

УДК 519.854

DOI: [10.26102/2310-6018/2026.60.9.003](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2026.60.9.003)

Модифицированный метод ветвей и границ для решения задачи коммивояжера с временными окнами

О.А. Медведева, Т.А. Желтикова✉

Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация

Резюме. Актуальность исследования обусловлена широким применением задачи коммивояжера с временными окнами (TSPTW) в логистике, производственном планировании и сервисном обслуживании, где требуется не только найти кратчайший маршрут, но и строго соблюдать заданные временные интервалы посещения объектов. Цель работы заключается в разработке и программной реализации модифицированного метода ветвей и границ для точного решения TSPTW, а также оценке его эффективности на тестовых задачах различных размерностей. Ведущим методом исследования выбран классический метод ветвей и границ, адаптированный к специфике временных окон. С этой целью в математическую модель задачи введены переменные времени прибытия, в алгоритме решения использовано последовательное ветвление из текущего города, реализована динамическая проверка допустимости переходов по временным окнам, а также применено отсечение неперспективных подмножеств на основе нижних оценок, получаемых из приведенной матрицы расстояний. Представлены детальная математическая постановка TSPTW, описание модифицированного алгоритма и результаты вычислительного эксперимента для матриц расстояний разных размерностей. Выявлено, что предложенный алгоритм находит оптимальное решение во всех случаях при наличии допустимых маршрутов. Показано, что наличие «хороших» окон приводит к существенному удлинению маршрута по сравнению с классической задачей коммивояжера, а время работы алгоритма значительно возрастает с увеличением размерности задачи. Если окна генерируются случайным образом, задача в большинстве своем не имеет решений, поэтому предлагается процедура формирования временных окон, обеспечивающая гарантированное существование маршрута. Обосновано, что модифицированный метод ветвей и границ является корректным инструментом для получения точного решения TSPTW для задач малой и средней размерности и приводит к сокращению перебора вариантов по сравнению с методом полного перебора.

Ключевые слова: TSPTW, метод ветвей и границ, оптимизационная задача, временные ограничения, точное решение.

Для цитирования: Медведева О.А., Желтикова Т.А. Модифицированный метод ветвей и границ для решения задачи коммивояжера с временными окнами. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2026;14(9). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=2503> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.60.9.003

Modified branch and bound method for solving the traveling salesman problem with time windows

O.A. Medvedeva, T.A. Zheltikova✉

Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation

Abstract. The relevance of the research is due to the widespread application of the Traveling Salesman Problem with Time Windows (TSPTW) in logistics, production planning, and service maintenance, where it is required not only to find the shortest route but also to strictly adhere to given time intervals for visiting objects. The aim of the work is to develop and implement a modified branch-and-bound method for the exact solution of TSPTW, as well as to evaluate its performance on test problems of various dimensions. The leading research method is the classical branch-and-bound method adapted to

the specifics of time windows. To this end, arrival time variables are introduced into the mathematical model of the problem, sequential branching from the current city is used in the solution algorithm, dynamic feasibility checking of transitions with respect to time windows is implemented, and unpromising subsets are pruned based on lower bounds obtained from the reduced distance matrix. The paper presents a detailed mathematical formulation of TSPTW, a description of the modified algorithm, and the results of a computational experiment for distance matrices of various dimensions. It is shown that the presence of "good" windows leads to a significant increase in route length compared to the classical traveling salesman problem, and the algorithm's runtime increases substantially with problem dimension. When windows are generated randomly, the problem in most cases has no solution; therefore, a procedure for generating time windows that guarantees the existence of a route is proposed. It is substantiated that the modified branch-and-bound method is a correct tool for obtaining an exact solution of TSPTW for small- and medium-scale problems and leads to a reduction in the search space compared to the brute-force method.

Keywords: TSPTW, branch and bound method, optimization problem, time constraints, exact solution.

