УДК 519.833 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.018

О нахождении лексикографически максиминных стратегий одного из игроков в бескоалиционной игре двух лиц, моделирующей процесс закупки средств защиты для компьютерной системы

В.В. Сушкин

Тверской государственный университет,
Тверь, Российская Федерация

Резюме. В статье рассматривается бескоалиционная игра двух лиц, моделирующая процесс закупки средств защиты для компьютерной системы. Одним из игроков в этой игре является сторона, ответственная за обеспечение безопасности данной системы. Обладая определенным объемом денежных средств, которые могут быть потрачены на приобретение средств защиты, данная сторона определяет, какие именно из этих средств следует приобретать. Действиями другого игрока (а это внешний мир по отношению к компьютерной системе) являются реализуемые через сеть атаки на компьютерную систему. Для каждого из средств защиты, которые могут быть приобретены, а также для каждого из типов атак, которые могут быть использованы при нападении на компьютерную систему, известной является вероятность, с которой атака будет отражена средством защиты. Выбирая средства защиты, сторона, ответственная за безопасность, стремится к минимизации общих потерь, включающих в себя, во-первых, стоимость закупаемых средств защиты, а во-вторых, ущерб, ожидаемый от применения другой стороной атак на компьютерную систему. Проводится исследование принципа оптимальности, реализациями которого являются лексикографически максиминные стратегии игрока, представляющего собой сторону, ответственную за обеспечение безопасности системы. Результатом данного исследования являются утверждения, определяющие способ отыскания всех лексикографически максиминных стратегий указанного игрока.

Ключевые слова: бескоалиционная игра, максиминная стратегия, недоминируемая стратегия, лексикографически максиминная стратегия, компьютерная система, атака на компьютерную систему, защита компьютерной системы.

Для цитирования: Сушкин В.В. О нахождении лексикографически максиминных стратегий одного из игроков в бескоалиционной игре двух лиц, моделирующей процесс закупки средств защиты для компьютерной системы. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2021;9(3). Доступно по: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1031 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.018

Finding lexicographically maximin strategies of one of the players in a two-person noncooperative game that models a process of purchasing protection means for a computer system

V.V. Sushkin

Tver State University,
Tver, Russian Federation

Abstract: A two-person noncooperative game that models a process of purchasing protection means for a computer system is considered. One of the players in this game is a party responsible for the security of the system. Having a certain amount of money that can be spent on the purchase of the protection means this party determines which of these funds should be purchased. Attacks on the computer system implemented via the network (and it's the external world in relation to the computer system) are the actions of the other player. For each of the protection means that can be purchased as well as for each of the types of attacks that can be used in an assault on the computer system, a probability that the attack will be repelled by the protection mean is known. By choosing the protection means, a party responsible for the security seeks to minimize overall losses which include, firstly, a cost of the purchased protection means and, secondly, a damage expected from the use of the attacks on the computer system by the other party. A study of an optimality principle implementations that appear as lexicographically maximin strategies of a player which is a party responsible for ensuring the security of the system is carried out. A result of this study are statements that determine a method of finding all lexicographically maximin strategies of the specified player.

Keywords: noncooperative game, maximin strategy, nondominated strategy, lexicographically maximin strategy, computer system, attack on a computer system, protection of a computer system

For citation: Sushkin V.V. About finding lexicographically maximin strategies of one of the players in a two-person noncooperative game that models a process of purchasing protection means for a computer system. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2021;9(3). Available from: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1031 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.018 (In Russ).

1. Введение

При существовании такого явления, как атаки на компьютерную систему [1], при их (имеется в виду атак) постоянном развитии и появлении новых разновидностей атак обеспечение безопасности компьютерных систем является необходимым условием использования этих систем для хранения и обработки данных. Безопасность компьютерных систем обеспечивается при помощи соответствующих средств защиты. Из множества наборов этих средств сторона, ответственная за безопасность системы, (сторона защиты) стремится выбрать набор, который оказывается наилучшим (оптимальным) в заданном смысле.

Ряд задач по отысканию оптимальных (в том или ином смысле) наборов средств защиты для компьютерных систем рассматривается в [2-5]. При определении в [2-5] понятия оптимальной стратегии стороны защиты используются различные критерии [1]: Вальда, Байеса, Лапласа, Гурвица.

Близкие по тематике (к [2-5]) вопросы исследуются в [6-8]. В [6] при постановке задачи (в отличие от [2-5]) речь идёт не столько о выборе средств защиты, сколько о выборе узлов (объектов) компьютерной системы, которые должны быть защищены. В [7], в отличие от [6], вместо выбора объектов, которые должны быть защищены, осуществляется выбор того, в какой степени каждый из объектов системы должен быть защищён (для каждого из объектов определяется собственная степень защиты, задаваемая числом из отрезка $[0,1]$). В [8] выбор, реализуемый стороной защиты, состоит в том, что для каждого из серверов системы определяется перечень служебных процессов, которые должны быть использованы для защиты данного сервера. Поведение, оптимальное для стороны защиты, в [6, 7] определяется в соответствии принципом минимакса [9], а в [8] представляет собой такой вариант поведения, при котором ущерб, предотвращённый стороной защиты, оказывается наибольшим.

В [10] с помощью бескоалиционной игры [11] двух лиц моделируется процесс закупки средств защиты для компьютерной системы. Одним из игроков в указанной игре является сторона защиты компьютерной системы, другим – сторона нападения на данную систему (допустим, сторона защиты – это игрок 1, а сторона нападения – игрок 2). Применение первым игроком какой-либо своей стратегии означает приобретение (этим игроком) какого-то набора средств защиты для компьютерной системы, а применение какой-либо своей стратегии игроком 2 сводится к использованию атак различных типов (всего типов m, m – заданное натуральное число) с вероятностями, совпадающими со значениями соответствующих компонент стратегии, выбранной данным игроком. Множество стратегий второго игрока представляет собой декартово произведение

$$\underbrace{[0,1]\times\ldots\times[0,1]}_{m}. \qquad (1.1)$$

В [10] предлагается способ отыскания всех недоминируемых [12] максиминных [9] стратегий стороны защиты.

