1/2}z.$$

Это дает (12) по столбцам. Ограниченность коэффициентов на $\overline{D}$ и лемма 2 дают (13).

Регуляризованная семья и равномерные оценки

Пусть $A = PAP, \quad A^{\top} = A$ и существуют $0 < a_0 \le a_1 < \infty$ такие, что

$$a_0|P\xi|^2 \le \xi \cdot A\xi \le a_1|P\xi|^2. \tag{14}$$

Положим

$$B_\lambda(u) = B(u) + \lambda A, \qquad 0 < \lambda \le 1. \tag{15}$$

По предложению 3

$$\Xi : B_\lambda(u)\Xi = D_{\mathrm{Sh}}\big(u, G_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi), Z_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi)\big) + \lambda P\Xi : AP\Xi. \tag{16}$$

При фиксированном $\lambda > 0$ матрица $B_\lambda(u)$ равномерно положительно определена. Действительно, если

$$M_K = \| K_{\mathrm{Sh}} \|_{L^\infty(\overline{D})},$$

то

$$|Q\xi|^2 + |P\xi|^2 \le 2|G_{\mathrm{Sh}}(u,\xi)|^2 + (2M_K^2 + 1)|P\xi|^2,$$

и потому

$$\xi \cdot B_\lambda(u)\xi \ge c_\lambda|\xi|^2, \qquad c_\lambda = \min\left\{\frac{\alpha_Q}{2}, \frac{\lambda a_0}{2M_K^2+1}\right\}. \tag{17}$$

Определение граф-коэрцитивности. Граф-градиентом называется комбинация $G_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi) = Q\Xi + K_{\mathrm{Sh}}(u)P\Xi$. Для каждого столбца ее ядро совпадает с графом оператора $p \mapsto -K_{\mathrm{Sh}}(u)p$ в разложении $E_Q \oplus E_P$. Граф-коэрцитивной называем следующую оценку квадратичной формы через граф-градиент и регуляризованную дефектную компоненту:

$$c_0|G_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi)|^2 + c_1\lambda|P\Xi|^2 \le \Xi : B_\lambda(u)\Xi \le C_0|G_{\mathrm{Sh}}(u,\Xi)|^2 + C_1(1+\lambda)|P\Xi|^2.$$

Константы положительны и не зависят от u и $\lambda \in (0,1]$; можно выбрать $c_0 = \alpha_Q$ и $c_1 = a_0$. Нижняя оценка следует из (10), (14), (16), верхняя – из ограниченности B_{QQ}, S_{Sh} и A. Это оценка [10, лемма 6]; далее c_0 обозначает выбранную константу в ее нижней части.

Определение слабого энтропийного решения регуляризованной задачи. При фиксированном $\lambda > 0$ слабым энтропийным решением называется измеримая функция $u^\lambda : Q_T \to D$, для которой $h\big(u^\lambda\big) \in L^\infty\big(0,T;L^1(\Omega)\big)$, $\nabla w^\lambda \in L^2(Q_T)$, $\partial_t u^\lambda \in L^2(0,T;H^{-1})$, выполнены слабый баланс (34) с заменой $(\bar{u},\bar{J},\bar{R},u_0)$ на $\big(u^\lambda, B_\lambda\big(u^\lambda\big)\nabla w^\lambda, R\big(u^\lambda\big), u_0^\lambda\big)$ и взвешенное энтропийное неравенство (20). Пространственный градиент энтропийной переменной определяется с помощью усечений и при фиксированном λ обладает указанной L^2-регулярностью. Определение согласовано с [10, определение 8] и явно включает энтропийное неравенство с временной пробной функцией.

Существование решений и оценки (18), (19) установлены в [10, теорема 10], а оценки (22)–(24) – в [10, лемма 11]. Вывод взвешенного неравенства (20) опирается на локальный по времени энтропийный баланс и восстановление начального значения энтропии при стремлении t к нулю.

Теорема 5 (Исходные оценки регуляризованной семьи). Для каждого $0 < \lambda \leq 1$ существует глобальное слабое энтропийное решение u^λ регуляризованной задачи. Для энтропийной переменной $w^\lambda = Dh(u^\lambda)$ выполняются оценки:

$$\int_\Omega h\left(u^\lambda(t)\right) dx \leq C_T, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{18}$$

$$\int_{Q_T} \nabla w^\lambda : B_\lambda(u^\lambda) \nabla w^\lambda \, dxdt \leq C_T, \tag{19}$$

а для каждой неотрицательной функции $\zeta \in C^1([0,T])$ с компактным носителем при $0 \leq t < T$ выполняется взвешенное энтропийное неравенство

$$\begin{aligned} -\int_{Q_T} \zeta'(t) h(u^\lambda)\, dxdt + \int_{Q_T} \zeta(t)\, \nabla w^\lambda : B_\lambda(u^\lambda) \nabla w^\lambda \, dxdt \leq \\ \leq E_0^\lambda \zeta(0) + C_R |\Omega| \int_0^T \zeta(t)\, dt + C_R \int_{Q_T} \zeta(t) h(u^\lambda)\, dxdt, \end{aligned} \tag{20}$$

здесь

$$E_0^\lambda = \int_\Omega h\left(u_0^\lambda\right) dx. \tag{21}$$

Кроме того, выполняются оценки:

$$\| B_\lambda(u^\lambda) \nabla w^\lambda \|_{L^2(Q_T)} \leq C_T, \tag{22}$$

$$\| \partial_t u^\lambda \|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega;\mathbb{R}^N)\right)} \leq C_T. \tag{23}$$

Во всех этих оценках C_T не зависит от λ. Кроме того,

$$\lambda A P \nabla w^\lambda \to 0 \quad \text{сильно в } L^2(Q_T) \qquad (\lambda \downarrow 0). \tag{24}$$

Обоснование неравенства (20). При фиксированном λ из (17) и (19) следует $\nabla w^\lambda \in L^2(Q_T)$. По (18) для почти каждого t на множестве меры не менее $|\Omega|/2$ выполнено $h\left(u^\lambda(t)\right) \leq 2C_T/|\Omega|$. Барьерное условие дает ограниченность Dh на этом подуровневом множестве. Применяя неравенство Пуанкаре сначала к усечениям, оцениваем среднее $w^\lambda(t)$ через $\| \nabla w^\lambda(t) \|_{L^2}$ и фиксированную константу. Следовательно, $w^\lambda \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega)\right)$, причем оценка может зависеть от λ.

Ограниченность DU дает $u^\lambda = U(w^\lambda) \in L^2(0,T;H^1)$. Воспользуемся следующим цепным правилом. Пусть $X = H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $v \in L^2(0,T;X) \cap H^1(0,T;X^*)$, $Dh(v) \in L^2(0,T;X)$ и $E(v) = \int_\Omega h(v)\, dx \in L^\infty(0,T)$. Тогда $E(v)$ имеет абсолютно непрерывного представителя и $\frac{d}{dt} E\left(v(t)\right) = \langle \partial_t v(t), Dh\left(v(t)\right)\rangle_{X^*,X}$ почти всюду.

Для доказательства применим выпуклость в два соседних момента времени:

$$\begin{aligned} \langle Dh\left(v(t)\right), v(t+s) - v(t)\rangle \leq E\left(v(t+s)\right) - E\left(v(t)\right) \leq \\ \leq \langle Dh\left(v(t+s)\right), v(t+s) - v(t)\rangle. \end{aligned}$$

После деления на $s > 0$ и интегрирования с неотрицательной гладкой временной пробной функцией оба крайних выражения имеют один предел: разностные отношения сходятся в $L^2(X^*)$, а временные сдвиги $Dh(v)$ – в $L^2(X)$. Получаем заявленное равенство в распределениях. Его правая часть принадлежит $L^1(0,T)$, что дает абсолютную непрерывность.

Для $v = u^\lambda$ начальный след равен u_0^λ в L^2: это следует из указанной регулярности в двойственной паре. Нижняя полунепрерывность выпуклого функционала показывает, что $E\left(u_0^\lambda\right)$ не превосходит нижнего предела $E\left(u^\lambda(t)\right)$ при $t \downarrow 0$. Исходное интегральное

энтропийное неравенство регуляризованного решения [10, теорема 10] дает обратную верхнюю оценку, поскольку интеграл реакции на $(0,t)$ стремится к нулю. Следовательно, $E^{\lambda}(0) = E_0^{\lambda}$.

Слабое уравнение продолжается на пробные функции из $L^2(0,T;X)$: поток, реакция и временная производная принадлежат соответствующим двойственным пространствам. Выбирая w^{λ} и применяя доказанное цепное правило, получаем

$$\left(E^{\lambda}\right)'(t) + \int_{\Omega} \nabla w^{\lambda} : B_{\lambda}\left(u^{\lambda}\right)\nabla w^{\lambda}\, dx \le C_R\left(|\Omega| + E^{\lambda}(t)\right).$$

Интегрирование с $\zeta \ge 0$, с учетом начального следа, дает (20). Ограничений на знак ζ' не требуется.

Шуровское разложение и полная оценка [10, теорема 10] дают равномерные оценки обеих структурных переменных, в том числе Z_{λ}.

Предложение 6 (Равномерные оценки структурных переменных). Пусть $G_{\lambda} = = G_{\mathrm{Sh}}\left(u^{\lambda}, \nabla w^{\lambda}\right),\ Z_{\lambda} = Z_{\mathrm{Sh}}\left(u^{\lambda}, \nabla w^{\lambda}\right)$. Тогда

$$\int_{Q_T}\left(|G_{\lambda}|^2 + |Z_{\lambda}|^2 + \lambda\left|P\nabla w^{\lambda}\right|^2\right) dxdt \le C_T, \qquad 0 < \lambda \le 1. \tag{25}$$

Доказательство. Из (10), (14), (16) и (19) следует

$$\int_{Q_T}\left(\alpha_Q|G_{\lambda}|^2 + |Z_{\lambda}|^2 + \lambda a_0\left|P\nabla w^{\lambda}\right|^2\right) dxdt \le C_T.$$

Результаты

Совместная мера и моментное представление потока

Определение меры Юнга. Пусть E – замкнутое подмножество конечномерного евклидова пространства, а $\mathcal{P}(E)$ – множество борелевских вероятностных мер на E. Параметризованной мерой Юнга на Q_T со значениями в E называется семейство $\nu = = \{\nu_{t,x}\}_{(t,x)\in Q_T} \subset \mathcal{P}(E)$, для которого при каждой ограниченной непрерывной функции $f \in C_b(E)$ отображение $(t,x) \mapsto \langle \nu_{t,x}, f\rangle$ измеримо. Это свойство называется слабой измеримостью. Здесь

$$\langle \nu_{t,x}, f\rangle = \int_E f\,(y)\, d\nu_{t,x}(y).$$

Под мерой Юнга далее понимаем это параметризованное семейство. Мера $\nu_{t,x}$ описывает распределение осциллирующих значений в точке (t,x). Говорим, что последовательность измеримых функций $v_k : Q_T \to E$ порождает ν, если для всех $f \in C_b(E)$ и $\psi \in L^1(Q_T)$ выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \int_{Q_T} \psi\,(t,x) f\left(v_k(t,x)\right) dxdt = \int_{Q_T} \psi\,(t,x)\langle \nu_{t,x}, f\rangle\, dxdt.$$

Иными словами, $f(v_k)$ сходится слабо-* в $L^{\infty}(Q_T)$ к $\langle \nu, f\rangle$. Для неограниченной непрерывной функции переход к слабому L^1-пределу дополнительно требует равномерной интегрируемости ее значений на порождающей последовательности. Это условие проверяется в лемме 7 при применении фундаментальной теоремы о мерах Юнга [3].