For citation: Medvedeva O.A., Zheltikova T.A. Modified branch and bound method for solving the traveling salesman problem with time windows. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2026;14(9). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=2503> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.60.9.003

Введение

Задача коммивояжера с временными окнами (TSPTW) является одной из наиболее востребованных в транспортной логистике, производственном планировании и управлении складскими системами. Интерес к этой задаче обусловлен множеством модификаций, связанных с введением дополнительных требований к маршруту, а также различными вариантами целевых функций, отвечающих, например, за минимизацию общего времени в пути или выравнивание загрузки транспортных средств.

В классической постановке TSPTW требуется найти маршрут минимальной стоимости, проходящий через все вершины ровно один раз, причем каждая вершина должна быть обслужена в заданном временном интервале. Данная задача является NP-трудной. Это означает, что не существует полиномиального алгоритма для поиска ее оптимального решения. В связи с этим активно разрабатываются эвристические алгоритмы для поиска приближенного решения задачи коммивояжера с временными окнами.

В [1] описывается эвристический алгоритм локального поиска на основе k -обменов. При этом предлагается процедура, позволяющая сократить вычислительную сложность проверки выполнимости временных окон с $O(N)$ до $O(1)$. Также в работе рассматривается проблема поиска начального допустимого решения. В [2] предлагается несколько эвристик для задачи маршрутизации с временными окнами. Проводится обширный вычислительный эксперимент по оценке их производительности. При этом при генерации задач рассматриваются исходные данные разных типов, учитывается процент клиентов с жестким требованием на попадание во временное окно. В статье показано, что эвристики вставочного типа (insertion-type heuristic) неизменно показывают хорошие результаты. В [3] описывается обобщенная вставочная эвристика. Алгоритм последовательно строит маршрут, на каждом шаге выбирая новый объект из числа ближайших соседних объектов с последующей локальной реоптимизацией. При этом проводится проверка выполнимости оставшейся части маршрута.

В работе [4] предлагается алгоритм Beam-ACO, который объединяет алгоритм муравьиной колонии с поиском по лучу. В работе [5] алгоритм Beam-ACO модифицируется для задачи с другой целевой функцией. Вместо минимизации времени в пути рассматривается минимизация временного промежутка, необходимого для завершения всего маршрута, включая простои и длительности обслуживания. В

исследовании [6] описывается применение метода имитации отжига к TSPTW. Кроме температуры дополнительно рассматривается понятие давления, отвечающее за переменные штрафные множители. При этом происходит ослабление ограничения на временные окна за счет добавления штрафов непосредственно в стохастическую процедуру поиска. В работе [7] предлагается эвристика GVNS, состоящая из двух этапов: конструктивного, на котором строится допустимое решение, и оптимизационного, где это решение улучшается за счет частичного сравнения соседних элементов.

Большинство алгоритмов, предлагаемых для решения задачи коммивояжера с временными окнами, являются эвристическими. Это связано с NP-сложностью рассматриваемой задачи. Однако встречаются описания и точных методов решения для различных модификаций задачи. Так, в работе [8] предлагается метод ветвей и отсечений для асимметричной задачи, описывающей работу погрузочного крана на складе. Эта модификация задачи коммивояжера с временными окнами, описываемая моделью целочисленного программирования. В работе [9] предлагается точный алгоритм решения TSPTW, основанный на динамическом программировании. В предложенном подходе ограничения временных окон используются для значительного сокращения пространства состояний и количества переходов между ними. В работе [10] представлен точный алгоритм решения, объединяющий методы условной оптимизации для обеспечения допустимости построенного маршрута и методы исследования операций для нахождения лучшего решения.

Заметим, что NP-сложная задача коммивояжера с временными окнами встречается во многих практических задачах и разработка эффективных алгоритмов ее решения остается актуальной задачей. Представленные в литературе подходы чаще всего являются приближенными, так как позволяют за приемлемое время получить достаточно хороший результат. Точные методы чаще всего описываются для частных случаев, позволяющих существенно упростить процедуру поиска решения.

В данной статье для общей постановки задачи коммивояжера с временными окнами предлагается точный метод решения, представляющий собой модификацию классического метода ветвей и границ.

Материалы и методы

В статье рассматривается следующая постановка задачи коммивояжера с временными окнами.