Исследование, проводимое в настоящей работе, также связано с темой выбора (приобретения) средств защиты для компьютерной системы. В качестве математической модели процесса закупки средств защиты (рассматриваемого в работе) используется бескоалиционная игра Γ_η двух лиц, представляющая собой некоторую подыгру [11] игры Γ, исследуемой в [10] (здесь η – заданное натуральное число). В игре Γ_η (так же, как и в игре Γ) один игрок – это сторона защиты, а другой – сторона нападения. Множество стратегий стороны защиты в игре Γ_η – такое же, как и в игре Γ, а множество стратегий стороны нападения совпадает с множеством

$$\underbrace{H\times\ldots\times H}_{m}, \qquad (1.2)$$

где H – это множество $\{0, \frac{1}{\eta}, \frac{2}{\eta}, \ldots, \frac{\eta-1}{\eta}, 1\}$. Очевидно, (1.2) является подмножеством множества (1.1). В работе предлагается способ отыскания всех лексикографически максиминных (или, по-другому, лексикографически осторожных [12]) стратегий стороны защиты. При разработке этого способа, в частности, были использованы некоторые утверждения, доказанные в [10]. В пункте 6 проводится сравнение данного способа и некоторого способа (решения той же задачи), основанного в конечном итоге лишь на применении определения лексикографически максиминной стратегии игрока.

2. Некоторые базовые понятия и обозначения

Допустим, Γ – произвольная бескоалиционная игра двух лиц. Определение этой игры и её составляющих, а также определения упоминаемых ниже понятий гарантированного выигрыша [13], максиминной и недоминируемой стратегий игрока и отношения доминирования в том числе приведены в [10].

Введём ряд обозначений, непосредственно связанных с игрой Γ:

I – множество номеров игроков,

$V(i)$, $i \in I$, – множество стратегий i-го игрока,

$v(i)$, $i \in I$, – стратегия i-го игрока,

V – множество ситуаций,

$J(i)$, $i \in I$, – функция выигрыша i-го игрока,

$v(i); v(j)$, где $i \in I$, $j \in I \setminus \{i\}$, $v(i) \in V(i)$, $v(j) \in V(j)$, – это обозначение записи $v(i), v(j)$, если $i=1$, а $j=2$, и записи $v(j), v(i)$, если $i=2$, а $j=1$,

$G(i)$, $i \in I$, – гарантированный выигрыш i-го игрока,

$V^\circ(i)$, $i \in I$, – множество максиминных стратегий i-го игрока,

$\preceq(i)$, $i \in I$, – отношение доминирования, заданное на множестве стратегий i-го игрока,

$N(i)$, $i \in I$, – множество недоминируемых стратегий i-го игрока.

В качестве обозначений следующих множеств и соответствий

$$V(i), i \in I,\ \ V^{\circ}(i), i \in I,\ \ N(i), i \in I,\ \ V,\ \ J(i), i \in I,\ \ G(i), i \in I,\ \ и\ \ \preceq(i), i \in I,$$

(связанных с игрой Γ) будем также соответственно использовать такие символы $V(i)\{\Gamma\}, i \in I$, $V^{\circ}(i)\{\Gamma\}, i \in I$, $N(i)\{\Gamma\}, i \in I$, $V\{\Gamma\}$, $J(i)\{\Gamma\}, i \in I$, $G(i)\{\Gamma\}, i \in I$, и $\preceq(i)\{\Gamma\}, i \in I$.

Допустим, $i \in I$, $j \in I \setminus \{i\}$, а множество $V(j)$ представляет собой конечное множество с числом элементов, равным q, $q \geq 1$.

Положим, $v(i)$ – произвольный элемент из множества $V(i)$. Символом $\Pi^{(i,v(i))}$ будем обозначать множество биективных отображений

$$\pi^{(i,v(i))} : \{1, 2, \ldots, q\} \to V(j),$$

удовлетворяющих условию

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, q\},$$
$$((k \geq 2) \Rightarrow (J(i)(v(i); \pi^{(i,v(i))}(k-1)) \leq J(i)(v(i); \pi^{(i,v(i))}(k)))).$$

Нетрудно убедиться в том, что при любом $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$ множество

$$\{\, J(i)(v(i); \pi^{(i,v(i))}(k)) \mid \pi^{(i,v(i))} \in \Pi^{(i,v(i))}\}$$

одноэлементно. Допустим, k – произвольный элемент из множества $\{1, 2, \ldots, q\}$. Символом $J_k^{\pi}(i)$ будем обозначать отображение с областью определения $V(i)$ и множеством значений в $\boldsymbol{R}$, которое (имеется в виду отображение) произвольной стратегии $v(i)$ i-го игрока ставит в соответствие элемент из множества

$$\{\, J(i)(v(i); \pi^{(i,v(i))}(k)) \mid \pi^{(i,v(i))} \in \Pi^{(i,v(i))}\},$$

здесь $\boldsymbol{R}$ – это множество действительных чисел.