Определение совместной меры Юнга. Совместной мерой Юнга последовательности кортежей (a_k, g_k, z_k) называется мера на произведении $E = \overline{D} \times \mathcal{G}_Q \times \mathcal{G}_P$, порождённая всем кортежем одновременно. Ее маргиналь по состоянию равна $\nu_{t,x} = \mathcal{V}_{t,x} \circ \pi_a^{-1}$, где $\pi_a(a,g,z) = a$: для борелевского множества $A \subset \overline{D}$ имеем $\nu_{t,x}(A) = \mathcal{V}_{t,x}\left(A \times \mathcal{G}_Q \times \mathcal{G}_P\right)$.

Совместная мера сохраняет корреляции координат и в общем случае не совпадает с произведением своих маргиналей.

Определение барицентра. Если мера $\rho \in \mathcal{P}(E)$ имеет конечный первый момент, ее барицентр – вектор $\mathrm{bar}\rho = \int_E y\, d\rho(y)$. Для совместной меры барицентр состояния равен $\bar{u} = \langle \mathcal{V}, a \rangle$, а $\langle \mathcal{V}, F \rangle$ называется средним, или моментом, функции $F(a, g, z)$. Барицентрическое представление потока означает усреднение J_{Sh} по совместной мере. В общем случае оно не совпадает с подстановкой барицентров в нелинейное отображение J_{Sh}.

Предложение 6 позволяет применить фундаментальную теорему [3] к состоянию и обеим структурным переменным. Ограниченность их вторых моментов обеспечивает равномерную интегрируемость функций линейного роста.

Пусть $\lambda_k \downarrow 0$ и

$$a_k = u^{\lambda_k}, \qquad g_k = G_{\lambda_k}, \qquad z_k = Z_{\lambda_k}.$$

Лемма 7 (Совместная мера Юнга). После выделения подпоследовательности существует слабо измеримое семейство вероятностных мер

$$\mathcal{V}_{t,x} \in \mathcal{P}\big(\overline{D} \times \mathcal{G}_Q \times \mathcal{G}_P\big) \tag{26}$$

такое, что последовательность (a_k, g_k, z_k) порождает $\mathcal{V}$. Кроме того,

$$\int_{Q_T} \langle \mathcal{V}, |g|^2 + |z|^2 \rangle\, dxdt < \infty. \tag{27}$$

Если F непрерывна и

$$|F(a, g, z)| \le C_F(1 + |g| + |z|), \tag{28}$$

то

$$F(a_k, g_k, z_k) \rightharpoonup \langle \mathcal{V}, F \rangle \quad \text{в } L^1(Q_T). \tag{29}$$

Доказательство. Значения a_k лежат в компакте $\overline{D}$, а переменные g_k, z_k ограничены в L^2. Это обеспечивает тесноту: мера множества $\{|g_k| + |z_k| > M\}$ стремится к нулю равномерно по k при $M \to \infty$. Фундаментальная теорема о мерах Юнга [3] дает подпоследовательность и вероятностное семейство $\mathcal{V}$. Применяя определение порождения к ограниченным непрерывным усечениям $\min\{|g|^2 + |z|^2, M\}$, а затем теорему о монотонной сходимости, получаем (27) с верхней границей из (25).

Проверим равномерную интегрируемость функций линейного роста. Для любого измеримого множества $E \subset Q_T$ по неравенству Коши-Буняковского имеем

$$\int_E (|g_k| + |z_k|)\, dxdt \le C|E|^{1/2}$$

с константой, не зависящей от k. Следовательно, семейство $F(a_k, g_k, z_k)$ равномерно интегрируемо, и по фундаментальной теореме о мерах Юнга выполнено (29).

Определим

$$\overline{u} = \langle \mathcal{V}, a \rangle, \qquad \overline{J} = \langle \mathcal{V}, J_{\mathrm{Sh}}(a, g, z) \rangle, \qquad \overline{R} = \langle \mathcal{V}, R(a) \rangle. \tag{30}$$

Применение леммы 7 к функции потока дает моментное представление его слабого предела.

Теорема 8 (Моментное представление предельного потока). Для величин, определенных в (30), после выделения подпоследовательности выполняются

$$u^{\lambda_k} \rightharpoonup \overline{u} \quad \text{слабо-* в } L^\infty(Q_T; \mathbb{R}^N), \tag{31}$$

$$B_{\lambda_k}\left(u^{\lambda_k}\right)\nabla w^{\lambda_k} \rightharpoonup \bar{J} \quad \text{в } L^2(Q_T;\mathbb{R}^{N\times d}), \tag{32}$$

Кроме того,

$$R\left(u^{\lambda_k}\right) \rightharpoonup \overline{R} \quad \text{слабо-* в } L^\infty(Q_T;\mathbb{R}^N). \tag{33}$$

Для каждой пробной функции $\varphi \in L^2\left(0,T;H^1(\Omega;\mathbb{R}^N)\right) \cap H^1\left(0,T;L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)\right)$, $\varphi(T)=0$, выполняется

$$-\int_{Q_T} \overline{u}\cdot\partial_t\varphi\,dxdt - \int_\Omega u_0\cdot\varphi(0)\,dx + \int_{Q_T}\bar{J}:\nabla\varphi\,dxdt = \int_{Q_T}\overline{R}\cdot\varphi\,dxdt. \tag{34}$$

Пробные функции могут быть ненулевыми на $\partial\Omega$, поэтому условие нулевого нормального потока входит в слабую формулировку.

Доказательство. По предложению 4

$$B\left(u^{\lambda_k}\right)\nabla w^{\lambda_k} = J_{\mathrm{Sh}}(a_k,g_k,z_k).$$

Отображение J_{Sh} непрерывно и удовлетворяет оценке (13). По лемме 7 имеем

$$J_{\mathrm{Sh}}(a_k,g_k,z_k) \rightharpoonup \langle \mathcal{V}, J_{\mathrm{Sh}}\rangle$$

в L^1. По (13) и предложению 6 последовательность также ограничена в L^2, поэтому полученный предел является ее слабым L^2-пределом. Регуляризующая часть потока сходится сильно к нулю по (24), что дает (32).

Чтобы получить (31), применим определение порождения к координатным функциям $a \mapsto a_i$, ограниченным на $\overline{D}$. Сходимость проверяется на любой пробной функции из L^1, что дает слабую-* сходимость состояний в L^∞. Для непрерывных ограниченных компонент $R(a)$ тем же способом получаем (33).

В (32) переход от слабой сходимости в L^1 к слабой сходимости в L^2 следует из плотности ограниченных пробных функций в L^2 и равномерной L^2-оценки потока. Начальное слагаемое сходится благодаря L^1-сходимости данных $u_0^{\lambda_k}$ и их равномерной ограниченности, которая обеспечивает также сильную L^2-сходимость. Поэтому можно перейти к пределу в (34).

Замечание 9 (Смысл идентификации). Формулы (30) и (32) представляют поток как момент совместной меры $\mathcal{V}$. Маргиналь состояния и его барицентр $\bar{u}$ в общем случае не определяют этот момент. Равенство $\bar{J} = B(\bar{u})\nabla Dh(\bar{u})$ и сильная сходимость полного энтропийного градиента из теоремы не следуют.

Парные маргинали. Обозначим через Λ_Q и Λ_P распределения пар (a,g) и (a,z):

$$\Lambda_Q = \left(\pi_{a,g}\right)_{\#}\mathcal{V}, \qquad \Lambda_P = \left(\pi_{a,z}\right)_{\#}\mathcal{V},$$

где $\pi_{a,g}(a,g,z) = (a,g)$ и $\pi_{a,z}(a,g,z) = (a,z)$; образ меры определяется равенством $\langle \pi_{\#}\mathcal{V}, F\rangle = \langle \mathcal{V}, F\circ\pi\rangle$. Обе парные меры имеют одну маргиналь состояния ν. Для потока и диссипации достаточно именно этих распределений:

$$\bar{J} = \langle \Lambda_Q, B(a)g\rangle + \langle \Lambda_P, S_{Sh}(a)^{1/2}z\rangle,$$

$$\langle \mathcal{V}, D_{Sh}\rangle = \langle \Lambda_Q, g: B_{QQ}(a)g\rangle + \langle \Lambda_P, |z|^2\rangle.$$

Эти равенства следуют из (9), (11) и определения образа меры. Они не используют корреляций между g и z сверх сведений двух парных распределений. Совместная мера $\mathcal{V}$ позволяет получить все моменты по одной подпоследовательности.

Энтропия и диссипация в пределе

Барьерная энтропия не является конечной непрерывной функцией на $\overline{D}$, поэтому для нее требуется отдельный предельный переход. Из (18) после выделения подпоследовательности получаем в $\mathcal{M}_+(\mathcal{K}_T)$

$$h\big(u^{\lambda_k}\big)\,dxdt \rightharpoonup \eta_{\mathrm{ent}} \quad \text{слабо-* как меры.} \tag{35}$$

Предложение 10 (Предельная энтропийная мера). На $\mathcal{K}_T$ выполняется следующее неравенство мер, в котором плотность продолжена нулем вне Q_T:

$$\eta_{\mathrm{ent}} \geq \langle \mathcal{V}, h(a)\rangle\,dxdt. \tag{36}$$

Доказательство. В силу барьерного условия усечение $h_M = \min\{h, M\}$, продолженное значением M на границу, непрерывно на $\overline{D}$. Для каждой функции $\phi \in C(\mathcal{K}_T)$ при $\phi \geq 0$ из определения порождения и неравенства $h_M \leq h$ следует

$$\int_{Q_T} \phi\,\langle \mathcal{V}, h_M\rangle\,dxdt = \lim_{k\to\infty} \int_{Q_T} \phi\, h_M(a_k)\,dxdt \leq \int_{\mathcal{K}_T} \phi\; d\eta_{\mathrm{ent}}.$$

Переходя к пределу при $M \to \infty$ по теореме о монотонной сходимости, получаем (36). Это частный случай нижней полунепрерывности интегральных функционалов [15].

