

УДК 550.34.06

DOI: [10.26102/2310-6018/2022.36.1.008](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2022.36.1.008)

## Моделирование напряженно-деформированного состояния геологической среды при строительстве (часть 2)

В.А. Минаев✉, Р.О. Степанов

Московский государственный технический университет  
им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
[mIva@yandex.ru](mailto:mIva@yandex.ru)✉

**Резюме.** В статье рассмотрены описание и результаты реализации региональной и локальной математических моделей, созданных для решения проблемы оценки напряжений, деформаций и смещений в геологической среде. В региональной модели основными факторами, обуславливающими возникновение напряжений, смещений и деформаций геологической среды, являются неоднородности распределения аномального гравитационного поля в изостатической редукции и особенности рельефа поверхности Мохо. Для описания локальной детерминированной модели, с помощью которой оценивается напряженно-деформированное состояние трехмерного упругого пространства, использованы уравнения в перемещениях, решаемые методом Галеркина. Компьютерные версии моделей, обеспеченные цифровой информацией, открывают принципиально новые возможности для строительной сферы при решении задач оценки, анализа и прогнозирования сейсмических характеристик геологической среды. Математические модели и полученные с их применением расчеты являются надежной основой в сфере проектирования и строительства зданий и сооружений в сложных геологических условиях. Изыскательские работы и само строительство требуют существенных материально-технических и финансовых ресурсов. Делается вывод, что применение современных цифровых технологий оценки, анализа и прогнозирования сейсмических рисков снижает неоправданные финансовые потери, развивая интеллектуальную составляющую применяемых способов и методов проектных изысканий.

**Ключевые слова:** строительство, компьютерное моделирование, геологическая среда, напряженно-динамическое состояние, сейсмический риск.

**Для цитирования:** Минаев В.А., Степанов Р.О. Моделирование напряженно-деформированного состояния геологической среды при строительстве (часть 2). *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2022;10(1). Доступно по: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1062>  
DOI: 10.26102/2310-6018/2022.36.1.008

## Modeling of the geological environment stress-strain state during construction (part 2)

V.A. Minaev✉, R.O. Stepanov

Bauman Moscow State Technical University,  
Moscow, Russian Federation  
[mIva@yandex.ru](mailto:mIva@yandex.ru)✉

**Abstract:** The article presents the description and results of the implementation of regional and local mathematical models, created to address the problem of estimating stresses, deformations and displacements in the geological environment. In the regional model, the main factors, causing the occurrence of stresses, displacements and deformations of the geological environment, are the

inhomogeneities of the anomalous gravitational field distribution in isostatic reduction and the features of the Moho surface relief. To describe a local deterministic model, which is employed to estimate the stress-strain state of a three-dimensional elastic space, the displacement equations, solved by the Galerkin method, are utilized. Computer versions of models, provided with digital information, open up fundamentally new opportunities for the construction sector in carrying out the tasks of assessment, analysis and forecasting of the geological environment seismic characteristics. Mathematical models and calculations, obtained with their application, are a reliable basis in the field of design and construction of buildings and structures under difficult geological conditions. Survey work and the construction itself require significant material, technical and financial resources. It is concluded that the use of modern digital technologies for assessing, analyzing and predicting seismic risks reduces unjustified losses and develops the intellectual component of the methods exploited as well as methods of design surveys.

**Keywords:** construction, computer modeling, geological environment, stress-dynamic state, seismic risk.

**For citation:** Minaev V.A., Stepanov R.O. Modeling of the geological environment stress-strain state during construction (part 2). *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2022;10(1). Available from: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1062> DOI: 10.26102/2310-6018/2022.36.1.008 (In Russ).

## Введение

Статья, являясь частью второй серии авторских публикаций, продолжает последовательное изложение результатов, связанных с моделированием сейсмических рисков в геологической среде при проектировании и строительстве различных объектов. В первой части серии описана вероятностная модель оценки параметров энергетических переходов в напряженно-деформированной геологической среде. В ней дано обоснование того, что для оценки напряжений и смещений требуется комплексирование двух детерминированных моделей – региональной, учитывающей влияние аномального гравитационного поля, и локальной, учитывающей современные тектонические движения. Дадим описание названных моделей.