Символом $\preceq^{l}(i)$ будем обозначать бинарное отношение, заданное на $V(i)$, определяемое следующим образом

$$\forall v'(i) \in V(i),\ \ \forall v''(i) \in V(i),$$
$$((v'(i) \preceq^{l}(i)\, v''(i)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \ ((\exists \hat{k} \in \{1, 2, \ldots, q\},\ \ J_{\hat{k}}^{\pi}(i)(v'(i)) < J_{\hat{k}}^{\pi}(i)(v''(i))) \wedge$$
$$\wedge\, (\forall k \in \{1, 2, \ldots, q\},\ \ ((k < \hat{k}) \Rightarrow (J_k^{\pi}(i)(v'(i)) = J_k^{\pi}(i)(v''(i)))))).$$

Определение 2.1. Стратегию $v^{\circ}(i)$ i-го игрока принято называть лексикографически максиминной (или, по-другому, лексикографически осторожной [12]) стратегией этого игрока, если выполнено условие

$$\forall v(i) \in V(i),\ \ ((v(i) \neq v^{\circ}(i)) \Rightarrow \neg(v^{\circ}(i) \preceq^{l}(i)\, v(i))).$$

Множество лексикографически максиминных стратегий i-го игрока будем обозначать символом $L(i)$. □

Символом $\sim^{l}(i)$ будем обозначать бинарное отношение, заданное на $V(i)$, определяемое следующим образом

$$\forall v'(i) \in V(i),\ \ \forall v''(i) \in V(i),$$
$$((v'(i) \sim^{l}(i)\, v''(i)) \Leftrightarrow (\forall k \in \{1, 2, \ldots, q\},\ \ J_k^{\pi}(i)(v'(i)) = J_k^{\pi}(i)(v''(i)))).$$

В качестве обозначений отношений $\preceq^I(i)$, $\sim^I(i)$ и множества $L(i)$ будем также использовать соответственно такие символы $\preceq^I(i)\{\Gamma\}$, $\sim^I(i)\{\Gamma\}$ и $L(i)\{\Gamma\}$.

3. Описание исследуемой игры

С помощью бескоалиционной игры двух лиц, обозначаемой далее символом Γ_η, опишем процесс закупки средств защиты для некоторой компьютерной системы. Описание игры Γ_η несложным образом получается из описания игры Γ, исследуемой в [10]. Опишем сначала игру Γ (её развёрнутое описание представлено в [10]), а затем игру Γ_η.

Игра Γ (исследуемая в [10]) является бескоалиционной игрой двух лиц. Составляющие I, $V(1)$, $V(2)$ и $J(1)$ этой игры определяются следующим образом

$$I = \{1, 2\},$$

$$V(1) = \{\, S \in \boldsymbol{M}(\{1, 2, \ldots, n\}) \mid \sum_{i \in S} c_i \le d \,\},$$

$$V(2) = \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{m},$$

$$J(1)(S, a) = -(\sum_{i \in S} c_i + \sum_{j=1}^{m} (1 - p(S, j)) \cdot a_j \cdot w_j), \;\; S \in V(1), \;\; a \in V(2),$$

здесь

число 1 из I – это номер игрока – стороны защиты компьютерной системы,

число 2 из I – номер игрока – стороны нападения на компьютерную систему,

n – количество средств защиты для компьютерной системы, которые могут быть приобретены игроком 1, $n \ge 1$,

$\boldsymbol{M}(\{1, 2, \ldots, n\})$ – множество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$,

c_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, – стоимость i-го средства защиты,

$\sum_{i \in S} c_i$ – это число 0, если $S = \varnothing$,

d – денежные средства, предназначенные для закупки игроком 1 средств защиты,

m – количество возможных типов атак (со стороны игрока 2) на компьютерную систему, $m \ge 1$,

$\underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{m}$ – это отрезок $[0,1]$, если $m = 1$,

a_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, – вероятность использования игроком 2 атаки j-го типа,

a – упорядоченный набор $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, если $m \ge 2$, и a_1, если $m = 1$,

$p(S, j)$, $S \in V(1)$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, – вероятность отражения атаки j-го типа игроком 1, использующим стратегию S,

w_j, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, – максимальный ущерб, причиняемый игроку 1 при использовании игроком 2 атаки j-го типа, $w_j > 0$.

Паре (Γ,η), где η – некоторое натуральное число, поставим в соответствие бескоалиционную игру Γ_η двух лиц, составляющие которой определяются следующим образом

$$V(1)\{\Gamma_\eta\}=V(1),$$
$$V(2)\{\Gamma_\eta\}=\underbrace{H\times\ldots\times H}_{m},$$

где H – это множество $\{0,\frac{1}{\eta},\frac{2}{\eta},\ldots,\frac{\eta-1}{\eta},1\}$,

$$J(1)\{\Gamma_\eta\}(v)=J(1)(v),\ v\in V\{\Gamma_\eta\},$$
$$J(2)\{\Gamma_\eta\}(v)=J(2)(v),\ v\in V\{\Gamma_\eta\}.$$

В качестве обозначений следующих множеств и соответствий

$$V(2)\{\Gamma_\eta\},\ V^\circ(1)\{\Gamma_\eta\},\ N(1)\{\Gamma_\eta\},\ L(1)\{\Gamma_\eta\},\ G(1)\{\Gamma_\eta\},\ \preceq(1)\{\Gamma_\eta\},\ \preceq^l(1)\{\Gamma_\eta\}\ \text{и}\ \sim^l(1)\{\Gamma_\eta\}$$

будем также соответственно использовать такие символы

$$V_\eta(2),\ V^\circ{}_\eta(1),\ N_\eta(1),\ L_\eta(1),\ G_\eta(1),\ \preceq_\eta(1),\ \preceq^l_\eta(1)\ \text{и}\ \sim^l_\eta(1).$$

4. Вспомогательные утверждения

В данном пункте для произвольной бескоалиционной игры двух лиц, а также для некоторых её частных случаев, в том числе для игр Γ и Γ_η, описанных в предыдущем пункте, представлен ряд утверждений, необходимых для доказательства утверждений, сформулированных в следующем пункте – пункте 5.

Предположим, рассматривается произвольная бескоалиционная игра двух лиц.

Допустим, $i\in I$. Символом $V^{\circ n}(i)$ будем обозначать множество

$$\{v'(i)\in V(i)\,|\,(v'(i)\in V^\circ(i))\wedge$$
$$\wedge(\forall v(i)\in V(i),\ (((v(i)\in V^\circ(i))\wedge(v(i)\neq v'(i)))\Rightarrow\neg(v'(i)\preceq(i)\,v(i))))\}.$$

Утверждение 4.1. [14] Допустим, $i\in I$. Тогда справедливо следующее

$$V^\circ(i)\cap N(i)=V^{\circ n}(i).\ \square$$

Допустим, $i\in I$, $j\in I\setminus\{i\}$, а множество $V(j)$ представляет собой конечное множество.