Кроме того, из (18) следует $\eta_{\mathrm{ent}}\big(I \times \overline{\Omega}\big) \leq C_T|I|$ для любого борелевского множества времен $I \subset [0,T]$. Значит, энтропийная мера не имеет атомов при $t = 0, T$. Возможную пространственную концентрацию на $\partial\Omega$ эта оценка не исключает.

Определим полные диссипационные меры

$$dm_k = \big[D_{\mathrm{Sh}}(a_k, g_k, z_k) + \lambda_k P\nabla w^{\lambda_k} : AP\nabla w^{\lambda_k}\big]dxdt. \tag{37}$$

По (19) их массы равномерно ограничены. Поэтому после выделения подпоследовательности

$$m_k \rightharpoonup m \quad \text{слабо-* как меры.} \tag{38}$$

Нижнюю оценку предельной диссипации получим усечением неотрицательной плотности, используя (19) и определение порождаемой меры.

Лемма 11 (Нижняя оценка предельной диссипации). В смысле неотрицательных мер

$$m \geq \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}}(a, g, z)\rangle\,dxdt. \tag{39}$$

Доказательство. Для $M > 0$ положим

$$D_M(a, g, z) = \min\{D_{\mathrm{Sh}}(a, g, z), M\}.$$

Функция D_M ограничена и непрерывна, поэтому для каждой неотрицательной функции $\phi \in C(\mathcal{K}_T)$ имеем

$$\int_{Q_T} \phi\;\langle \mathcal{V}, D_M\rangle\,dxdt = \lim_{k\to\infty} \int_{Q_T} \phi\, D_M(a_k, g_k, z_k)\,dxdt.$$

Так как

$$D_M(a_k, g_k, z_k) \leq D_{\mathrm{Sh}}(a_k, g_k, z_k) \leq \frac{dm_k}{dxdt},$$

получаем

$$\int_{Q_T} \phi\;\langle \mathcal{V}, D_M\rangle\,dxdt \leq \int \phi\,dm.$$

Переходя к пределу при $M \to \infty$ по теореме о монотонной сходимости, получаем (39).

Определение 12 (Мера дефекта диссипации). Определим

$$\mu_{\mathrm{diss}} = m - \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}}(a,g,z)\rangle\, dxdt. \tag{40}$$

По лемме 11 это конечная неотрицательная мера Радона на $\mathcal{K}_T$.

Мера μ_{diss} описывает часть слабого-* предела полной квадратичной диссипации, не представленную плотностью $\langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}}\rangle$. Это остаток диссипации, отличный от возможного избытка энтропийной меры $\eta_{\mathrm{ent}} - \langle \mathcal{V}, h\rangle\, dxdt$.

Замечание 13 (Содержание меры μ_{diss}). Помимо возможного концентрационного остатка нерегуляризованной диссипации, мера μ_{diss} учитывает вклад регуляризации. Действительно, полная мера m_k содержит неотрицательное слагаемое

$$\lambda_k P\nabla w^{\lambda_k} : AP\nabla w^{\lambda_k}.$$

Его слабый-* предел может быть ненулевым, хотя линейный регуляризующий поток сильно сходится к нулю. Поэтому μ_{diss} будем называть остаточной мерой диссипации. Она объединяет концентрационные остатки нерегуляризованных каналов и возможную сохраняющуюся регуляризационную диссипацию. В теореме 20 эти вклады будут разделены.

Структурный объект и порождение предела

Усредненный баланс и энтропийное неравенство задают условия на распределение состояния и структурных переменных. Их пространственная совместимость с исходным уравнением обеспечивается порождением регуляризованными решениями. Поэтому различаем диссипативный структурный объект и порожденное диссипативное мерозначное решение; последнее название согласуется с терминологией [4].

Определение 14 (Диссипативный структурный объект). Тройка

$$\mathcal{U} = (\mathcal{V}, \eta_{\mathrm{ent}}, \mu_{\mathrm{diss}})$$

называется диссипативным структурным объектом, если выполнены следующие четыре условия. Семейство $\mathcal{V}$ предполагается слабо измеримым в смысле определения меры Юнга.

(i) $\mathcal{V}_{t,x} \in \mathcal{P}\big(\overline{D} \times \mathcal{G}_Q \times \mathcal{G}_P\big)$ почти всюду и

$$\int_{Q_T} \langle \mathcal{V}, |g|^2 + |z|^2\rangle\, dxdt < \infty;$$

(ii) η_{ent} и μ_{diss} принадлежат $\mathcal{M}_+(\mathcal{K}_T)$ и

$$\eta_{\mathrm{ent}} \geq \langle \mathcal{V}, h(a)\rangle\, dxdt$$

на Q_T;

(iii) величины

$$\overline{u} = \langle \mathcal{V}, a\rangle, \qquad \overline{J} = \langle \mathcal{V}, J_{\mathrm{Sh}}(a,g,z)\rangle, \qquad \overline{R} = \langle \mathcal{V}, R(a)\rangle$$

удовлетворяют слабому балансу (34);

(iv) для каждой неотрицательной функции $\zeta \in C^1([0,T])$ с компактным носителем при $0 \leq t < T$ выполняется энтропийное неравенство

$$-\int_{[0,T]\times\overline{\Omega}} \zeta'(t)\, d\eta_{\mathrm{ent}} + \int_{Q_T} \zeta(t)\langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}}(a,g,z)\rangle\, dxdt +$$

$$+ \int_{[0,T]\times\overline{\Omega}} \zeta(t)\, d\mu_{\mathrm{diss}} \leq E_0\zeta(0) + C_R|\Omega| \int_0^T \zeta(t)\, dt + C_R \int_{[0,T]\times\overline{\Omega}} \zeta(t)\, d\eta_{\mathrm{ent}}, \tag{41}$$

где

$$E_0 = \int_\Omega h\,(u_0)\,dx.$$

Определение 15 (Порожденное диссипативное мерозначное решение). Структурный объект из определения 14 называется диссипативным мерозначным решением, порожденным исчезающей регуляризацией, если существуют $\lambda_k \downarrow 0$ и соответствующие решения теоремы 5, для которых выполнены сходимости леммы 7, (35), (38) и

$$m = \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}} \rangle\, dxdt + \mu_{\mathrm{diss}}.$$

Для семьи теоремы 5 совместную меру дает лемма 7. Переход к пределу в балансе и энтропийном неравенстве приводит к следующему результату.

Теорема 16 (Совместное шуровское описание порожденного предела). Пусть выполнены предположения раздела «Материалы и методы», $\lambda_k \downarrow 0$, а u^{λ_k} – решения теоремы 5. Тогда после выделения подпоследовательности существует порожденный диссипативный мерозначный предел $(\mathcal{V}, \eta_{\mathrm{ent}}, \mu_{\mathrm{diss}})$ в смысле определений 14–15 и выполняются (31)–(34), (35), (38), (40), (41). Поток представлен моментом $\bar{J} = \langle \mathcal{V}, J_{\mathrm{Sh}} \rangle$; замыкание через одно предельное состояние не устанавливается. Регуляризующая часть потока сильно сходится к нулю в $L^2(Q_T)$, но ее квадратичная диссипация может сохраняться в μ_{diss}. Проекция на граф-коэрцитивное описание и разложение его дефекта приведены в теореме 17.

Доказательство. По предложению 6 и лемме 7 существует совместная мера, а теорема 8 дает моментные формулы для состояния, реакции и потока. Предельная энтропийная мера построена в предложении 10. Неотрицательность остатка (40) следует из леммы 11. Остается проверить энтропийное неравенство определения 14.

Запишем (20) для произвольной неотрицательной функции $\zeta \in C^1([0,T])$ с компактным носителем при $0 \le t < T$. В слагаемом с производной пробной функции используем (35), в диссипационном слагаемом – (38). Начальное слагаемое сходится в силу энтропийной согласованности данных $u_0^{\lambda_k}$, то есть $E_0^{\lambda_k} \to E_0$. В последнем слагаемом правой части применяем слабую-* сходимость мер $h\big(u^{\lambda_k}\big)\,dxdt \rightharpoonup \eta_{\mathrm{ent}}$. Получаем (41), что завершает проверку определения 14. Условие порождения из определения 15 выполнено построением всех объектов по одной подпоследовательности регуляризованных решений.

Проекция на граф-коэрцитивный предел

Граф-коэрцитивное описание [10, определения 12, 16] сформулируем на компакте $\mathcal{K}_T$, сохраняя возможную концентрацию на границе. В [10] меры заданы на $[0,T] \times \Omega$; условие перехода к этому пространству указано после доказательства. Пусть $(\mathcal{V}, \eta_{\mathrm{ent}}, \mu_{\mathrm{diss}})$ порожден одной последовательностью решений, а m – предел полной диссипации.

Положим

$$\eta_{\mathrm{ent}}^{[10]} = \eta_{\mathrm{ent}}, \qquad m^{[10]} = m \quad \text{на } \mathcal{K}_T. \tag{42}$$

Определение граф-коэрцитивной формулировки. Кортеж $\big(\nu, \eta, G, J_g, J_S, J_{\mathrm{def}}, \mu_g\big)$ называется граф-коэрцитивным мерозначным пределом на $\mathcal{K}_T$, если выполнены следующие условия.

(i) $\nu_{t,x} \in \mathcal{P}\big(\overline{D}\big)$ – слабо измеримое семейство; $\bar{u} = \langle \nu, a \rangle \in L^\infty(Q_T; \mathbb{R}^N)$, $\eta \in \mathcal{M}_+(\mathcal{K}_T)$ и $\eta \ge \langle \nu, h \rangle\, dxdt$.

(ii) $G \in L^2\big(Q_T; \mathcal{G}_Q\big)$, $J_g, J_S \in L^2(Q_T; \mathbb{R}^{N \times d})$, $J_{\mathrm{def}} = -\nabla \cdot J_S \in L^2(0,T; H^{-1})$. Баланс имеет вид (34) с $\bar{J} = J_g + J_S$ и $\bar{R} = \langle \nu, R \rangle$.