### Региональная модель и метод расчета ее параметров

В региональной модели предполагается, что основным возмущающим фактором, обуславливающим возникновение напряжений, смещений и деформаций в некотором объеме геологической среды, являются существующие в ней неоднородности, связанные с распределением аномального гравитационного поля в изостатической редукции и особенностями рельефа поверхности (границы) Мохо (Мохоровичича). Такая модель, как показали проведенные исследования, позволяет получать достоверные результаты при оценках сейсмического риска [1-4].

В качестве региональной применим модель оценки пространственно-динамических характеристик опасных эндогенных геологических процессов, хорошо зарекомендовавшую себя при расчетах напряженно-деформированного состояния геологической среды для различных регионов нашей планеты [5-7].

Приведем уравнения для составляющих вектора смещений в геологической среде [8]:

$$\begin{cases} u_x = \frac{k_x}{2\mu} \{ [k(B + Dz) + C]shkz + [k(A + Cz) + D]chkz \} \sin k_x \cos k_y y, \\ u_y = \frac{k_y}{2\mu} \{ [k(B + Dz) + C]shkz + [k(A + Cz) + D]chkz \} \cos k_x \sin k_y y, \\ u_z = \frac{k}{2\mu} \left\{ \left[ \frac{2\mu}{\lambda + \mu} D - k(A + Cz) \right] shkz + \left[ \frac{2\mu}{\lambda + \mu} C - k(B + Dz) \right] chkz \right\} \cos k_x x \cos k_y y, \end{cases} \quad (1)$$

где  $A, B, C, D$  – некоторые коэффициенты, определяемые граничными условиями модели при ее реализации для конкретного исследуемого объема геологической среды.

Запишем также уравнения для компонент тензора напряжений [8]:

$$\begin{cases} \sigma_x = \left\{ \left[ kk_x^2(B + Dz) + C \left( k_x^2 + \frac{\lambda k^2}{\lambda + \mu} \right) \right] shkz + \left[ kk_x^2(A + Cz) + D \left( k_x^2 + \frac{\lambda k^2}{\lambda + \mu} \right) \right] chkz \right\} \times \\ \times \cos k_x x \cos k_y y, \\ \sigma_y = \left\{ \left[ kk_y^2(B + Dz) + C \left( k_y^2 + \frac{\lambda k^2}{\lambda + \mu} \right) \right] shkz + \left[ kk_y^2(A + Cz) + D \left( k_y^2 + \frac{\lambda k^2}{\lambda + \mu} \right) \right] chkz \right\} \times \\ \times \cos k_x x \cos k_y y, \\ \sigma_z = k^2 \left\{ \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} C - k(B + Dz) \right] shkz + \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} D - k(A + Cz) \right] chkz \right\} \cos k_x x \cos k_y y, \\ \tau_{xy} = -k_x k_y \{ [k(B + Dz) + C]shkz + [k(A + Cz) + D]chkz \} \sin k_x x \sin k_y y, \\ \tau_{yz} = kk_y \left\{ \left[ k(A + Cz) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} D \right] shkz + \left[ k(B + Dz) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} C \right] chkz \right\} \cos k_x x \sin k_y y, \\ \tau_{xz} = kk_x \left\{ \left[ k(A + Cz) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} D \right] shkz + \left[ k(B + Dz) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} C \right] chkz \right\} \sin k_x x \cos k_y y. \end{cases} \quad (2)$$

Представим граничные условия региональной математической модели в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_z(x, y, h) + \rho(x, y, h) \cdot gu_z(x, y, h) = 0, \\ \sigma_z(x, y, 0) + \delta\rho \cdot gu_z(x, y, 0) = \rho(x, y, 0)\Delta g(x, y)H(x, y), \\ \tau_{xz}(x, y, h) = 0, \\ \tau_{xz}(x, y, 0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\sigma_z$  – вертикальные нормальные напряжения;  $\tau_{xz}$  – сдвиговые вертикальные напряжения в плоскости  $XZ$  (в плоскости  $YZ$  условия для вертикальных сдвиговых напряжений будут аналогичными);  $u_z$  – вертикальные смещения в геологической среде;  $\delta\rho$  – скачок плотности на границе раздела земная кора – литосферная мантия (на границе Мохо);  $\rho$  – значение плотности на соответствующей глубине и в соответствующей точке с координатами  $(x, y)$ ;  $\Delta g$  – значение аномалии гравитационного поля в точке с координатами  $(x, y)$ ;  $H(x, y)$  – глубина залегания границы Мохо;  $g$  – ускорение свободного падения, которое принимается постоянным для любой точки  $(x, y, z)$  модельного пространства;  $h$  – толщина модельного пространства.