Утверждение 4.2. Справедливо следующее

$$L(i)=\{v^\circ(i)\in V(i)\,|\,\forall v(i)\in V(i),\ (\neg(v(i)\sim^l(i)\,v^\circ(i))\Rightarrow(v(i)\preceq^l(i)\,v^\circ(i)))\}.\ \square$$

При доказательстве утверждения 4.2 используются определение 2.1 и определения отношений $\preceq^l(i)$ и $\sim^l(i)$.

Утверждение 4.3. [12] Справедливо следующее

$$L(i)\subset V^\circ(i)\cap N(i).\ \square$$

Предположим, рассматриваются игра Γ и игра Γ_η, представленные в пункте 3.

Утверждение 4.4. [14] Допустим, $S\in V(1)$. Тогда справедливо следующее

$$G(1)(S)=-(\sum_{i\in S}c_i+\sum_{j=1}^{m}(1-p(S,j))w_j).\ \square$$

Утверждение 4.5. Допустим, $S \in V(1)$. Тогда справедливо следующее

$$G_\eta(1)(S) = -(\sum_{i \in S} c_i + \sum_{j=1}^{m}(1 - p(S, j))w_j). \square$$

Доказательство утверждения 4.5 аналогично доказательству утверждения 4.4. При доказательстве утверждения 4.5 используются определение функции $G_\eta(1)$ и описание игры Γ_η.

Допустим, $S' \in V(1)$ и $S'' \in V(1)$. Символом $\Delta(S', S'')$ будем обозначать значение разности

$$\sum_{i \in S'} c_i - \sum_{i \in S''} c_i.$$

Утверждение 4.6. [14] Допустим, $S' \in V(1)$ и $S'' \in V(1)$. Тогда справедливо следующее

$$(S' \preceq (1)\, S'') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ((\forall a \in V(2),\ \sum_{j=1}^{m} p(S', j)a_j w_j - \Delta(S', S'') \le \sum_{j=1}^{m} p(S'', j)a_j w_j) \wedge$$

$$\wedge (\exists \hat{a} \in V(2),\ \sum_{j=1}^{m} p(S', j)\hat{a}_j w_j - \Delta(S', S'') < \sum_{j=1}^{m} p(S'', j)\hat{a}_j w_j)). \square$$

Утверждение 4.7. Допустим, $S' \in V(1)$ и $S'' \in V(1)$. Тогда справедливо следующее

$$(S' \preceq_\eta (1)\, S'') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ((\forall a \in V_\eta(2),\ \sum_{j=1}^{m} p(S', j)a_j w_j - \Delta(S', S'') \le \sum_{j=1}^{m} p(S'', j)a_j w_j) \wedge$$

$$\wedge (\exists \hat{a} \in V_\eta(2),\ \sum_{j=1}^{m} p(S', j)\hat{a}_j w_j - \Delta(S', S'') < \sum_{j=1}^{m} p(S'', j)\hat{a}_j w_j)). \square$$

Доказательство утверждения 4.7 аналогично доказательству утверждения 4.6. При доказательстве утверждения 4.7 используются определение отношения $\preceq_\eta(1)$ и описание игры Γ_η.

Утверждение 4.8. Допустим, $S' \in V(1)$ и $S'' \in V(1)$. Тогда справедливо следующее

$$(S' \preceq (1)\, S'') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ((\forall a \in V(2),\ \sum_{j=1}^{m}(p(S'', j) - p(S', j))a_j w_j + \Delta(S', S'') \ge 0) \wedge$$

$$\wedge (\exists \hat{a} \in V(2),\ \sum_{j=1}^{m}(p(S'', j) - p(S', j))\hat{a}_j w_j + \Delta(S', S'') > 0)). \square$$

Утверждение 4.8 является очевидным следствием утверждения 4.6.

Утверждение 4.9. Допустим, $S' \in V(1)$ и $S'' \in V(1)$. Тогда справедливо следующее

$$(S' \preceq_\eta (1)\, S'') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad ((\forall a \in V_\eta(2),\ \sum_{j=1}^{m}(p(S'', j) - p(S', j))a_j w_j + \Delta(S', S'') \ge 0) \wedge$$

$$\wedge (\exists \hat{a} \in V_\eta(2),\ \sum_{j=1}^{m}(p(S'', j) - p(S', j))\hat{a}_j w_j + \Delta(S', S'') > 0)). \square$$

Утверждение 4.9 является очевидным следствием утверждения 4.7.

Утверждение 4.10. [14] Допустим, $S' \in V(1)$, $S'' \in V(1)$, и пусть при этом $S' \preceq (1)\, S''$. Тогда справедливо следующее

$$\Delta(S', S'') \geq 0 \text{ . } \square$$

Утверждение 4.11. Допустим, $S' \in V(1)$, $S'' \in V(1)$, и пусть при этом $S' \preceq_\eta (1)\, S''$. Тогда справедливо следующее

$$\Delta(S', S'') \geq 0 \text{ . } \square$$

Доказательство утверждения 4.11 аналогично доказательству утверждения 4.10. При доказательстве утверждения 4.11 используются утверждение 4.7 и описание игры Γ_η.