(iii) $\mu_g \in \mathcal{M}_+(\mathcal{K}_T)$, и для каждой неотрицательной $\zeta \in C_c^1([0,T))$ выполнено

$$-\int_{\mathcal{K}_T} \zeta'\, d\eta + c_0 \int_{Q_T} \zeta\, |G|^2\, dxdt + \int_{\mathcal{K}_T} \zeta\, d\mu_g \le E_0 \zeta(0) + C_R|\Omega| \int_0^T \zeta\, dt + C_R \int_{\mathcal{K}_T} \zeta\, d\eta.$$

Предел называется порожденным исчезающей регуляризацией, если для одной последовательности u^{λ_k} при $G_k = G_{\mathrm{Sh}}\big(u^{\lambda_k}, \nabla w^{\lambda_k}\big)$ выполнены следующие условия. Состояния порождают маргиналь ν, а энтропийные и полные диссипационные меры сходятся слабо-* к η, m. В L^2 выполняются слабые сходимости $G_k \rightharpoonup G$, $B(a_k)G_k \rightharpoonup J_g$, $S_{\mathrm{Sh}}(a_k)P\nabla w^{\lambda_k} \rightharpoonup J_S$. Временные производные сходятся слабо в $L^2(0,T;H^{-1})$, и выполнено $\mu_g = m - c_0|G|^2\, dxdt$.

Термин «граф-коэрцитивный» относится к оценке комбинации G. Сильная сходимость ∇w в определение не входит.

Обозначим маргиналь $\mathcal{V}$ по состоянию через

$$\nu = \mathcal{V} \circ \pi_a^{-1}. \tag{43}$$

Положим

$$G_{\mathrm{Sh}}^{[10]} = \langle \mathcal{V}, g \rangle, \tag{44}$$

$$J_g^{[10]} = \langle \mathcal{V}, B(a)g \rangle, \tag{45}$$

$$J_S^{[10]} = \big\langle \mathcal{V}, S_{\mathrm{Sh}}(a)^{1/2} z \big\rangle, \tag{46}$$

и

$$J_{\mathrm{def}}^{[10]} = -\nabla \cdot J_S^{[10]}. \tag{47}$$

Умножение $B(a)g$ понимается по столбцам. Так как $g \in E_Q^d$,

$$B(a)g = B_{QQ}(a)g + K_{\mathrm{Sh}}(a)^{\top} B_{QQ}(a)g.$$

Формулы проекции выведем из теорем 8 и 16, используя константу c_0 граф-коэрцитивной оценки [10].

Теорема 17 (Проекция на граф-коэрцитивную формулировку). Пусть $(\mathcal{V}, \eta_{\mathrm{ent}}, \mu_{\mathrm{diss}})$ – порождённый предел в смысле определений 14–15. Тогда кортеж $\big(\nu, \eta_{\mathrm{ent}}^{[10]}, G_{\mathrm{Sh}}^{[10]}, J_g^{[10]}, J_S^{[10]}, J_{\mathrm{def}}^{[10]}, \mu_{\mathrm{diss}}^{[10]}\big)$, заданный формулами (42)–(48), является порожденным граф-коэрцитивным мерозначным пределом на $\mathcal{K}_T$ в смысле данного выше определения, где

$$\mu_{\mathrm{diss}}^{[10]} = m^{[10]} - c_0 \left| G_{\mathrm{Sh}}^{[10]} \right|^2 dxdt \quad \text{на } \mathcal{K}_T. \tag{48}$$

Здесь c_0 – фиксированная константа граф-коэрцитивной оценки; можно выбрать $c_0 = \alpha_Q$. Верхний индекс $[10]$ обозначает компоненты граф-коэрцитивного описания.

Кроме того,

$$J_g^{[10]} + J_S^{[10]} = \langle \mathcal{V}, J_{\mathrm{Sh}}(a,g,z) \rangle. \tag{49}$$

В смысле конечных неотрицательных мер на $\mathcal{K}_T$ выполняется равенство

$$\mu_{\mathrm{diss}}^{[10]} = \mu_{\mathrm{diss}} + \mathcal{R}_{\mathrm{Sh}}\, dxdt, \tag{50}$$

где

$$\mathcal{R}_{\mathrm{Sh}} = \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}}(a,g,z) \rangle - c_0 |\langle \mathcal{V}, g \rangle|^2 \ge 0, \qquad \text{п.в. в } Q_T. \tag{51}$$

Доказательство. Применяя лемму 7 к линейной координате g с конечным вторым моментом, получаем

$$g_k \rightharpoonup \langle \mathcal{V}, g \rangle$$

в L^2, что дает (44). Отображения

$$(a, g, z) \mapsto B(a)g, \qquad (a, g, z) \mapsto S_{\mathrm{Sh}}(a)^{1/2} z$$

непрерывны и имеют линейный рост, поэтому по лемме 7 выполняются (45)–(46). При этом

$$S_{\mathrm{Sh}}(a_k)^{1/2} z_k = S_{\mathrm{Sh}}(a_k) P \nabla w^{\lambda_k},$$

так что $J_S^{[10]}$ совпадает с дефектным потоком из [10]. Равенство (47) выполнено по определению.

По формуле (11)

$$B(a)g + S_{\mathrm{Sh}}(a)^{1/2} z = J_{\mathrm{Sh}}(a, g, z),$$

откуда (49).

На всем компакте выполнено $m = \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}} \rangle \, dxdt + \mu_{\mathrm{diss}}$, поэтому подстановка в (48) дает (50) на $\mathcal{K}_T$.

При $P\Xi = 0$ нижняя граф-коэрцитивная оценка сводится к оценке блока B_{QQ}. Поэтому

$$g : B_{QQ}(a) g \geq c_0 |g|^2,$$

а следовательно,

$$D_{\mathrm{Sh}}(a, g, z) \geq c_0 |g|^2.$$

После усреднения относительно $\mathcal{V}$ и применения неравенства Йенсена

$$\langle \mathcal{V}, |g|^2 \rangle \geq |\langle \mathcal{V}, g \rangle|^2$$

получаем $\mathcal{R}_{\mathrm{Sh}} \geq 0$.

Проверим остальные условия определения. Слабая измеримость маргинали ν следует из слабой измеримости $\mathcal{V}$; ее барицентр и момент реакции совпадают с (30). Неравенство для η_{ent} установлено в предложении 10. Из (27), неравенства Йенсена и ограниченности коэффициентов получаем L^2-оценки трёх полей $G_{\mathrm{Sh}}^{[10]}, J_g^{[10]}, J_S^{[10]}$. Для дефекта баланса имеем $\| J_{\mathrm{def}}^{[10]} \|_{L^2(0,T;H^{-1})} \leq \| J_S^{[10]} \|_{L^2(Q_T)}$, а сам баланс следует из (34) и (49).

По оценке (23) временные производные сходятся вдоль подпоследовательности слабо в $L^2(0, T; H^{-1})$. В силу сходимости состояний в смысле распределений их предел равен $\partial_t \bar{u}$.

По (50)–(51) сумма $c_0 \left| G_{\mathrm{Sh}}^{[10]} \right|^2 dxdt + \mu_{\mathrm{diss}}^{[10]}$ равна $\langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}} \rangle \, dxdt + \mu_{\mathrm{diss}}$, поэтому (41) совпадает с энтропийным неравенством граф-коэрцитивной формулировки. Сходимость состояний и энтропийной меры уже установлена. Сходимость отдельных потоков следует из (29) и их равномерных L^2-оценок. Все компоненты получены вдоль одной подпоследовательности, что завершает доказательство.

Пространство предельных мер. Если дополнительно $\eta_{\mathrm{ent}}([0, T] \times \partial\Omega) = 0$, то ограничения мер на $[0, T] \times \Omega$ удовлетворяют определению граф-коэрцитивного предела в пространстве мер, принятом в [10]. При ограничении энтропийное слагаемое с временной производной не меняется, а удаляемая граничная часть диссипационного

дефекта неотрицательна. В общем случае проекция сохраняется на $\mathcal{K}_T$: граничную энтропийную меру нельзя отбросить, поскольку ζ' может менять знак.

Следствие 18 (Уточнение исходного дефекта). По равенству (50), доказанному в теореме 17, граф-коэрцитивный дефект [10] разлагается на остаточную меру μ_{diss} и плотность $\mathcal{R}_{\mathrm{Sh}}$, вычисляемую по совместной мере.

Замечание 19 (Структура явной плотности). Перепишем (51) в виде

$$\mathcal{R}_{\mathrm{Sh}} = c_0(\langle \mathcal{V}, |g|^2\rangle - |\langle \mathcal{V}, g\rangle|^2) + \mathcal{A}_Q + \mathcal{E}_P, \tag{52}$$

$$\mathcal{A}_Q = \langle \mathcal{V}, g\colon \left(B_{QQ}(a) - c_0 I_{E_Q}\right) g\rangle, \qquad \mathcal{E}_P = \langle \mathcal{V}, |z|^2\rangle.$$

Здесь I_{E_Q} – тождественный оператор на E_Q, действующий по столбцам. Все три слагаемых неотрицательны: первое определяется дисперсией g, второе – разностью между точной квадратичной формой и выбранной нижней оценкой, третье – диссипацией второго шуровского канала. Поэтому даже при дираковской совместной мере и нулевом остатке исходный дефект может быть положительным. В примере 21 такая ситуация возникает для решений регуляризованной задачи.

Критерий исчезновения остаточной меры

Критерий равномерной интегрируемости, примененный к двум шуровским каналам, вместе с (37)–(40) разделяет концентрационные остатки и регуляризационную диссипацию.

Определение равномерной интегрируемости. Семейство неотрицательных функций $f_k \in L^1(Q_T)$ называется равномерно интегрируемым, если

$$\lim_{M\to\infty} \sup_k \int_{\{f_k > M\}} f_k \; dxdt = 0.$$

На множестве конечной меры это условие равносильно равномерной ограниченности интегралов и их равномерной малости на множествах малой меры.