Дано n объектов обслуживания, $i = \overline{1, n}$. Среди них выделяется депо с индексом $i = 1$, являющееся начальной и конечной точкой маршрута единственного агента (коммивояжера). Известно время перемещения между i -м и j -м объектами $\{c_{ij}\}_{n \times n}$.

Для каждого i -го объекта обслуживания определены время обслуживания s_i (для депо $s_1 = 0$) и временное окно $[e_i, l_i]$, где e_i – самое раннее, а l_i – самое позднее допустимое время начала обслуживания i -го объекта. При этом прибытие агента к объекту раньше времени e_i влечет за собой необходимость ожидания открытия временного окна i -го объекта, а начало обслуживания позже момента времени l_i считается недопустимым.

Агент должен обеспечить последовательный объезд всех объектов обслуживания, формируя единый замкнутый маршрут, полностью удовлетворяющий временным требованиям всех объектов. При этом целью является нахождение последовательности посещения объектов, минимизирующей суммарные временные затраты на выполнение всего маршрута.

Для математического моделирования задачи введем следующие переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если агент движется из } i\text{-го объекта в } j\text{-й} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

t_i – время начала обслуживания i -го объекта обслуживания, $i, j = \overline{1, n}$.

Остановимся подробнее на ограничениях задачи.

Каждый объект обслуживания может быть посещен только один раз. Данное требование является классическим для задачи коммивояжера и описывается системой ограничений вида:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Кроме того, должно выполняться еще одно требование классической задачи коммивояжера, а именно отсутствие подциклов в результирующем маршруте.

Далее рассмотрим дополнительные ограничения, связанные с наличием временных окон.

Если агент прибывает к объекту обслуживания раньше допустимого времени начала его обслуживания, то он должен дождаться открытия временного окна соответствующего объекта. Обозначим время ожидания до начала обслуживания j -го объекта через

$$k_{ij} = \max \left\{ e_j - (t_i + s_i + c_{ij}), 0 \right\}. \quad (3)$$

Обслуживание каждого объекта должно быть начато строго в пределах заданного временного окна. Данное требование описывается условием вида:

$$\text{если } x_{ij} = 1, \text{ то } t_i + s_i + c_{ij} - l_j \leq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (4)$$

Целевая функция отвечает за минимизацию суммарного времени, затраченного на маршрут. В него входят временные затраты на передвижение между объектами, время обслуживания каждого объекта, а также возможные простои из-за раннего приезда к объектам обслуживания. Формально целевая функция описывается следующим образом:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (s_i + c_{ij} + k_{ij}) x_{ij} \rightarrow \min. \quad (5)$$

Таким образом, получена математическая модель (1)–(5) задачи коммивояжера с временными окнами.

Для решения описанной оптимизационной задачи предлагается использовать метод ветвей и границ. Остановимся подробнее на основных этапах алгоритма применительно к рассмотренной задаче.

Модифицированный метод ветвей и границ. Для адаптации классического метода ветвей и границ¹ к задаче коммивояжера с временными окнами предложены две основные модификации.

Первая модификация касается правила ветвления. В классическом алгоритме маршрут формируется непоследовательно, и выбор пары объектов для добавления в искомый маршрут происходит с учетом оценок не пройденных на текущей итерации объектов. В данной работе предлагается непрерывное формирование маршрута с добавлением нового объекта в конец текущей цепочки. На каждом шаге из текущего i -го объекта, уже добавленного в маршрут, рассматриваются все еще не посещенные объекты j . Для каждого такого кандидата вычисляется момент начала его обслуживания как

¹ Чернышова Г.Д., Каширина И.Л. *Дискретная оптимизация*. Воронеж: Издательский дом ВГУ; 2003. 26 с.

максимум из двух величин: времени прибытия к j -му объекту и самого раннего времени открытия временного окна, то есть

$$t_j = \max(t_i + s_i + c_{ij}, e_j). \quad (6)$$

Если при этом полученное время начала обслуживания превысит самое позднее допустимое время начала обслуживания j -го объекта, то есть $t_j > l_j$, то такой переход считается невозможным. Иначе переход допустим, и j -й объект добавляется в конец формируемого маршрута.