Символом $V^{\circ c}(1)$ будем обозначать множество

$$\{\ S' \in V^\circ(1) \mid \sum_{i \in S'} c_i = \min_{S \in V^\circ(1)} \sum_{i \in S} c_i\ \}.$$

Утверждение 4.12. [10] Допустим, $m = 1$. Тогда справедливо следующее

$$V^\circ(1) \cap N(1) = V^{\circ c}(1) \text{ . } \square$$

Символом $V^{\circ p}(1)$ будем обозначать множество

$$\{\ S' \in V^\circ(1) \mid \forall S \in V^\circ(1),\ ((\sum_{i \in S} c_i < \sum_{i \in S'} c_i) \Rightarrow \exists j \in \{1, 2, \dots, m\},\ p(S', j) < p(S, j))\ \}.$$

Утверждение 4.13. [10] Допустим, $m \geq 2$. Тогда справедливо следующее

$$V^\circ(1) \cap N(1) = V^{\circ p}(1) \text{ . } \square$$

5. Полученные результаты

В данном пункте для игры Γ_η (описанной в пункте 3) получены утверждения, указывающие на процедуры отыскания всех лексикографически максиминных стратегий первого игрока в данной игре.

Предположим, рассматривается произвольная бескоалиционная игра двух лиц, и пусть $i \in I$, $j \in I \setminus \{i\}$, а множество $V(j)$ представляет собой конечное множество.

Утверждение 5.1. Допустим, $V(i)$ – конечное множество. Тогда справедливо следующее

$$L(i) = \{ v'(i) \in V^\circ(i) \cap N(i) \mid \forall v(i) \in V^\circ(i) \cap N(i),\ (\neg(v(i) \sim^{l}(i)\, v'(i)) \Rightarrow (v(i) \preceq^{l}(i)\, v'(i)))\} \text{ . } \square$$

При доказательстве утверждения 5.1 используются утверждения 4.1-4.3, определение 2.1, определения множеств $V^{\circ n}(i)$ и $V^\circ(i)$, определение максиминной стратегии i-го игрока и определения отношений $\preceq(i)$, $\preceq^{l}(i)$ и $\sim^{l}(i)$.

Предположим, рассматриваются игра Γ и игра Γ_η, представленные в пункте 3.

Утверждение 5.2. Справедливо следующее

$$L_\eta(1) = \{ S' \in V_\eta^\circ(1) \cap N_\eta(1) \mid \forall S \in V_\eta^\circ(1) \cap N_\eta(1),\ (\neg(S \sim_\eta^{l}(1)\, S') \Rightarrow (S \preceq_\eta^{l}(1)\, S'))\} \text{ . } \square$$

При доказательстве утверждения 5.2 используются утверждение 5.1, описание игры Γ_η, определения множеств $L_\eta(1)$, $V_\eta^\circ(1)$, $N_\eta(1)$ и определения отношений $\preceq_\eta^{l}(1)$ и $\sim_\eta^{l}(1)$.

Утверждение 5.3. Справедливо следующее

$$G_\eta(1) = G(1) \text{ . } \square$$

При доказательстве утверждения 5.3 используются утверждения 4.4 и 4.5 и определения функций $G(1)$ и $G_\eta(1)$.

Утверждение 5.4. Справедливо следующее

$$V_\eta^\circ(1) = V^\circ(1)\,.\ \square$$

При доказательстве утверждения 5.4 используются утверждение 5.3, определения множеств $V^\circ(1)$ и $V_\eta^\circ(1)$, определение максиминной стратегии игрока и определения функций $G(1)$ и $G_\eta(1)$.

Утверждение 5.5. Допустим, $S' \in V(1)$ и $S'' \in V(1)$. Тогда справедливо следующее

$$(S' \preceq(1)\, S'') \Leftrightarrow (S' \preceq_\eta(1)\, S'')\,.\ \square$$

При доказательстве утверждения 5.5 используются утверждения 4.8, 4.9 и 4.11, описания игр Γ и Γ_η: в частности, используется включение

$$\underbrace{\{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\}}_{m} \subset V_\eta(2),$$

вытекающее из описания игры Γ_η.

Утверждение 5.6. Справедливо следующее

$$N_\eta(1) = N(1)\,.\ \square$$

При доказательстве утверждения 5.6 используются утверждение 5.5, определения множеств $V_\eta(1)$, $N_\eta(1)$, $N(1)$ и определение недоминируемой стратегии игрока.

Утверждение 5.7. Справедливо следующее

$$V_\eta^\circ(1) \cap N_\eta(1) = V^\circ(1) \cap N(1)\,.\ \square$$

Утверждение 5.7 очевидным образом следует из утверждений 5.4 и 5.6.

Утверждение 5.8. Справедливо следующее

$$L_\eta(1) = \{\, S' \in V^\circ(1) \cap N(1) \,|\, \forall S \in V^\circ(1) \cap N(1),\ (\neg(S \sim_\eta^{l}(1)\, S') \Rightarrow (S \preceq_\eta^{l}(1)\, S'))\,\}\,.\ \square$$

Утверждение 5.8 очевидным образом следует из утверждений 5.2 и 5.7.

Утверждение 5.9. Допустим, $m = 1$. Тогда справедливо следующее

$$L_\eta(1) = \{\, S' \in V^{\circ c}(1) \,|\, \forall S \in V^{\circ c}(1),\ (\neg(S \sim_\eta^{l}(1)\, S') \Rightarrow (S \preceq_\eta^{l}(1)\, S'))\,\}\,.\ \square$$

Утверждение 5.9 очевидным образом следует из утверждений 4.12 и 5.8.

Утверждение 5.10. Допустим, $m \geq 2$. Тогда справедливо следующее

$$L_\eta(1) = \{\, S' \in V^{\circ p}(1) \,|\, \forall S \in V^{\circ p}(1),\ (\neg(S \sim_\eta^{l}(1)\, S') \Rightarrow (S \preceq_\eta^{l}(1)\, S'))\,\}\,.\ \square$$

Утверждение 5.10 очевидным образом следует из утверждений 4.13 и 5.8.

6. Обсуждение

Процесс отыскания лексикографически максиминных стратегий первого игрока в игре Γ_η, основанный на использовании утверждений 5.9 и 5.10, может быть организован следующим образом.

Шаг 0.

1). Формируется множество

$$\{\, S' \in V(1) \,|\, G_\eta(1)(S') = \max_{S \in V(1)} G_\eta(1)(S)\,\},$$

т. е. множество $V_\eta^\circ(1)$.