Теорема 20 (Разложение по каналам и отсутствие остаточной диссипации). Рассмотрим подпоследовательность теоремы 16 и положим

$$q_{Q,k} = g_k\colon B_{QQ}(a_k) g_k, \qquad q_{P,k} = |z_k|^2, \qquad r_k = \lambda_k P\nabla w^{\lambda_k}\colon AP\nabla w^{\lambda_k}. \tag{53}$$

После перехода к подпоследовательности существуют слабые-* пределы мер $q_{Q,k}\,dxdt \rightharpoonup^* m_Q$, $q_{P,k}\,dxdt \rightharpoonup^* m_P$ и $r_k\,dxdt \rightharpoonup^* \rho$ на $\mathcal{K}_T$. При этом

$$c_Q = m_Q - \langle \mathcal{V}, g\colon B_{QQ}(a) g\rangle\, dxdt \geq 0, \qquad c_P = m_P - \langle \mathcal{V}, |z|^2\rangle\, dxdt \geq 0, \tag{54}$$

$$\mu_{\mathrm{diss}} = c_Q + c_P + \rho. \tag{55}$$

Соотношения (54) и (55) понимаются в смысле конечных мер. Меры c_Q, c_P описывают концентрационные остатки каналов, не выражаемые вторыми моментами обычной меры Юнга, а ρ – остаток регуляризационной диссипации. На исходной подпоследовательности теоремы 16 положим $F_k = |g_k|^2 + |z_k|^2$. Равенство $\mu_{\mathrm{diss}} = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда одновременно выполнены два условия:

$$\lim_{M\to\infty} \sup_k \int_{\{F_k > M\}} F_k \; dxdt = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{Q_T} r_k \; dxdt = 0. \tag{56}$$

В силу (14) второе условие равносильно сильной L^2-сходимости $\sqrt{\lambda_k} P\nabla w^{\lambda_k} \to 0$. Дираковость $\mathcal{V}$ не требуется; замыкание потока из этого критерия не следует.

Доказательство. По (19) массы трех неотрицательных мер ограничены. Слабая-* компактность на $\mathcal{K}_T$ дает указанные пределы. Применяя к двум первым

подынтегральным функциям непрерывные усечения, как в лемме 11, получаем (54). Из $m = m_Q + m_P + \rho$ и (40) следует (55).

Докажем эквивалентность (56). Положим $q_k = q_{Q,k} + q_{P,k}$ и $E = \int_{Q_T} \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}} \rangle \, dxdt$.

Пусть $\mu_{\mathrm{diss}} = 0$. Применяя слабую-* сходимость полной меры к единичной функции, получаем $\int (q_k + r_k) \to E$. Для усечений $q_k^M = \min\{q_k, M\}$ по определению порождения имеем $\int q_k^M \to E_M$, где $E_M = \int \langle \mathcal{V}, \min\{D_{\mathrm{Sh}}, M\} \rangle$ и $E_M \uparrow E$. Поскольку $q_k - q_k^M \geq 0$ и $r_k \geq 0$,

$$\limsup_{k\to\infty} \left[\int_{Q_T} (q_k - M)_+ \, dxdt + \int_{Q_T} r_k \, dxdt \right] = E - E_M \to 0.$$

Здесь $(s)_+ = \max\{s, 0\}$. Отсюда следует $\int r_k \to 0$ и равномерная интегрируемость q_k. Действительно, на множестве $\{q_k > 2M\}$ выполнено $q_k \leq 2(q_k - M)_+$, а каждая из конечного числа оставшихся функций интегрируема. Неравенства $c(|g_k|^2 + |z_k|^2) \leq \leq q_k \leq C(|g_k|^2 + |z_k|^2)$ с фиксированными $0 < c \leq C$ следуют из (2) и ограниченности B_{QQ}. Поэтому квадраты структурных переменных также равномерно интегрируемы.

Обратно, из этих неравенств и первого условия (56) следует равномерная интегрируемость q_k. Применяя определение порождения и усечения, получаем $q_k \rightharpoonup \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}} \rangle$ в $L^1(Q_T)$. В качестве пробных функций можно взять ограничения на Q_T непрерывных функций на $\mathcal{K}_T$, поэтому граничного остатка у предельных мер нет. Из $\int r_k \to 0$ и $r_k \geq 0$ следует исчезновение регуляризационной меры. Значит, $m = \langle \mathcal{V}, D_{\mathrm{Sh}} \rangle \, dxdt$, то есть $\mu_{\mathrm{diss}} = 0$.

В частности, сильная сходимость обеих структурных переменных в L^2 и исчезновение регуляризационной диссипации достаточны для отсутствия остатка. При этом положительная мера $\mu_{\mathrm{diss}}^{[10]}$ определяется явной плотностью (52) и не обязательно связана с концентрацией. Рассмотрим такое семейство решений.

Пример 21 (Положительный граф-коэрцитивный дефект при нулевом остатке). Возьмём $N = 3$, $d = 1$, $\Omega = (0, \pi)$, $D = (-1,1)^3$ и $R = 0$. Выберем барьерную энтропию, которая совпадает с квадратичной во всей области значений строящихся решений. При $\theta = 1/2$ положим

$$h(u) = \textstyle\sum_{i=1}^3 f(u_i), \qquad f(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{(s-\theta)_+^4}{1-s} + \frac{(-s-\theta)_+^4}{1+s}, \qquad -1 < s < 1. \tag{57}$$

Функция $f \in C^3(-1,1)$ строго выпукла, $f'' \geq 1$, $f(s) \to +\infty$ при $s \to \pm 1$ и $f'^{(s)} = = s$ на $[-\theta, \theta]$. Для проверки выпуклости заметим, что функция $t^4/(a-t)$ при $0 \leq t < < a$ имеет неотрицательную вторую производную, а ее продолжение нулем на $t < 0$ трижды непрерывно дифференцируемо в нуле.

Кроме того, f' отображает интервал $(-1,1)$ на $\mathbb{R}$. Для обратной функции выполнены $|((f')^{-1})'| = 1/f'' \leq 1$ и $|((f')^{-1})''| = |f'''|/(f'')^3 \leq C$. Последнее отношение ограничено на компактных подмножествах интервала и стремится к нулю на его концах: f'' имеет порядок $(1 - |s|)^{-3}$, а $|f'''|$ – порядок $(1 - |s|)^{-4}$. Таким образом, выполнены все предположения об энтропии.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \mathrm{diag}(1,0,0), \qquad P = A = \mathrm{diag}(0,1,1). \tag{58}$$

Матрица B симметрична, неотрицательна и имеет ядро $\mathrm{span}\{e_3\}$. Так как $B_{QQ} = 2I_{E_Q}$, можно выбрать $\alpha_Q = c_0 = 2$. Для $p = (0, p_2, p_3)$ имеем $K_{\mathrm{Sh}} p = (p_2/2, 0, 0)$ и $S_{\mathrm{Sh}} p = (0, p_2/2, 0)$. Здесь e_i – стандартные координатные векторы. В третьем направлении нерегуляризованная подвижность равна нулю.

Выберем $0 < \varepsilon < \theta/\sqrt{2}$, $v_0 = \varepsilon(0,1,1)^\top$ и одинаковые начальные данные $u_0^\lambda(x) = v_0 \cos x$. Для всех $\lambda \in (0,1]$ определим

$$v^\lambda(t) = \exp[-t(B+\lambda P)]v_0, \qquad u^\lambda(t,x) = v^\lambda(t)\cos x. \tag{59}$$

Матричная экспонента определяется рядом $\exp M = \sum_{j=0}^{\infty} M^j/j!$. Матрица $B + \lambda P$ симметрична и неотрицательна, поэтому $\left|v^\lambda(t)\right| \le |v_0| < \theta$. Все компоненты u^λ остаются в области, где энтропия квадратична и $w^\lambda = u^\lambda$. Подставляя (59) в уравнение, получаем $\partial_t u^\lambda = (B+\lambda P)\,\partial_{xx} u^\lambda$, то есть (1) при $R = 0$. Производная по x равна нулю при $x = 0, \pi$, что обеспечивает условие нулевого потока. Начальные данные гладкие и энтропийно согласованы. Умножив уравнение на u^λ, получаем точный энтропийный баланс

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega h\left(u^\lambda\right) dx + \int_\Omega \left(2|G_\lambda|^2 + |Z_\lambda|^2 + \lambda\left|P\,\partial_x u^\lambda\right|^2\right) dx = 0.$$

Следовательно, семейство (59) удовлетворяет предположениям теоремы 16.

При $\lambda \downarrow 0$ функции v^λ и их производные равномерно сходятся на $[0,T]$ к $v(t) = \exp(-tB)v_0$. Поэтому $u^\lambda \to u = v(t)\cos x$ вместе с пространственными градиентами. Это семейство порождает совместную меру $\mathcal{V}_{t,x} = \delta_{(u,G,Z)}$, где

$$G(t,x) = -\left(v_1(t) + 1/2\, v_2(t)\right)\sin x\, e_1, \qquad Z(t,x) = -1/\sqrt{2}\, v_2(t)\sin x\, e_2. \tag{60}$$

Оба канала отличны от нуля на множествах положительной меры: при $t = 0$ их амплитуды равны $\varepsilon/2$ и $\varepsilon/\sqrt{2}$. Кроме того,

$$v_2(t) = \varepsilon e^{-3t/2}\left[\cosh\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\sinh\left(\frac{\sqrt{5}\,t}{2}\right)\right] > 0.$$

Структурные переменные сильно сходятся в L^2 и равномерно ограничены. Поскольку $\int_{Q_T} \lambda\left|P\,\partial_x u^\lambda\right|^2 dxdt \le C_T\lambda \to 0$, по теореме 20 имеем $\mu_{\text{diss}} = 0$. Энтропийная мера равна $h(u)\,dxdt$, полная диссипация – $(2|G|^2 + |Z|^2)\,dxdt$. Из (50) и (52) получаем

$$\mu_{\text{diss}}^{[10]} = |Z|^2\,dxdt = 1/2\, v_2(t)^2 \sin^2 x\, dxdt \neq 0, \qquad \mu_{\text{diss}} = 0. \tag{61}$$

В этом семействе граф-коэрцитивный дефект целиком определяется диссипацией второго шуровского канала при отсутствии концентрационных и регуляризационных потерь. Оба канала восстанавливаются из кортежа [10]: состояние задаётся его дираковской маргиналью, граф-градиент сохранен отдельно, а вторая структурная переменная выражается через второй поток. Таким образом, пример показывает разделение дефекта, но не устанавливает неинъективности проекции.

Теорема 20 характеризует отсутствие остатка через порождающую последовательность. Теперь оценим остаток по предельным объектам с помощью относительной диссипации.