Вторая модификация затрагивает способ вычисления нижней оценки искомого маршрута. Как и в классическом методе ветвей и границ для задачи коммивояжера, исходная матрица затрат C подвергается приведению, а именно, из каждой строки и из каждого столбца проводится вычитание соответствующего минимального элемента. Сумма всех приводящих констант по строкам α_i и столбцам β_j дает нижнюю границу искомого маршрута, то есть

$$\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j. \quad (7)$$

Для задачи с временными окнами эта оценка меняется. Предварительно из матрицы затрат C удаляются все заведомо недоступные переходы. Если даже при немедленном выезде от i -го объекта в момент самого раннего открытия его окна e_i прибытие к j -му объекту происходит позже закрытия окна l_j , то есть если $e_i + c_{ij} > l_j$, то такое перемещение недопустимо. При этом соответствующий элемент матрицы затрат полагается равным бесконечности, $c_{ij} = +\infty$, что равносильно его исключению из дальнейшего рассмотрения. Затем для множества еще не посещенных объектов выполняется приведение соответствующей подматрицы затрат, и сумма полученных приводящих констант ξ' добавляется к текущему времени начала обслуживания t_i последнего посещенного i -го объекта. Таким образом, нижняя граница для частичного маршрута σ с последним i -м объектом вычисляется как

$$LB(\sigma) = t_i + \xi'. \quad (8)$$

Для формализации модифицированного метода ветвей и границ для рассматриваемой задачи введем следующие обозначения:

- множество W_0 задает совокупность всех возможных маршрутов агента без учета временных окон;
- множество W_k описывает подмножество частичных маршрутов на k -м шаге ветвления;
- рекорд R хранит лучшее на текущий момент значение целевой функции найденного маршрута, изначально задается $R = +\infty$;
- частичный маршрут $\sigma = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ с фиксированным стартовым объектом $v_1 = 1$ и последним посещенным объектом v_p ;
- множество S формируется из посещенных на данный момент объектов, включая стартовый;
- переменная t_{last} фиксирует время прибытия в последний объект подмаршрута v_p с учетом всех простоев;
- множество I содержит номера подмножеств дерева решений, ожидающих ветвления;
- множество J содержит номеров подмножеств дерева решений, для которых необходимо вычислить оценки.

Таким образом, модифицированный алгоритм на основе метода ветвей и границ для задачи коммивояжера с временными окнами примет вид:

Алгоритм 1. Модифицированный метод ветвей и границ для задачи с временными окнами

Этап 1. Инициализация

1. $R = +\infty, \sigma = [1], S = \{1\}, t_{\text{last}} = e_1$.
2. Привести матрицу затрат C , вычислить сумму приводящих констант ξ по формуле (7). Задать начальную оценку $LB(W_0) = \xi$.
3. Если $\xi \geq R$, то останов, решений нет. Иначе $I = \emptyset, J = \{0\}$.

Этап 2. Вычисление оценок

Для каждого $W_j, j \in J$, заданного частичным маршрутом σ с последним объектом i и временем начала обслуживания t_i :

1. Построить подматрицу C' для непосещенных объектов.
2. Привести матрицу C' , получить сумму приводящих констант ξ' , вычислить оценку $LB(W_j) = t_i + \xi'$.

Этап 3. Обновление рекорда

Если получен допустимый полный маршрут, включающий все n объектов, то есть $L = \max(t_{\text{last}} + c_{\text{last},1}, e_1) \leq l_1$, то при $L < R$ положить $R = L$ и запомнить найденный маршрут.

Этап 4. Сокращение перебора

1. Исключить из рассмотрения множество W_k , если $LB(W_k) \geq R$ или нет допустимых объектов для перехода.
2. Обновить $I = I \cup J, J = \emptyset$. Если $I = \emptyset$, то перейти к этапу 7.

Этап 5. Выбор перспективного множества

Выбрать множество $W_k, k \in I$ с минимальным значением оценки $LB(W_k)$.