2). В случае, если $V_\eta^\circ(1)$ – одноэлементно, справедливым оказывается равенство

$$L_\eta(1) = V_\eta^\circ(1)$$

– на этом процесс завершается.

3). Формируется множество B_1, равное $V^{\circ c}(1)$ при $m=1$, и равное $V^{\circ p}(1)$ при $m \geq 2$. При этом в случае, если $m \geq 2$, процесс формирования B_1 начинается с построения последовательности стратегий из $V_\eta^\circ(1)$, в которой (имеется в виду в последовательности) с возрастанием номера элемента стоимость соответствующей стратегии не уменьшается, и пусть при этом для реализации упорядочения используется метод вставки.

4). В случае, если B_1 – одноэлементно, справедливым оказывается равенство

$$L_\eta(1) = B_1$$

– на этом процесс завершается.

5). Для каждого $S \in B_1$ определяются: множество $A_0(S)$, равное $V_\eta(2)$, и элемент $\alpha_0(S)$ из $A_0(S)$, равный $\underbrace{(1, \ldots, 1)}_{m}$.

6). Осуществляется переход к выполнению шага 1.

Шаг k $(1 \leq k < \hat{\eta})$. Здесь и далее $\hat{\eta}$ – обозначение значения разности $(\eta+1)^m - 1$.

1). Для каждого $S \in B_k$ в множестве $A_k(S)$, равном разности

$$A_{k-1}(S) \setminus \{\alpha_{k-1}(S)\},$$

отыскивается некоторый элемент $\alpha_k(S)$, удовлетворяющий условию

$$J(1)(S, \alpha_k(S)) = \min_{a \in A_k(S)} J(1)(S, a).$$

2). Формируется множество B_{k+1}, равное

$$\{S' \in B_k \mid J(1)(S', \alpha_k(S')) = \max_{S \in B_k} J(1)(S, \alpha_k(S))\}.$$

Предполагается, что формирование этого множества реализуется в рамках того же цикла, в котором осуществляется перебор стратегий S из B_k в предыдущем пункте данного шага.

3). В случае, если B_{k+1} – одноэлементно, справедливым оказывается равенство

$$L_\eta(1) = B_{k+1}$$

– на этом процесс завершается, в противном случае осуществляется переход к выполнению шага $k+1$.

Шаг $\hat{\eta}$.

1). Для каждого $S \in B_{\hat{\eta}}$ определяются: множество $A_{\hat{\eta}}(S)$, равное разности

$$A_{\hat{\eta}-1}(S) \setminus \{\alpha_{\hat{\eta}-1}(S)\},$$

и элемент $\alpha_{\hat{\eta}}(S)$, совпадающий с единственным элементом множества $A_{\hat{\eta}}(S)$ (нетрудно убедиться, что в $A_{\hat{\eta}}(S)$ всего один элемент).

2). Формируется множество $B_{\hat{\eta}+1}$, равное

$$\{S' \in B_{\hat{\eta}} \mid J(1)(S', \alpha_{\hat{\eta}}(S')) = \max_{S \in B_{\hat{\eta}}} J(1)(S, \alpha_{\hat{\eta}}(S))\}.$$

Оказывается, что

$$L_{\eta}(1) = B_{\hat{\eta}+1}.$$

Выполнение процесса завершается.

Представленный способ отыскания множества $L_{\eta}(1)$ (основанный на использовании утверждений 5.9 и 5.10; пусть это будет способ I) сравним со способом (называемым далее способом II), который на использовании утверждений 5.9 и 5.10 не основывается.

Описания способов I и II отличаются друг от друга лишь описанием шага 0. Приведём описание шага 0 для способа II.

Шаг 0 (для способа II).

1). Формируется множество

$$\{S' \in V(1) \mid G_{\eta}(1)(S') = \max_{S \in V(1)} G_{\eta}(1)(S)\},$$

т. е. множество $V_{\eta}^{\circ}(1)$.

2). В случае, если $V_{\eta}^{\circ}(1)$ – одноэлементно, справедливым оказывается равенство

$$L_{\eta}(1) = V_{\eta}^{\circ}(1)$$

– на этом процесс завершается.

3). Определяется множество B_1, равное $V_{\eta}^{\circ}(1)$.

4). Для каждого $S \in B_1$ определяются: множество $A_0(S)$, равное $V_{\eta}(2)$, и элемент $\alpha_0(S)$ из $A_0(S)$, равный $\underbrace{(1, \ldots, 1)}_{m}$.

5). Осуществляется переход к выполнению шага 1.

Введём ряд обозначений:

Q' – количество операций сравнения, выполняемых при реализации способа I (здесь и далее – при определении аналогичных количеств – в число учитываемых операций в том числе входят и те операции, при выполнении которых значение управляющей переменной какого-либо цикла сравнивается с пороговым значением для данной переменной);

Q'' – количество операций сравнения, выполняемых при реализации способа II;

Q'_k, $k \in \{0, 1\}$, – количество операций сравнения, выполняемых на шаге k при реализации способа I;

Q''_k, $k \in \{0, 1\}$, – количество операций сравнения, выполняемых на шаге k при реализации способа II;

$Q'_{0(3)}$ – количество операций сравнения, выполняемых при реализации пункта 3 шага 0 способа I;

$Q'_{\overline{2,\hat{\eta}}}$ – количество операций сравнения, выполняемых после реализации шага 1 способа I;

$Q''_{\overline{2,\hat{\eta}}}$ – количество операций сравнения, выполняемых после реализации шага 1 способа II;

μ – число элементов в множестве $V^{\circ}_{\eta}(1)$;

ν – число элементов в множестве $V^{\circ c}(1)$, если $m=1$, и в множестве $V^{\circ p}(1)$, если $m \geq 2$;

δ – значение, равное $\mu - \nu$.