Первое уравнение системы (3) – это условие компенсации воздействий на верхней

границе модели (дневной поверхности Земли). Второе – условие влияния возмущений от распределенной «нагрузки» на нижней границе модели (границе Мохо). Третье и четвертое уравнения системы (3) отражают факт отсутствия вертикальных сдвиговых напряжений на верхней и нижней границах модельного пространства.

Подставим в граничные условия (3) соотношения для соответствующих компонент  $\sigma_z, \tau_{xz}$  тензора геодинамических напряжений – уравнения (2) и вертикальной составляющей смещений  $u_z$  в геосреде – уравнения (1):

$$\begin{cases} \sigma_z^{(k)} = k^2 \left\{ \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} C - k(B + Dz) \right] sh(kz) + \left[ \frac{\mu}{\lambda + \mu} D - k(A + Cz) \right] ch(kz) \right\} \cos k_x x \cos k_y y, \\ \tau_{xz}^{(k)} = k k_x \left\{ \left[ k(A + Cz) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} D \right] sh(kz) + \left[ k(B + Dz) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} C \right] ch(kz) \right\} \sin k_x x \cos k_y y, \\ u_z^{(k)} = \frac{k}{2\mu} \left\{ \left[ \frac{2\mu}{\lambda + \mu} D - k(A + Cz) \right] sh(kz) + \left[ \frac{2\mu}{\lambda + \mu} C - k(B + Dz) \right] ch(kz) \right\} \cos k_x x \cos k_y y, \end{cases} \quad (4)$$

где  $k_x = \frac{\pi m}{a}$ ;  $k_y = \frac{\pi n}{b}$ ;  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$  ( $m, n$  – порядковые номера гармоник по осям  $X$  и  $Y$ , соответственно;  $a$  – длина модельного пространства (по оси  $X$ );  $b$  – ширина модельного пространства (по оси  $Y$ );  $A, B, C, D$  – неизвестные коэффициенты, входящие в бигармоническую функцию вида:

$$\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (A_{mn} + D_{mn} z) sh(kz) + (B_{mn} + C_{mn} z) ch(kz) \right\} \cos k_x x \cos k_y y. \quad (5)$$

Распределенная «нагрузка»  $N(x, y)$  также представляется в виде периодической функции (соотношение приведено для  $k$ -й гармоники):

$$N^{(k)}(x, y) = \rho(x, y, 0) \Delta g^{(k)}(x, y) H(x, y) \cos k_x x \cos k_y y. \quad (6)$$

Во всех соотношениях полагается, что величины  $\rho, \lambda, \mu$  являются функциями  $x, y, z$ .

После подстановки соотношений (4) в (3) и ряда упрощений получим:

$$\begin{cases} \left\{ \left[ \frac{\mu k}{\lambda + \mu} C - k^2(B + Dh) \right] sh(kh) + \left[ \frac{\mu k}{\lambda + \mu} D - k^2(A + Ch) \right] ch(kh) \right\} + \left\{ \left[ \frac{\rho g}{\lambda + \mu} D - \frac{k \rho g}{2\mu} (A + Ch) \right] sh(kh) + \left[ \frac{\rho g}{\lambda + \mu} C - \frac{k \rho g}{2\mu} (B + Dh) \right] ch(kh) \right\} = 0, \\ \left( \frac{\mu k^2}{\lambda + \mu} D - k^3 A \right) + \left( \frac{k \delta \rho g}{\lambda + \mu} C - \frac{k^2 \delta \rho g}{2\mu} B \right) = \rho \Delta g^{(k)}(x, y) H(x, y), \\ \left( kA + Ckh + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} D \right) sh(kh) + \left( kB + Dkh + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} C \right) ch(kh) = 0, \\ kB + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} C = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Последовательно выражая из системы уравнений (7) величины коэффициентов  $A, B, C, D$ , входящих в выражения для компонент тензора геодинамических напряжений и составляющих вектора смещений в геологической среде, и подставляя их в остальные