Следствие 22 (Относительная диссипация). Пусть $(\mathcal{V}, \eta_{ent}, \mu_{diss})$ – порожденный предел в смысле определений 14–15, ν – его маргиналь состояния, $\bar{J}$ – полный поток и m – полная диссипационная мера. Для ограниченного измеримого поля сравнения $\Xi: Q_T \to \mathbb{R}^{N\times d}$ определим относительную диссипационную меру

$$\mathcal{R}_\Xi = m + \left(\langle \nu, \Xi : B(a)\Xi\rangle - 2\bar{J} : \Xi\right) dx\, dt. \tag{62}$$

Плотности в этой формуле продолжены нулем вне Q_T. Положим $g_\Xi(a) = G_{Sh}(a,\Xi)$, $z_\Xi(a) = Z_{Sh}(a,\Xi)$ и введем неотрицательную функцию

$$r_{\Xi}(a,g,z) = [g - g_{\Xi}(a)]: B_{QQ}(a)[g - g_{\Xi}(a)] + |z - z_{\Xi}(a)|^2.$$

Тогда на всем компакте $\mathcal{K}_T$ выполняется точное равенство

$$\mathcal{R}_{\Xi} = \mu_{diss} + \langle \mathcal{V}, r_{\Xi} \rangle \, dx \, dt \geq 0. \tag{63}$$

В частности, при $c_* = \min\{\alpha_Q, 1\}$ и $\delta_{\Xi} = \mathcal{R}_{\Xi}(\mathcal{K}_T)$ имеем

$$\mu_{diss}(\mathcal{K}_T) + c_* \int_{Q_T} \langle \mathcal{V}, |g - g_{\Xi}(a)|^2 + |z - z_{\Xi}(a)|^2 \rangle \, dx \, dt \leq \delta_{\Xi}. \tag{64}$$

Равенство $\delta_{\Xi} = 0$ равносильно одновременному выполнению $\mu_{diss} = 0$ и

$$\langle \mathcal{V}, F \rangle = \int_{\overline{D}} F\left(a, G_{Sh}(a,\Xi), Z_{Sh}(a,\Xi)\right) dv(a) \tag{65}$$

для каждой ограниченной непрерывной функции F и почти всех $(t,x) \in Q_T$. Дираковость маргинали состояния при этом не требуется.

Доказательство. Из определений структурных переменных и факторизации (8) следует

$$r_{\Xi}(a,g,z) = D_{Sh}(a,g,z) - 2J_{Sh}(a,g,z): \Xi + \Xi: B(a)\Xi.$$

Усредним это тождество по $\mathcal{V}$ и воспользуемся (30), (40). Получим (63), включая возможную массу на границе, поскольку все добавленные плотности сосредоточены в Q_T. Нижняя оценка (2) даёт

$$r_{\Xi} \geq c_*(|g - G_{Sh}(a,\Xi)|^2 + |z - Z_{Sh}(a,\Xi)|^2),$$

откуда после интегрирования следует (64). При $\delta_{\Xi} = 0$ неотрицательные слагаемые в (63) обращаются в нуль. Следовательно, для почти всех (t,x) мера $\mathcal{V}_{t,x}$ сосредоточена на графике $a \mapsto \left(G_{Sh}(a,\Xi), Z_{Sh}(a,\Xi)\right)$, что и означает (65). Обратное утверждение получается непосредственной подстановкой в (63).

Величина δ_{Ξ} определяется полем сравнения и объектами $\nu, \overline{J}, m$, сохраняемыми при проекции: $\overline{J} = J_g^{[10]} + J_S^{[10]}$, а $m = \mu_{diss}^{[10]} + c_0 \left|G_{Sh}^{[10]}\right|^2 dx \, dt$. Оценка (64) тем самым контролирует остаток по предельным величинам без проверки квадратичных хвостов порождающей последовательности. При $\delta_{\Xi} = 0$ формула (65) выражает обе структурные переменные через состояние и поле сравнения. Поле Ξ может не быть градиентом, поэтому замыкание потока через барицентр состояния из этого условия не следует. Условие $\delta_{\Xi} = 0$ требует отдельного обоснования сверх исходных энергетических оценок.

Пример 23 (Отсутствие остатка без полного градиента). Сохраним матрицы, энтропию и число ε из примера 21. Пусть $r \in L^{\infty}(0,\pi)$ и $|r| \leq 1$. Через H_s обозначим оператора решения скалярного уравнения теплопроводности с нулевой нормальной производной за время s. В ортонормированном косинусном базисе он задается формулой:

$$H_s r = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 s} \, r_n e_n, \;\; r_n = \int_0^{\pi} r \, e_n \, dx,$$

$$e_0 = \pi^{-1/2}, \qquad e_n = (2/\pi)^{1/2} \cos(nx) \quad (n \geq 1).$$

Оператор H_s сохраняет константы и неотрицательность; поэтому $\| H_s r \|_{\infty} \leq \| r \|_{\infty}$. При $s > 0$ функция $H_s r$ гладкая, а при $s \downarrow 0$ она сходится к r в L^2. Гладкость и сильная непрерывность следуют из косинусного ряда, а сохранение неотрицательности и оценка в L^{∞} – из принципа максимума.

Пусть $v_1^{\lambda}, v_2^{\lambda}$ – первые две компоненты вектора из (59). Положим

$$u^{\lambda}(t,x)=\Big(v_1^{\lambda}(t)\cos x, v_2^{\lambda}(t)\cos x, \varepsilon H_{\lambda(t+1)}r(x)\Big). \tag{66}$$

Все компоненты остаются в квадратичной части энтропии, так что $w^{\lambda}=u^{\lambda}$. Первые две удовлетворяют той же системе, что и в примере 21, а третья – уравнению $\partial_t u_3^{\lambda}=\lambda\,\partial_{xx}u_3^{\lambda}$. Условия нулевого потока выполнены для всех трех компонент. Начальные данные $u_0^{\lambda}=(0,\varepsilon\cos x,\varepsilon H_{\lambda}r)$ принадлежат H^1, сходятся в L^2 к $u_0=(0,\varepsilon\cos x,\varepsilon r)$ и согласованы по энтропии. Следовательно, (66) задает семейство решений регуляризованной задачи.

Положим $\|\cdot\|_2=\|\cdot\|_{L^2(0,\pi)}$. Диссипативное тождество тепловой полугруппы имеет вид

$$\lambda\int_{Q_T}\left|\partial_x u_3^{\lambda}\right|^2\,dx\,dt=\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\|\,H_{\lambda}r\,\|_2^2-\|\,H_{\lambda(T+1)}r\,\|_2^2\right)\to 0. \tag{67}$$

Дифференцирование квадрата L^2-нормы косинусного ряда при положительном времени и последующее интегрирование дают (67). Правая часть стремится к нулю по сильной непрерывности H_s. Регуляризационная диссипация второй компоненты также исчезает по оценке из примера 21.

Первые две компоненты сходятся равномерно вместе с пространственными производными. Сильная непрерывность H_s при нуле дает сходимость третьей компоненты в $C([0,T];L^2)$, поскольку $\lambda\le\lambda(t+1)\le\lambda(T+1)$. Поэтому

$$u(t,x)=\big(v_1(t)\cos x, v_2(t)\cos x, \varepsilon r(x)\big),\ \ \mathcal{V}_{t,x}=\delta_{(u(t,x),G(t,x),Z(t,x))}. \tag{68}$$

Здесь G,Z совпадают с (60): третья компонента не влияет на граф-градиент, а дополнение Шура обращается в нуль на третьем координатном направлении. Структурные переменные регуляризованных решений сходятся к ним сильно в L^2 и равномерно ограничены. Вместе с (67) это даёт $m=(2|G|^2+|Z|^2)\,dx\,dt$. Состояния сходятся сильно в L^2 и остаются в квадратичной части энтропии, поэтому энтропийная мера равна $h(u)\,dx\,dt$.

Выберем ограниченное поле $\Xi=(-v_1\sin x,-v_2\sin x,0)^{\top}$. Тогда $G_{Sh}(a,\Xi)=G$, $Z_{Sh}(a,\Xi)=Z$, $\overline{J}=B\Xi$ и $\Xi{:}\,B\Xi=2|G|^2+|Z|^2$. Следовательно, $\delta_{\Xi}=0$, и из следствия 22 получаем $\mu_{diss}=0$ и представление (65). Граф-коэрцитивный дефект равен $|Z|^2\,dx\,dt$ и положителен.

Если r – индикатор интервала $(0,\pi/2)$, предельное состояние не принадлежит $H^1(0,\pi;\mathbb{R}^3)$ ни при одном положительном времени: третья компонента сохраняет скачок. Следовательно, отсутствие остатка совместимо с отсутствием полного пространственного градиента у предела.

Априорная оценка сходимости регуляризации

Рассмотрим нелинейную подвижность, зависящую от разрывной компоненты в ядре. Оценим относительную диссипацию регуляризованных решений, существование которых следует из [10]. Энергетическое сравнение активных компонент и свойства тепловой полугруппы позволят получить (77) из начальных данных и ограниченности градиентов активных компонент решения сравнения.

Пусть $N=3$. Введем постоянную замену координат и энтропию:

$$\begin{gathered}\mathsf{L}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad (q_1,q_2,r)^{\top}=\mathsf{L}u,\\ D=\mathsf{L}^{-1}(-1,1)^3,\qquad h(u)=\textstyle\sum_{i=1}^{3} f\left((\mathsf{L}u)_i\right),\end{gathered} \tag{69}$$

где f определена в (57). Для $s \in [-1,1]^3$ зададим функции b_i, F_i, непрерывно дифференцируемые в окрестности куба. Предположим, что $0 < \beta \le b_i \le \overline{\beta}$ и

$$\sum_{i=1}^{2} f'(s_i) F_i(s) \le C_R \left(1 + \sum_{j=1}^{3} f\left(s_j\right)\right) \quad \text{при } s \in (-1,1)^3.$$

При некотором $0 < k < \theta$ потребуем условия сохранения куба:

$$F_i(s) \le 0 \text{ при } s_i = k, \qquad F_i(s) \ge 0 \text{ при } s_i = -k, \qquad |s_j| \le k, \quad i = 1,2.$$

Положим

$$\begin{gathered} B(u) = \mathsf{L}^{-1}\mathrm{diag}(b_1(\mathsf{L}u), b_2(\mathsf{L}u), 0)\mathsf{L}^{-\top}, \\ R(u) = \mathsf{L}^{-1}(F_1(\mathsf{L}u), F_2(\mathsf{L}u), 0)^{\top}, \\ A = \mathsf{L}^{-1}\mathrm{diag}(0, a_2, a_3)\mathsf{L}^{-\top}, \qquad 0 < \gamma_0 \le a_2, a_3 \le \gamma_1. \end{gathered} \tag{70}$$

Векторы $n = (1,1,0)^{\top}/\sqrt{2}$ и $\tau = (-1,1,0)^{\top}/\sqrt{2}$ задают проекторы $Q = nn^{\top}$, $P = I - Q$. Здесь $A = PAP$, а на E_P её собственные значения равны $2a_2, a_3$. Непосредственное вычисление даёт

$$B_{QQ} = 1/2\, b_1 I_{E_Q}, \qquad K_{Sh} p = -(p \cdot \tau) n, \qquad S_{Sh} = 2 b_2 \tau\tau^{\top}. \tag{71}$$

Энтропия (69) удовлетворяет общим предположениям: её градиент обратим как композиция обратимых линейных отображений и покомпонентного отображения f', а оценки производных обратного отображения следуют из свойств f, проверенных в примере 21. Матрица B неотрицательна и имеет постоянное ядро $\mathrm{span}\{e_3\}$; коэрцитивный блок имеет нижнюю границу $\beta/2$.