Рассмотрим такой случай: допустим, при реализации способа I выполненными оказываются шаг 0 и шаг 1 и в конце шага 1 осуществляется переход к выполнению шага 2. Нетрудно убедиться в том, что в этом случае и при реализации способа II выполненными оказываются шаг 0 и шаг 1 и в конце шага 1 осуществляется переход к выполнению шага 2.

Также нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае справедливыми оказываются соотношения

$$Q' = Q'_0 + Q'_1 + Q'_{\overline{2,\hat{\eta}}},$$
$$Q'' = Q''_0 + Q''_1 + Q''_{\overline{2,\hat{\eta}}},$$
$$Q'_0 = Q''_0 + Q'_{0(3)},$$
$$Q'_{\overline{2,\hat{\eta}}} \leq Q''_{\overline{2,\hat{\eta}}}.$$

Из данных соотношений достаточно просто получается следующее неравенство

$$Q'' - Q' \geq -Q'_{0(3)} + Q''_1 - Q'_1, \qquad (6.1)$$

а уже отсюда – неравенство, где количество Q' оценивается сверху значением некоторого выражения,

$$Q' \leq Q'' + Q'_{0(3)} + Q'_1 - Q''_1 . \qquad (6.2)$$

Нетрудно убедиться в том, что $Q'_1 \leq Q''_1$, а следовательно, $Q'_1 - Q''_1 \leq 0$. Отсюда и из (6.2) получаем, что

$$Q' \leq Q'' + Q'_{0(3)}, \qquad (6.3)$$

т. е., если Q' и оказывается больше Q'', то не более чем на $Q'_{0(3)}$.

Допустим, $m \geq 2$.

Проведя ряд соответствующих рассуждений, можно убедиться в справедливости таких неравенств

$$Q'_{0(3)} \leq (m+2)\mu^2 - (m-2)\mu - 2, \qquad (6.4)$$

$$Q'_1 \leq 2(\eta+1)^m \nu - 1, \qquad (6.5)$$

$$Q''_1 \geq 2(\eta+1)^m \mu - \mu . \qquad (6.6)$$

Из (6.3) и (6.4), очевидно, следует, что

$$Q' \leq Q'' + (m+2)\mu^2 - (m-2)\mu - 2,$$

т. е., если Q' и оказывается больше Q'' (при $m \geq 2$), то не более чем на

$$(m+2)\mu^2 - (m-2)\mu - 2 .$$

Из соотношений (6.1), (6.4) - (6.6), а также из того, что $\mu - \nu = \delta$, достаточно просто получается, что

$$Q'' - Q' \ \geq \ (2(\eta+1)^m \delta + m\mu + 3) - ((m+2)\mu^2 + 3\mu),$$

т. е., если Q' оказывается меньше Q'', то разница между Q' и Q'' (т. е. значение $Q'' - Q'$) будет не меньше значения выражения

$$(2(\eta+1)^m \delta + m\mu + 3) - ((m+2)\mu^2 + 3\mu) \qquad (6.7)$$

и в связи с этим (при некоторых значениях величин η, m, μ и δ) может оказаться довольно существенной: так, например, при $\eta = 9$, $m = 10$, $\mu = 3$ и $\delta = 1$ значение выражения (6.7) будет равно 19 999 999 916, и, следовательно, разница между Q' и Q'' (т. е. значение $Q'' - Q'$) будет не меньше 19 999 999 916.

7. Заключение

Итак, для исследуемой игры Γ_η (моделирующей процесс закупки средств защиты для компьютерной системы) предложен способ отыскания всех лексикографически максиминных стратегий первого игрока – игрока, ответственного за обеспечение безопасности компьютерной системы. Особенностью предложенного способа является то, что после построения множества $V_\eta^\circ(1)$ максиминных стратегий первого игрока в игре Γ_η процедура поиска лексикографически максиминных стратегий (основанная, в частности, на применении утверждения 4.2 и определений отношений $\preceq_\eta^l(1)$ и $\sim_\eta^l(1)$) в качестве базового множества использует не множество $V_\eta^\circ(1)$, а подмножество этого множества, совпадающее с пересечением множества $V_\eta^\circ(1)$ и множества $N_\eta(1)$ недоминируемых стратегий первого игрока в игре Γ_η. Такой подход, несмотря на издержки, связанные с построением вышеупомянутого подмножества, позволяет в определённых случаях не только компенсировать указанные издержки, но и довольно существенно сократить объём вычислений, связанный с поиском стратегий из $L_\eta(1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К., Вахний Т.В. Теория игр и защита компьютерных систем. Омск: Изд-во ОмГУ. 2013.
2. Вахний Т.В., Гуц А.К., Константинов В.В. Программное приложение для выбора оптимального набора средств защиты компьютерной информации на основе теории игр. *Вестник Омского университета*. 2013;4(70):201-206.
3. Вахний Т.В., Гуц А.К., Кузьмин С.Ю. Оптимальный подбор антивирусной программы и межсетевого экрана с помощью теории игр. *Математические структуры и моделирование*. 2014;4(32):240-246.
4. Вахний Т.В., Гуц А.К., Бондарь С.С. Учёт вероятностей хакерских атак в игровом подходе к подбору программных средств защиты компьютерной информации. *Математические структуры и моделирование*. 2015;3(35):91-105.
5. Вахний Т.В., Гуц А.К., Новиков Н.Ю. Матрично-игровая программа с выбором критерия для определения оптимального набора средств защиты компьютерной системы. *Математические структуры и моделирование*. 2016;2(38):103-115.