уравнения, в итоге придем к следующей системе:

$$\begin{cases} A = -h \cdot F(x, y, z) \cdot T(x, y, z), \\ B = -\frac{\lambda F(x, y, z) T(x, y, z)}{k(\lambda + \mu)}, \\ C = F(x, y, z) T(x, y, z), \\ D = F(x, y, z) M(x, y, z), \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{где } F(x, y, z) = \frac{\rho \cdot g^{(k)}(x, y) \cdot H(x, y)}{k \cdot \theta(x, y, z)}; \quad T(x, y, z) = \frac{\theta(x, y, z) - L(k, h) \cdot M(x, y, z)}{R(x, y, z)};$$

$$M(x, y, z) = sh(kh) + \frac{\rho g(\lambda + 2\mu)}{2\mu k(\lambda + \mu)} ch(kh); \quad R(x, y, z) = k^2 h + \frac{\delta \rho \cdot g \cdot (\lambda + 2\mu)}{2\mu \cdot (\lambda + \mu)};$$

$$\theta(x, y, z) = \left[ k^2 h + \frac{\delta \rho g(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)} \right] \frac{\left[ k(1 + kh \cdot cth(kh)) \left[ sh(kh) + \frac{\rho g(\lambda + 2\mu)}{2\mu k(\lambda + \mu)} ch(kh) \right] \right]}{k^2 h + \frac{\delta \rho g(\lambda + 2\mu)}{2\mu(\lambda + \mu)}} -$$

$$- \left[ \frac{\rho g(\lambda + 2\mu + kh(\lambda + \mu) cth(kh))}{2\mu k(\lambda + \mu)} - kh \right] sh(kh) - \left( 1 - \frac{\rho gh}{2\mu} + kh \cdot cth(kh) \right) ch(kh);$$

$$L(k, h) = k(1 + kh \cdot cth(kh)).$$

Сами же компоненты тензора геодинамических напряжений и составляющих вектора смещений в геологической среде для региональной детерминированной модели рассчитываются на основании соотношений (1) и (2).

### Локальная модель и метод ее решения

Для описания локальной детерминированной модели, с помощью которой решается задача оценки напряженно-деформированного состояния трехмерного упругого пространства, воспользуемся известными уравнениями в перемещениях, задающимися в общем виде [9] как:

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \rho X = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \rho Y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \\ \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \rho Z = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ;  $\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ ;  $u_x, u_y, u_z$  – компоненты вектора смещений в геологической среде;  $\mu$  – модуль сдвига;  $\rho$  – плотность геологической среды;  $t$  – время;  $X, Y, Z$  – проекции массовых сил на соответствующие координатные оси.

Рассматривая стационарный случай, а также допуская в первом приближении отсутствие воздействия массовых сил, представим систему уравнений (9) в виде:

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\ \mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \\ \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для нахождения компонент вектора смещений в геологической среде, входящих в уравнения (10), воспользуемся известным решением Галеркина, представляемым в прямоугольных координатах соотношением [10]:

$$2\mu(u_x, u_y, u_z) = 2(1-\nu)\nabla^2 \varphi_{1,2,3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x, y, z}, \quad (11)$$

где  $\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ ;  $\varphi = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}$ ;  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  – некоторые неизвестные функции;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Соотношения (11) представляют собой обобщенное задание компонент вектора смещений в геологической среде. Приведем полученное из выражения (11) путем последовательных преобразований представление указанных компонент:

$$u_x = \frac{1-\nu}{\mu} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial z} \right), \quad (12.1)$$

$$u_y = \frac{1-\nu}{\mu} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial z} \right), \quad (12.2)$$

$$u_z = \frac{1-\nu}{\mu} \left( \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} \right). \quad (12.3)$$