Теорема 24 (Сходимость при частичной пространственной регулярности). Пусть $r_0 \in L^{\infty}(\Omega)$, $|r_0| \le k$, а $q = (q_1, q_2)$ – ограниченное значениями в $[-k,k]^2$ решение

$$\partial_t q_i - \nabla \cdot (b_i(q, r_0) \nabla q_i) = F_i(q, r_0), \qquad i = 1,2, \tag{72}$$

с нулевым нормальным потоком и начальным состоянием q_0. Предполагается $q \in L^2(0,T;H^1)$, $\partial_t q \in L^2(0,T;H^{-1})$ и $\nabla q \in L^{\infty}(Q_T)$. Через H_s обозначим оператора решения скалярного уравнения теплопроводности с условием Неймана на Ω за время s, то есть тепловую полугруппу. Возьмем начальные данные регуляризации

$$u_0^{\lambda} = \mathsf{L}^{-1}\left(q_{1,0}^{\lambda}, q_{2,0}^{\lambda}, H_{a_3\lambda} r_0\right)^{\top},$$

где $q_0^{\lambda} \in H^1(\Omega; [-k,k]^2)$ и $q_0^{\lambda} \to q_0$ в L^2. Эти данные принадлежат H^1 и согласованы по энтропии: они остаются в кубе, где h квадратична, и сходятся в L^2. Для $u = \mathsf{L}^{-1}(q_1, q_2, r_0)^{\top}$ положим

$$\begin{gathered} \Xi = \mathsf{L}^{\top}(\nabla q_1, \nabla q_2, 0)^{\top}, \\ G = \sqrt{2}\, n \otimes \nabla q_1, \qquad Z = \sqrt{b_2(q, r_0)}\, \tau \otimes \nabla q_2. \end{gathered} \tag{73}$$

Обозначим $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ и

$$\begin{gathered} \omega_r(s) = \sup_{0 \le \sigma \le s} \| H_\sigma r_0 - r_0 \|_2, \qquad s_\lambda = \gamma_1 \lambda (T+1), \\ \mathcal{E}_\lambda = \| q_0^{\lambda} - q_0 \|_2^2 + \omega_r(s_\lambda)^2 + \lambda^2. \end{gathered} \tag{74}$$

Тогда для любых соответствующих решений теоремы 5 выполнено

$$\sup_{0 \le t \le T} \| u^{\lambda}(t) - u(t) \|_2^2 + \| G_\lambda - G \|_{L^2(Q_T)}^2 + \| Z_\lambda - Z \|_{L^2(Q_T)}^2 \le C \mathcal{E}_\lambda. \tag{75}$$

Константа зависит от T, области, k, границ коэффициентов и их первых производных, γ_0, γ_1 и $\| \nabla q \|_\infty$, но не зависит от λ и производных r_0. Оба нерегуляризованных шуровских потока сходятся сильно в L^2. Для полной регуляризационной энергии имеем

$$\rho_\lambda = \lambda \int_{Q_T} P\, \nabla w^\lambda : AP \nabla w^\lambda \, dxdt \le C\lambda + 1/2 \left(\| H_{a_3 \lambda} r_0 \|_2^2 - \| H_{a_3 \lambda (T+1)} r_0 \|_2^2 \right) \le$$

$$\le C\lambda + \| r_0 \|_2 \, \omega_r(s_\lambda) \to 0. \tag{76}$$

Неотрицательная величина

$$\mathfrak{d}_\lambda = \rho_\lambda + \int_{Q_T} r_\Xi \left(u^\lambda, G_\lambda, Z_\lambda \right) dxdt$$

удовлетворяет оценке

$$0 \le \mathfrak{d}_\lambda \le C(\mathcal{E}_\lambda + \lambda) + \| r_0 \|_2 \, \omega_r(s_\lambda) \to 0. \tag{77}$$

Здесь r_Ξ – функция следствия 22. Каждый порожденный предел имеет вид

$$\mathcal{V}_{t,x} = \delta_{(u,G,Z)}, \qquad \eta_{ent} = h(u)\, dxdt, \qquad \mu_{diss} = 0, \qquad \delta_\Xi = 0. \tag{78}$$

Он не зависит от подпоследовательности и выбора a_2, a_3 в указанных пределах. Решение (72) единственно среди ограниченных тем же кубом решений с активными компонентами в $L^2(0,T;H^1)$ и временными производными в $L^2(0,T;H^{-1})$, если существует решение сравнения с указанной ограниченностью градиентов.

Доказательство. В координатах (69) диффузионная часть диагональна. Выбирая отклонение от куба $[-k,k]^3$ в качестве пробной функции, получаем неотрицательный диффузионный член. Условия на F_i и их липшицевость позволяют оценить реакционное слагаемое через квадрат расстояния до куба. По неравенству Гронуолла решения остаются в кубе. В частности, $f'(q_i^\lambda) = q_i^\lambda$ и $f'(r^\lambda) = r^\lambda$, поэтому

$$\partial_t q_1^\lambda - \nabla \cdot \left(b_1(q^\lambda, r^\lambda) \nabla q_1^\lambda \right) = F_1(q^\lambda, r^\lambda),$$

$$\partial_t q_2^\lambda - \nabla \cdot \left(\left(b_2(q^\lambda, r^\lambda) + \lambda a_2 \right) \nabla q_2^\lambda \right) = F_2(q^\lambda, r^\lambda),$$

$$r^\lambda(t) = H_{a_3 \lambda (t+1)} r_0.$$

Пусть $e = q^\lambda - q$. Вычтем (72) и выберем e в качестве пробной функции в уравнении для разности. Это допустимо в силу указанной регулярности в двойственной паре. Из коэрцитивности, липшицевости коэффициентов и ограниченности ∇q следует

$$\frac{d}{dt} \| e \|_2^2 + \beta \| \nabla e \|_2^2 \le C \| e \|_2^2 + C \| r^\lambda - r_0 \|_2^2 + C\lambda^2.$$

Слагаемое с разностью коэффициентов оценивается через $\| \nabla q \|_\infty \left(\| e \|_2 + \| r^\lambda - r_0 \|_2 \right) \| \nabla e \|_2$, а регуляризующее слагаемое – через $\lambda a_2 \| \nabla q_2 \|_2 \| \nabla e_2 \|_2$. По неравенству Юнга эти слагаемые поглощаются половиной диссипации. Применяя неравенство Гронуолла, получаем

$$\sup_t \| e(t) \|_2^2 + \int_{Q_T} |\nabla e|^2 \, dxdt \le C \mathcal{E}_\lambda.$$

Формула (71) дает $G_\lambda = \sqrt{2}\, n \otimes \nabla q_1^\lambda$ и $Z_\lambda = \sqrt{b_2(q^\lambda, r^\lambda)}\, \tau \otimes \nabla q_2^\lambda$. Квадратный корень липшицев на $[\beta, \overline{\beta}]$, поэтому последняя оценка вместе с формулой для r^λ доказывает (75). Предельные потоки равны $b_1\, e_1 \otimes \nabla q_1$ и $\sqrt{2}\, b_2\, \tau \otimes \nabla q_2$; их сильная сходимость следует из той же оценки и ограниченности градиентов предела.

В новых координатах регуляризационная энергия равна $\lambda\int\left(a_2\left|\nabla q_2^{\lambda}\right|^2+\right.$ $\left.+a_3\left|\nabla r^{\lambda}\right|^2\right)$. Первое слагаемое не превосходит $C\lambda$. Для второго слагаемого используем диссипативное тождество тепловой полугруппы; оно дает оценку (76). Это слагаемое не превосходит $\| r_0 \|_2\, \omega_r(s_\lambda)$ в силу сжимаемости полугруппы и формулы разности квадратов норм. Кроме того,

$$r_{\Xi}\left(u^{\lambda}, G_{\lambda}, Z_{\lambda}\right) = b_1\left(q^{\lambda}, r^{\lambda}\right)|\nabla e_1|^2 + b_2\left(q^{\lambda}, r^{\lambda}\right)|\nabla e_2|^2,$$

что доказывает (77). Поскольку состояния сходятся сильно в L^2, а Ξ ограничено, раскрытие квадрата в следствии 22 дает $\delta_{\Xi} = \lim\mathfrak{d}_{\lambda} = 0$ для каждого порожденного предела. По (63)–(65) остаток равен нулю. Сильная сходимость состояния и каналов определяет совместную меру; энтропия на кубе квадратична, откуда формула для η_{ent}. Ее равномерно ограниченные плотности исключают граничную энтропийную массу, поэтому условие ограничения мер после теоремы 17 в этом классе выполнено. Все пределы в (78) определены q, r_0 и не зависят от a_2, a_3.

Для доказательства единственности сравним другое решение (72) с q. При $\lambda = 0$, одинаковом r_0 и нулевой начальной разности та же энергетическая оценка дает $\| e(t) \|_2^2 = 0$. Пространственный градиент r_0 при этом не используется.

Пример 25 (Нелинейная подвижность, зависящая от разрывного профиля). Возьмем $\Omega = (0, \pi)$, $k = 1/4$, $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho < k/2$ и $0 < \eta \le 1/4$. Положим $E_{\varepsilon} = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, $\beta_1 = 2, \beta_2 = 1$ и

$$\begin{aligned} b_i(s) &= \beta_i + s_1^2 + s_2^2 + \eta s_3, \\ F_i(s) &= \chi(s_i) s_i\left(4\beta_i + 4\eta s_3 - 8E_{\varepsilon} + 12(s_1^2 + s_2^2)\right), \qquad i = 1,2. \end{aligned} \tag{79}$$

Здесь $\chi \in C_c^{\infty}(-k, k)$, $0 \le \chi \le 1$ и $\chi = 1$ при $|s| \le \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Для каждого $i = 1,2$ функция F_i равна нулю на гранях $s_i = \pm k$, а ее носитель по s_i отделен от концов $(-1,1)$. Поэтому величины $f'(s_i)F_i(s)$ ограничены и общее энтропийное условие выполнено. Коэффициенты b_i положительны на всем замкнутом кубе $[-1,1]^3$.