6. Быков А.Ю., Гришунин М.В., Крыгин И.А. Игровая задача выбора защищаемых объектов и исследование алгоритма поиска седловой точки на основе модификации метода Брауна-Робинсона. *Вопросы кибербезопасности*. 2019;2(30):2-12. Доступно по: https://cyberrus.com/wp-content/uploads/2019/07/2-12-230-19_1.-Bykov.pdf DOI: 10.21681/2311-3456-2019-2-2-12 (дата обращения: 28.07.2021).
7. Быков А.Ю., Крыгин И.А., Гришунин М.В. и др. Об одном алгоритме поиска седловой точки для непрерывных линейных игр применительно к задачам защиты информации. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Приборостроение*. 2020;4(133):58-74. Доступно по: http://vestnikprib.ru/eng/catalog/icec/insec/1205.html DOI: 10.18698/0236-3933-2020-4-58-74 (дата обращения: 28.07.2021).
8. Быков А.Ю., Крыгин И.А., Гришунин М.В. Задача выбора вычислительных процессов, обеспечивающих защиту информации, для серверов распределенной системы и алгоритмы ее решения. *Вопросы кибербезопасности*. 2020;5(39):30-44. Доступно по: https://cyberrus.com/wp-content/uploads/2020/12/30-44-539-20_3.-Bykov.pdf DOI: 10.21681/2311-3456-2020-05-30-44 (дата обращения: 28.07.2021).
9. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука. 1985.
10. Сушкин В.В. О нахождении всех недоминируемых максиминных стратегий одного из игроков в бескоалиционной игре двух лиц, моделирующей процесс закупки средств защиты для компьютерной системы. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2019;7(3). Доступно по: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=664 DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3.036 (дата обращения: 28.07.2021).
11. Воробьёв Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука. 1984.
12. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир. 1985.
13. Лагунов В.Н. Введение в дифференциальные игры. Вильнюс: Институт математики и кибернетики АН Литовской ССР. 1979.
14. Сушкин В.В., Дозморов Е.Д. О нахождении недоминируемых максиминных стратегий одного из игроков в бескоалиционной игре двух лиц, моделирующей процесс закупки средств защиты для компьютерной системы. *Математические методы управления: Сб. научн. тр.* – Тверь: ТвГУ. 2019;23-31.

REFERENCES

1. Guts A.K., Vakhnii T.V. Teoriya igr i zashchita komp'yuternykh sistem. Omsk: Izd-vo OmGU. 2013. (In Russ)
2. Vakhnii T.V., Guts A.K., Konstantinov V.V. Program application for the choice of the optimum set means of protection of computer information on the basis of the games theory. *Herald of Omsk University*. 2013;4(70):201-206. (In Russ)
3. Vakhnii T.V., Guts A.K., Kuz'min S.Yu. Optimal selection of the antivirus program and the firewall by means of the game theory. *Mathematical Structures and Modeling*. 2014;4(32):240-246. (In Russ)
4. Vakhnii T.V., Guts A.K., Bondar' S.S. The accounting of probabilities of hacker attacks in game approach to selection of defence software for computer information. *Mathematical Structures and Modeling*. 2015;3(35):91-105. (In Russ)
5. Vakhnii T.V., Guts A.K., Novikov N.Yu. Matrix-game program with selection criterion for determination of optimal tool set for computer system protection. *Mathematical Structures and Modeling*. 2016;2(38):103-115. (In Russ)
6. Bykov A.Yu., Grishunin M.V., Krygin I.A. The game problem of selection of assets to protect and research of saddle point search algorithm based on Brown-Robinson method modification. *Voprosy kiberbezopasnosti*. 2019;2(30):2-12. Available at:

https://cyberrus.com/wp-content/uploads/2019/07/2-12-230-19_1.-Bykov.pdf DOI: 10.21681/2311-3456-2019-2-2-12 (accessed 28.07.2021). (In Russ)
7. Bykov A.Yu., Krygin I.A., Grishunin M.V., et al. On one saddle point search algorithm for continuous linear games as applied to information security problems. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*. 2020;4(133):58-74. Available at: http://vestnikprib.ru/eng/catalog/icec/insec/1205.html DOI: 10.18698/0236-3933-2020-4-58-74 (accessed 28.07.2021). (In Russ)
8. Bykov A.Yu., Krygin I.A., Grishunin M.V. The problem of selecting computing processes that provide information protection for servers of a distributed system and algorithms for its solution. *Voprosy kiberbezopasnosti*. 2020;5(39):30-44. Available at: https://cyberrus.com/wp-content/uploads/2020/12/30-44-539-20_3.-Bykov.pdf DOI: 10.21681/2311-3456-2020-05-30-44 (accessed 28.07.2021). (In Russ)
9. Vorob'ev N.N. Teoriya igr dlya ehkonomistov-kibernetikov. M.: Nauka. 1985. (In Russ)
10. Sushkin V.V. About finding all nondominated maximin strategies of one of the players in a two-person noncooperative game that models a process of purchasing protection means for a computer system. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2019;7(3). Available at: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=664 DOI: 10.26102/2310-6018/2019.26.3.036 (accessed 28.07.2021). (In Russ)
11. Vorob'ev N.N. Osnovy teorii igr. Beskoalitsionnye igry. M.: Nauka. 1984. (In Russ)
12. Mulen Eh. Teoriya igr s primerami iz matematicheskoi ehkonomiki. M.: Mir. 1985. (In Russ)
13. Lagunov V.N. Vvedenie v differentsial'nye igry. Vil'nyus: Institut matematiki i kibernetiki AN Litovskoi SSR. 1979. (In Russ)
14. Sushkin V.V., Dozmorov E.D. About finding nondominated maximin strategies of one of the players in a two-person noncooperative game that models a process of purchasing protection means for a computer system. *Matematicheskie metody upravleniya: Sb. nauchn. tr.* – Tver: Tver State University. 2019;23-31. (In Russ)

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Сушкин Вячеслав Вячеславович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерной безопасности и математических методов управления, математический факультет, Тверской государственный университет, Тверь, Российская Федерация.
e-mail: vsushkin@mail.ru

Vyacheslav V. Sushkin, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Computer Security and Mathematical Control Methods, Faculty of Mathematics, Tver State University, Tver, Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 03.08.2021; одобрена после рецензирования 16.09.2021; принята к публикации 17.09.2021.

The article was submitted 03.08.2021; approved after reviewing 16.09.2021; accepted for publication 17.09.2021.