Решим вопрос о виде функций  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ . Для этого, подставляя соотношения (12.1)-(12.3) в уравнения системы (10), находя соотношения для частных производных и далее осуществляя достаточно трудоемкие процедуры преобразований, а также учитывая, что  $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$ , приходим к решению в виде следующей системы бигармонических функций [8]:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = \{(A_1 + A_2 z)shkz + (A_3 + A_4 z)chkz\} \cos k_x x \cos k_y y, \\ \varphi_2(x, y, z) = \{(B_1 + B_2 z)shkz + (B_3 + B_4 z)chkz\} \cos k_x x \cos k_y y, \\ \varphi_3(x, y, z) = \{(C_1 + C_2 z)shkz + (C_3 + C_4 z)chkz\} \cos k_x x \cos k_y y, \end{cases} \quad (13)$$

где  $A_i, B_i, C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) – коэффициенты, определяемые из условий решения той или иной конкретной задачи;  $k_x = \frac{\pi m}{a}$ ,  $k_y = \frac{\pi n}{b}$ ,  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ;  $m, n$  – порядковые номера гармоник вдоль осей  $X$  и  $Y$ , соответственно;  $a, b$  – длина и ширина рассматриваемого модельного объема геологической среды;  $x, y, z$  – координаты некоторой расчетной точки.

Функции  $\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z), \varphi_3(x, y, z)$  позволяют построить соотношения при

отсутствии массовых сил для компонент вектора смещений в геологической среде, удовлетворяющих системе уравнений (10). Нас же интересует случай, когда массовые силы учитываются, т. е. необходимо найти решение для системы неоднородных уравнений (9):

$$\begin{cases} \mu \nabla^2 u_x + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\xi X, \\ \mu \nabla^2 u_y + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} = -\xi Y, \\ \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\xi Z, \end{cases} \quad (14)$$

или системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^2 \partial z^2} = -\xi X, \\ \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^2 \partial z^2} = -\xi Y, \\ \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_3}{\partial y^2 \partial z^2} = -\xi Z. \end{cases} \quad (15)$$

Где  $\xi = \frac{2\rho(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$ ;  $\lambda, \mu$  – упругие модули Ламе.

Рассмотрим нахождение решения на примере первого уравнения системы (15). Для этого функцию  $\varphi_1(x, y, z)$  представим в следующем виде:

$$\varphi_1(x, y, z) = \chi_1(z) \cos k_x x \cos k_y y, \quad (16)$$

где  $\chi_1(z) = (A_1 + A_2 \cdot z) \cdot sh(kz) + (A_3 + A_4 \cdot z) \cdot ch(kz)$  зависит только от переменной  $z$ .

Функцию, задающую массовые силы в первом уравнении, представим соотношением:

$$\xi X = \xi X(z) \cdot \cos(k_x x) \cos(k_y y). \quad (17)$$

Находя все частные производные от  $\varphi_1(x, y, z)$  и подставляя их вместе с (17) в первое уравнение системы (15), затем делая соответствующие упрощения, получим неоднородное дифференциальное уравнение 4-го порядка:

$$X_1^m(z) - 2k^2 \cdot X_1^n(z) + k^4 X(z) = -\xi X(z) \quad (18)$$

Его общее решение известно [11] как функция вида:

$$X_1(z) = (A_1 + A_2 z) shkz + (A_3 + A_4 z) chkz \quad (19)$$

Частное решение уравнения (18) ищется методом вариации произвольной постоянной [12]. Прделав необходимые для этого операции и последующие преобразования, частное решение первого уравнения из системы (15) находим в виде:

$$\varphi_1(x, y, z) = \left\{ (A_1 + A_2 z) shkz + (A_3 + A_4 z) chkz - \frac{\xi X}{k^4} \right\} \cos k_x x \cos k_y y. \quad (20.1)$$

Аналогичные решения находятся для функций  $\varphi_2(x, y, z)$  и  $\varphi_3(x, y, z)$ :

$$\varphi_2(x, y, z) = \left\{ (B_1 + B_2 z)shkz + (B_3 + B_4 z)chkz - \frac{\xi Y}{k^4} \right\} \cos k_x x \cos k_y y, \quad (20.2)$$

$$\varphi_3(x, y, z) = \left\{ (C_1 + C_2 z)shkz + (C_3 + C_4 z)chkz - \frac{\xi Z}{k^4} \right\} \cos k_x x \cos k_y y. \quad (20.3)$$

Компоненты вектора смещений в геологической среде определяются из соотношений:

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial z} \right), \\ u_y = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left( \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y \partial z} \right), \\ u_z = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left( \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y \partial z} \right). \end{cases} \quad (21)$$

Для упрощения записи в соотношениях (21) опущены аргументы бигармонических функций.