Этап 6. Ветвление

1. Для выбранного частичного маршрута σ с последним объектом i и временем начала обслуживания t_i для каждого $j \notin S$ вычислить время начала обслуживания $t_j = \max(t_i + s_i + c_{ij}, e_j)$.
2. Если $t_j \leq l_j$, то обносить маршрут $\sigma = (\sigma, j)$, задать $S = S \cup \{j\}, t_{\text{last}} = t_j$.
3. Добавить подмножество дерева решений с полученным подмаршрутом σ в J .
4. Если нет допустимых объектов j для добавления в маршрут, то перейти к этапу 4.
5. Перейти к этапу 2.

Этап 7. Останов

Если $I = \emptyset$ и рекорд $R < +\infty$, то зафиксировать лучший маршрут, отвечающий рекорду R , иначе решений нет.

Результаты

Для оценки эффективности предложенной модификации метода ветвей и границ для задачи коммивояжера с временными окнами были сгенерированы по 20 тестовых матриц затрат размерности 12×12 , 15×15 и 17×17 . Генерация временных интервалов для объектов проводилась двумя способами. Первый вариант подразумевает случайную генерацию промежутков. Второй вариант направлен на гарантированное получение допустимого маршрута. При этом изначально произвольно строится случайный допустимый маршрут и для объектов полученного маршрута задаются последовательно временные интервалы так, чтобы текущий маршрут удовлетворял сформированным интервалам и время окончания предыдущего интервала не превышало времени окончания следующего, причем интервалы для разных объектов могут пересекаться. Для решения полученных задач использовались предложенный модифицированный метод ветвей и границ и алгоритм полного перебора всех решений.

В эксперименте оценивались следующие параметры: время работы рассмотренных алгоритмов, результирующее время выполнения найденного маршрута с учетом возможных простоев, а также успешность нахождения допустимого маршрута.

В Таблице 1 для входных данных разной размерности представлены средние значения времени выполнения найденного маршрута с учетом возможных простоев. Кроме того, оценивается процент задач, для которых задача является совместной, то есть допустимое решение существует.

Таблица 1 – Успешность и среднее время выполнения полученного маршрута для разных размерностей задач

Table 1 – Success rate and average execution time of the obtained route for different task dimensions

	Генерация с допустимым решением			Случайная генерация		
Размерность матрицы затрат	12×12	15×15	17×17	12×12	15×15	17×17
Успешность	100 %	100 %	100 %	35 %	22 %	16 %
Значение ЦФ, метод ветвей и границ	264,4	370	371	157,7	226	250
Значение ЦФ, полный перебор	264,4	370	371	157,7	226	250

Из результатов, представленных в Таблице 1, можно сделать вывод, что случайная генерация временных окон в большинстве случаев не дает ни одного допустимого решения. При этом предложенная процедура формирования временных интервалов позволяет получать решение всегда. Заметим, что значение целевой функции при такой генерации оказывается в среднем больше, чем при случайной генерации для задач одной и той же размерности. Это объясняется тем, что в вычислении среднего значения участвуют только успешно найденные решения, которых в случае случайной генерации оказывается крайне мало.

В последней строке представлены средние значения целевой функции при решении тех же задач с помощью алгоритма полного перебора. Полученные результаты подтверждают, что разработанный алгоритм является точным.

В Таблице 2 для входных данных разной размерности приведено среднее время работы разработанного алгоритма в сравнении с полным перебором.

Таблица 2 – Среднее времени работы алгоритмов для разных размерностей задач

Table 2 – Average running time of algorithms for different problem dimensions

	Генерация с допустимым решением			Случайная генерация		
Размерность матрицы затрат	12×12	15×15	17×17	12×12	15×15	17×17
Среднее время работы метода ветвей и границ, с	0,8843	36,86	474,88	8,21	735,66	4213,41
Среднее время работы полного перебора, с	123,75	> 24 часов	> 72 часов	123,75	> 24 часов	> 72 часов

Из данных, представленных в Таблице 2, следует, что при увеличении размерности задачи время работы алгоритмов увеличивается. Заметим, что для фиксированной размерности задачи при случайной генерации временных окон требуется на порядок больше времени, чем при генерации с гарантированным решением. Это объясняется тем, что в первом случае алгоритм проводит больше итераций без обновления начального рекорда или вообще не обновляет его в случае отсутствия допустимого решения. Из-за этого условия сокращения перебора из этапа 4 выполняются реже. Заметим, что в сравнении с полным перебором предложенный алгоритм находит оптимальное решение за несравнимо меньшее время.