Зададим

$$q_i(x) = \varepsilon_i \cos(2x),\ r_0(x) = \rho\, \mathrm{sgn}(\cos x),\ u(x) = \mathsf{L}^{-1}\left(q_1(x), q_2(x), r_0(x)\right)^{\mathsf{T}}. \tag{80}$$

Значение знака в точке $\pi/2$ несущественно. На каждой стороне этой точки вычисление даёт

$$\partial_x\left(b_i(q, r_0)\, \partial_x q_i\right) = -q_i\left(4\beta_i + 4\eta r_0 - 8E_{\varepsilon} + 12(q_1^2 + q_2^2)\right) = -F_i(q, r_0).$$

При $x = 0, \pi/2, \pi$ обе производные q_i' равны нулю. Поэтому потоки непрерывны через скачок, граничные потоки нулевые, а (80) является стационарным слабым решением (72) с ограниченными активными градиентами. В исходных координатах

$$B(u) = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 & 0 \\ -b_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Недиагональные коэффициенты матрицы зависят от обеих активных компонент и разрывного профиля r_0, который входит также в реакционный член. Для начальных данных теоремы 24 с $q_0^{\lambda} = q$ существуют регуляризованные решения, сходящиеся к (80).

Для этого семейства оценки можно уточнить до

$$\sup_t \| u^{\lambda}(t) - u \|_2^2 + \| G_{\lambda} - G \|_{L^2(Q_T)}^2 + \| Z_{\lambda} - Z \|_{L^2(Q_T)}^2 \le C\sqrt{\lambda},$$

$$\rho_\lambda + \mathfrak{d}_\lambda \le C\sqrt{\lambda}. \tag{81}$$

Действительно, в косинусном базисе примера 23 коэффициенты профиля равны

$$r_n = \langle r_0, e_n\rangle = 2\rho\sqrt{2/\pi}\,\frac{\sin(n\pi/2)}{n} \quad (n \ge 1), \qquad \langle r_0, e_0\rangle = 0. \tag{82}$$

Для $0 < s \le 1$ разобьём сумму при $n = s^{-1/2}$. С учетом неравенства $1 - e^{-y} \le \le \min(1, y)$ получим $\omega_r(s)^2 \le C\rho^2\sqrt{s}$. Аналогичное разбиение при $n = \lambda^{-1/2}$ в разности квадратов норм из (76) ограничивает тепловую часть регуляризационной энергии величиной $C_T\rho^2\sqrt{\lambda}$. Оценка (75) и доказательство (77) теперь дают (81).

В этом примере $u \notin H^1(0,\pi;\mathbb{R}^3)$, обе шуровские переменные сходятся сильно, а остаток равен нулю. Граф-коэрцитивный дефект положителен на множестве положительной меры, поскольку его явная плотность содержит $b_2(q, r_0)|q_2'|^2$. Отсутствие остатка следует из априорных оценок регуляризованных решений.

Обсуждение

Разложение (50) уточняет смысл диссипационного дефекта при анализе регуляризации вырожденной модели. Его положительность может быть обусловлена диссипацией второго шуровского канала даже при сильной сходимости структурных переменных. Поэтому граф-коэрцитивный дефект [10] сам по себе не характеризует концентрации. Остаточная мера описывает часть диссипации, не представленную моментами каналов; теорема 20 разделяет в ней концентрационные и регуляризационные вклады.

Для потока и плотности диссипации достаточно парных распределений состояния с каждым каналом, а оценка (64) определяется величинами кортежа [10]. В классе теоремы 24 второй канал восстанавливается из второго потока по формулам (71), (73): $J_S^{[10]} = \sqrt{2b_2(q, r_0)}\,Z$. Оценки (75)–(77) позволяют априорно исключить остаток при ограниченности градиентов активных компонент решения сравнения; пространственный градиент профиля в ядре не требуется. В примере 25 этот профиль влияет на нелинейную подвижность, и оценки дают скорость (81).

В отличие от результатов [11, 13], сформулированных относительно регулярного полного состояния, теорема 24 допускает разрывную компоненту в ядре. В [14] скорость сходимости связана с переходами гладкого решения сравнения к границам симплекса. Здесь она определяется тепловым сглаживанием профиля в постоянном ядре.

Общая конструкция относится к порожденным пределам: пространственная совместимость обеспечивается определением 15, а моментное представление потока не предполагает замыкания через барицентр. Единственность и независимость предела от выбора регуляризации в указанном семействе установлены для класса теоремы 24. В нем ранг дополнения Шура постоянен, тогда как общая конструкция допускает его изменение. Переход к пространству мер [10] обоснован при выполнении условия на граничную энтропийную массу, указанного после теоремы 17.

Заключение

Для вырожденных систем с фиксированным дефектным подпространством построено совместное мерозначное описание обоих шуровских каналов. Оно дает точное разложение граф-коэрцитивного дефекта на явную плотность и остаточную меру. Получены критерий исчезновения остатка и количественная оценка через относительную диссипацию.

Для нелинейного трехкомпонентного класса с постоянным ядром доказаны априорные оценки сходимости состояния и обоих каналов при ограниченности градиентов активных компонент решения сравнения. Они зависят от начальной погрешности и модуля непрерывности тепловой полугруппы на профиле компоненты в ядре. Вместе с оценкой регуляризационной энергии эти неравенства исключают остаток и устанавливают независимость предела от подпоследовательности и выбора регуляризации в указанном семействе. В примере с нелинейной недиагональной подвижностью и стационарным разрывным состоянием квадраты ошибок и относительная диссипация регуляризованных решений ограничены величиной $C\sqrt{\lambda}$. Тем самым обоснована сходимость регуляризации при разрывном профиле, влияющем на активный перенос.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Jüngel A. The boundedness-by-entropy method for cross-diffusion systems. *Nonlinearity.* 2015;28(6):1963–2001. https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/6/1963
2. Jüngel A., Stelzer I.V. Existence analysis of Maxwell-Stefan systems for multicomponent mixtures. *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* 2013;45(4):2421–2440. https://doi.org/10.1137/120898164
3. Ball J.M. A version of the fundamental theorem for Young measures. In: *PDEs and Continuum Models of Phase Transitions: Proceedings of an NSF-CNRS Joint Seminar, 18–22 January 1988, Nice, France.* Berlin, Heidelberg: Springer; 1989. P. 207–215. https://doi.org/10.1007/BFb0024945
4. Gwiazda P., Kreml O., Świerczewska-Gwiazda A. Dissipative measure-valued solutions for general conservation laws. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C: Analyse non linéaire.* 2020;37(3):683–707. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2019.11.001
5. Ehrlacher V., Marino G., Pietschmann J.-F. Existence of weak solutions to a cross-diffusion Cahn-Hilliard type system. *Journal of Differential Equations.* 2021;286(03):578–623. https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.02.025
6. Braukhoff M., Raithel C., Zamponi N. Partial Hölder regularity for solutions of a class of cross-diffusion systems with entropy structure. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.* 2022;166:30–69. https://doi.org/10.1016/j.matpur.2022.07.006
7. Druet P.-É., Hopf K., Jüngel A. Hyperbolic-parabolic normal form and local classical solutions for cross-diffusion systems with incomplete diffusion. *Communications in Partial Differential Equations.* 2023;48(6):863–894. https://doi.org/10.1080/03605302.2023.2212479
8. Laurençot Ph., Matioc B.-V. Weak-strong uniqueness for a class of degenerate parabolic cross-diffusion systems. *Archivum Mathematicum.* 2023;59(2):201–213. https://doi.org/10.5817/AM2023-2-201
9. Huo X., Jüngel A., Tzavaras A.E. Existence and weak-strong uniqueness for Maxwell-Stefan-Cahn-Hilliard systems. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C: Analyse non linéaire.* 2024;41(4):797–852. https://doi.org/10.4171/AIHPC/89
10. Щетинин Е.Ю., Шевчук А.А. Порожденные граф-коэрцитивные мерозначные пределы для кросс-диффузионных систем с конечномерным дефектом подвижности. *Математика и теоретические компьютерные науки.* 2026;4(1):92–118. https://doi.org/10.26907/2949-3919.2026.1.92-118
    Schetinin E.Yu., Shevchuk A.A. Generated graph-coercive measure-valued limits for cross-diffusion systems with finite-dimensional mobility defect. *Mathematics and Theoretical Computer Science.* 2026;4(1):92–118. (In Russ.). https://doi.org/10.26907/2949-3919.2026.1.92-118

11. Hopf K., Jüngel A. Convergence of a finite-volume scheme and dissipative measure-valued-strong stability for a hyperbolic-parabolic cross-diffusion system. *Numerische Mathematik.* 2025;157(3):951–992. https://doi.org/10.1007/s00211-025-01474-7
12. Elbar Ch. *Global existence for a system without self-diffusion and different mobilities.* arXiv. URL: https://arxiv.org/abs/2604.14775 [Accessed 4th August 2026].
13. Heitzinger M., Jüngel A. Weak-Strong Uniqueness for General Cross-Diffusion Systems with Volume Filling. *SIAM Journal on Mathematical Analysis.* 2026;58(5):4990–5011. https://doi.org/10.1137/25M1805291
14. Shchetinin E.Yu., Shevchuk A.A., Salpagarov S.I. *Quantitative vanishing-regularization limits for degenerate cross-diffusion with changing boundary strata.* arXiv. URL: https://arxiv.org/abs/2610.22079 [Accessed 4th August 2026].
15. Ioffe A.D. On lower semicontinuity of integral functionals. I. *SIAM Journal on Control and Optimization.* 1977;15(4):521–538. https://doi.org/10.1137/0315035

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Щетинин Евгений Юрьевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий, Севастопольский государственный университет, Севастополь, Российская Федерация.
e-mail: riviera-molto@mail.ru
ORCID: 0000-0003-3651-7629

Evgeniy Yu. Shchetinin, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Information Technologies, Sevastopol State University, Sevastopol, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 01.09.2026; одобрена после рецензирования 09.11.2026; принята к публикации 25.11.2026.

The article was submitted 01.09.2026; approved after reviewing 09.11.2026; accepted for publication 25.11.2026.