Массовые силы в рассматриваемом случае есть ни что иное, как воздействие гравитационного поля Земли, поэтому учтем влияние на напряженно-деформированное состояние объема геологической среды только их  $Z$ -составляющей.

Тогда для описания компонент вектора смещений в геологической среде воспользуемся только одной бигармонической функцией. Для удобства дальнейших аналитических выкладок обозначим эту функцию через  $\varphi(x, y, z)$ :

$$\varphi(x, y, z) = \left\{ (A + Bz)shkz + (C + Dz)chkz - \frac{2\rho(\lambda + \mu)}{k^4(\lambda + 2\mu)} Z \right\} \cos k_x x \cos k_y y. \quad (22)$$

Отметим, что в формуле (22) возвращена прежняя величина, ранее обозначенная как  $\xi = \frac{2\rho(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$ , а также для удобства введены разнобуквенные обозначения коэффициентов –  $A, B, C, D$  вместо  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

В итоге компоненты вектора смещений в геологической среде определяются следующими выражениями:

$$\begin{cases} u_x(x, y, z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial x \partial z}, \\ u_y(x, y, z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y \partial z}, \\ u_z(x, y, z) = \frac{1}{2(\lambda + \mu)} \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial z^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu(\lambda + \mu)} \left( \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y, z)}{\partial y^2} \right). \end{cases} \quad (23)$$

Принимая  $Z$ -компоненты массовых сил в качестве постоянной величины для элементарного объема геологической среды с координатами  $(x, y, z)$  и опуская аргументы бигармонической функции, находим соотношения для частных производных функции:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -k_x^2 \left[ (A + Bz)shkz + (C + Dz)chkz - \frac{2\rho(\lambda + \mu)}{k^4(\lambda + 2\mu)} Z \right] \cos k_x x \cos k_y y, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -k_y^2 \left[ (A + Bz)shkz + (C + Dz)chkz - \frac{2\rho(\lambda + \mu)}{k^4(\lambda + 2\mu)} Z \right] \cos k_x x \cos k_y y, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = k[2Bchkz + k(A + Bz)shkz + 2Dshkz + k(C + Dz)chkz] \cos k_x x \cos k_y y, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = -k_x [Bshkz + k(A + Bz)chkz + Dchkz + k(C + Dz)shkz] \sin k_x x \cos k_y y, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = -k_y [Bshkz + k(A + Bz)chkz + Dchkz + k(C + Dz)shkz] \cos k_x x \sin k_y y. \end{array} \right. \quad (24)$$

Тогда Z-компонента вектора смещений в геологической среде после соответствующих преобразований представляется в виде:

$$u_z(x, y, z) = \left\{ -\frac{k^2}{2\mu} [(A + Bz)shkz + (C + Dz)chkz] + \frac{k}{\lambda + \mu} (Bchkz + Dshkz) + \frac{\rho Z}{\mu k^2} \right\} \times \cos k_x x \cos k_y y. \quad (25.1)$$

Проделав аналогичные выкладки, найдем соотношения для X и Y компонент вектора смещений в геологической среде:

$$u_x(x, y, z) = \frac{k_x}{2\mu} \{ k[(A + Bz)chkz + (C + Dz)shkz] + Bshkz + Dchkz \} \sin k_x x \cos k_y y, \quad (25.2)$$

$$u_y(x, y, z) = \frac{k_y}{2\mu} \{ k[(A + Bz)chkz + (C + Dz)shkz] + Bshkz + Dchkz \} \cos k_x x \sin k_y y. \quad (25.3)$$

Выражения для компонент тензора напряжений находятся из соотношений обратной формы закона Гука:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \\ \sigma_y = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \\ \sigma_z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \quad \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{array} \right. \quad (26)$$

Вычисляя частные производные от компонент вектора смещений в геологической среде и подставляя их в (26), после ряда преобразований получим:

$$\sigma_z(x, y, z) = -k^2 \left\{ k[(A + Bz)chkz + (C + Dz)shkz] - \frac{\mu}{\lambda + \mu} (Bshkz + Dchkz) \right\} \cos k_x x \cos k_y y. \quad (27)$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = k k_x \left\{ k[(A + Bz)shkz + (C + Dz)chkz] + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (Bchkz + Dshkz) - \frac{\rho Z}{k^3} \right\} \sin k_x x \cos k_y y. \quad (28)$$