Заключение

В статье рассматривается NP-сложная задача коммивояжера с временными окнами, для решения которой предлагается точный алгоритм решения, основанный на модификации известного метода ветвей и границ. В ходе вычислительного эксперимента показано, что предложенный алгоритм позволяет найти оптимальное решение задачи за несравнимо меньшее время по сравнению с полным перебором всех маршрутов. Кроме того выявлено, что при случайной генерации временных интервалов задача в большинстве случаев не имеет допустимого решения. В связи с этим предложен способ генерации временных окон, гарантирующий получение итогового маршрута. При этом время работы предложенного алгоритма существенно сокращается за счет гарантированного обновления рекорда и значительного сокращения перебора.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Savelsbergh M.W.P. Local search in routing problems with time windows. *Annals of Operations Research*. 1985;4(1):285–305. <https://doi.org/10.1007/BF02022044>
2. Solomon M.M. Algorithms for the vehicle routing and scheduling problems with time window constraints. *Operations Research*. 1987;35(2):254–265. <https://doi.org/10.1287/opre.35.2.254>
3. Gendreau M., Hertz A., Laporte G., et al. A generalized insertion heuristic for the traveling salesman problem with time windows. *Operations Research*. 1998;46(3):330–335. <https://doi.org/10.1287/opre.46.3.330>
4. López-Ibáñez M., Blum Ch. Beam-ACO for the travelling salesman problem with time windows. *Computers & Operations Research*. 2010;37(9):1570–1583. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2009.11.015>
5. López-Ibáñez M., Blum Ch., Ohlmann J.W., et al. The travelling salesman problem with time windows: Adapting algorithms from travel-time to makespan optimization. *Applied Soft Computing*. 2013;13(9):3806–3815. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2013.05.009>
6. Ohlmann J.W., Thomas B.W. A compressed-annealing heuristic for the traveling salesman problem with time windows. *INFORMS Journal on Computing*. 2007;19(1):80–90. <https://doi.org/10.1287/ijoc.1050.0145>
7. Silva R.F., Urrutia S. A general VNS heuristic for the traveling salesman problem with time windows. *Discrete Optimization*. 2010;7(4):203–211. <https://doi.org/10.1016/j.disopt.2010.04.002>
8. Ascheuer N., Fischetti M., Grötschel M. Solving the asymmetric travelling salesman problem with time windows by branch-and-cut. *Mathematical Programming*. 2001;90(3):475–506. <https://doi.org/10.1007/PL00011432>
9. Dumas Y., Desrosiers J., Gelinat E., et al. An optimal algorithm for the traveling salesman problem with time windows. *Operations Research*. 1995;43(2):367–371. <https://doi.org/10.1287/opre.43.2.367>

10. Focacci F., Lodi A., Milano M. A hybrid exact algorithm for the TSPTW. *INFORMS Journal on Computing*. 2002;14(4):403–417. <https://doi.org/10.1287/ijoc.14.4.403.2827>

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Медведева Ольга Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация.

e-mail: o_a_medvedeva@mail.ru

Olga A. Medvedeva, Candidate of Physico-mathematical Sciences, Docent, Associate Professor at the Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Желтикова Татьяна Александровна, магистрант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация.

e-mail: tatyana_s@mail.ru

Tatyana A. Zheltikova, Master's Degree student at the Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Faculty of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 15.06.2026; одобрена после рецензирования 07.08.2026; принята к публикации 11.09.2026.

The article was submitted 15.06.2026; approved after reviewing 07.08.2026; accepted for publication 11.09.2026.