Для компактности опуская аргументы у функций напряжений и смещений, приведем расчетные соотношения для остальных компонент тензора напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_x = \left\{ kk_x^2[(A + Bz)chkz + (C + Dz)shkz] + \frac{(2\lambda + \mu)k_x^2 + \lambda k_y^2}{\lambda + \mu} (Bshkz + Dchkz) \right\} \cos k_x x \cos k_y y, \\ \sigma_y = \left\{ kk_y^2[(A + Bz)chkz + (C + Dz)shkz] + \frac{\lambda k^2 + (\lambda + \mu)k_y^2}{\lambda + \mu} (Bshkz + Dchkz) \right\} \cos k_x x \cos k_y y, \\ \tau_{xy} = -k_x k_y \{k[(A + Bz)chkz + (C + Dz)shkz] + Bshkz + Dchkz\} \sin k_x x \sin k_y y, \\ \tau_{yz} = kk_y \left\{ k[(A + Bz)shkz + (C + Dz)chkz] + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (Bchkz + Dshkz) - \frac{\rho Z}{k^3} \right\} \cos k_x x \sin k_y y. \end{cases} \quad (29)$$

Используя полученные соотношения, построим модель оценки напряжений и смещений в геологической среде, возникающих вследствие воздействия локальных вертикальных и горизонтальных тектонических движений.

Граничные условия модели будем полагать следующими:

$$\begin{cases} u_x(x, y, h) = S_x(x, y, h), \\ u_z(x, y, h) = S_z(x, y, h), \\ \tau_{xz}(x, y, h) = 0, \\ \tau_{xz}(x, y, 0) = 0, \end{cases} \quad (30.1)$$

$$\begin{cases} u_y(x, y, h) = S_y(x, y, h), \\ u_z(x, y, h) = S_z(x, y, h), \\ \tau_{yz}(x, y, h) = 0, \\ \tau_{yz}(x, y, 0) = 0. \end{cases} \quad (30.2)$$

В соотношениях (30.1) и (30.2) приняты следующие обозначения:  $u_x, u_y, u_z$  – компоненты вектора смещений в геологической среде;  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  – сдвиговые напряжения в плоскостях  $XZ$  и  $YZ$ , соответственно;  $S_x, S_y$  – проекции тектонических горизонтальных движений на оси  $X$  и  $Y$ ;  $S_z$  – вертикальные тектонические движения;  $h$  – толщина модельного объема геологической среды.

Первое и второе уравнения систем (30.1) и (30.2) связывают горизонтальные и вертикальные тектонические движения со смещениями на верхней границе модели (дневной поверхности Земли), а третье и четвертое уравнения свидетельствуют об отсутствии вертикальных сдвиговых напряжений на верхней и нижней границах модельного пространства.

Подставим соотношения (25.1) – (25.2) и (28) в уравнения системы (30.1):

$$\begin{cases} \frac{k_x}{2\mu} \{k[(A + Bh)chkh + (C + Dh)shkh] + Bshkh + Dchkh\} \sin k_x x \cos k_y y = S_x^{(k)} \sin k_x x \cos k_y y, \\ \left\{ -\frac{k^2}{2\mu} [(A + Bh)shkh + (C + Dh)chkh] + \frac{k}{\lambda + \mu} (Bchkh + Dshkh) + \frac{\rho g^{(k)}}{\mu k^2} \right\} \cos k_x x \cos k_y y = \\ = S_z^{(k)} \cos k_x x \cos k_y y, \\ k_x \left\{ k^2 [(A + Bh)shkh + (C + Dh)chkh] + \frac{\lambda k}{\lambda + \mu} (Bchkh + Dshkh) - \frac{\rho g^{(k)}}{k^2} \right\} \sin k_x x \cos k_y y = 0, \\ k_x \left( k^2 C + \frac{\lambda k}{\lambda + \mu} B - \frac{\rho g^{(k)}}{k^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

В уравнениях системы (31) верхний индекс  $k$  для величин горизонтальных смещений  $S_x^{(k)}$ , вертикальных смещений  $S_z^{(k)}$  и ускорения силы тяжести  $g^{(k)}$  указывает на номер гармоники их разложения в ряды Фурье.

Преобразовывая систему уравнений (31), запишем:

$$\left\{ \begin{array}{l} Akchkh + B(khchkh + shkh) + Ckshkh + D(khshkh + chkh) = \frac{2\mu S_x^{(k)}}{k_x}, \\ A\left(-\frac{k^2 \cdot shkh}{2\mu}\right) + B\left(\frac{k \cdot chkh}{\lambda + \mu} - \frac{k^2 h \cdot shkh}{2\mu}\right) + C\left(-\frac{k^2 \cdot chkh}{2\mu}\right) + D\left(\frac{k \cdot shkh}{\lambda + \mu} - \frac{k^2 h \cdot chkh}{2\mu}\right) = \\ = S_z^{(k)} - \frac{\rho g^{(k)}}{\mu k^2}, \\ Ak^2 \cdot shkh + B\left(k^2 h \cdot shkh + \frac{\lambda k \cdot chkh}{\lambda + \mu}\right) + Ck^2 \cdot chkh + D\left(k^2 h \cdot chkh + \frac{\lambda k \cdot shkh}{\lambda + \mu}\right) = \frac{\rho g^{(k)}}{k^2}, \\ B \frac{\lambda k}{\lambda + \mu} + Ck^2 = \frac{\rho g^{(k)}}{k^2}. \end{array} \right. \quad (32)$$

Для того, чтобы система уравнений была совместной, а модельные построения – адекватными, требуется отличие от нуля определителя  $W$  матрицы левых частей уравнений (32).  $W$  записывается в виде:

$$W = \begin{vmatrix} k \cdot chkh & kh \cdot chkh + shkh & k \cdot shkh & kh \cdot shkh + chkh \\ \frac{k^2 \cdot shkh}{2\mu} & \frac{k \cdot chkh}{\lambda + \mu} - \frac{k^2 h \cdot shkh}{2\mu} & -\frac{k^2 \cdot chkh}{2\mu} & \frac{k \cdot shkh}{\lambda + \mu} - \frac{k^2 h \cdot chkh}{2\mu} \\ k \cdot shkh & k^2 h \cdot shkh + \frac{\lambda k \cdot chkh}{\lambda + \mu} & k^2 \cdot chkh & k^2 h \cdot chkh + \frac{\lambda k \cdot shkh}{\lambda + \mu} \\ 0 & \frac{\lambda k}{\lambda + \mu} & k^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (33)$$

Найдём величину определителя:

$$W = -\left[ k^2 \cdot (\lambda + 2\mu) / (2\mu(\lambda + \mu)) \right] \cdot \left[ kh \cdot ch(kh) - \mu / ((\lambda + \mu) \cdot sh(kh)) \right] \quad (34)$$

По существу, нужно показать, что выражение  $kh \cdot ch(kh) - \mu / ((\lambda + \mu) \cdot sh(kh)) \neq 0$

Выполним последовательное умножение его членов на величины  $1/ch(kh)$ ;  $(\lambda + \mu)/\mu$  и  $1/(kh)$ . В итоге получим выражение  $(\lambda + \mu)/\mu - th(kh)/(kh)$ . Первое слагаемое в нем заведомо больше единицы. Числитель второго слагаемого по определению удовлетворяет условию  $th(kh) \leq 1$ . При стремлении аргумента гиперболического тангенса к бесконечности второе слагаемое стремится к нулю, а определитель  $W$  остается всегда большим нуля. А теперь рассмотрим предел второго слагаемого при стремлении аргумента к нулю. Поскольку  $\left[ th(kh) \right]'_k = \frac{h}{ch^2(kh)^2}$ ;

$(kh)'_k = h$ , то отношение производных числителя и знаменателя равно  $\frac{1}{ch^2(kh)}$ . Так как

$ch^2(kh) \geq 1$ , то  $\frac{th(kh)}{kh} < 1$  при  $k > 0$ .

Отсюда следует вывод, что выражение  $\frac{\lambda + \mu}{\mu} - \frac{[th(kh)]}{kh} > 0$  при любых значениях входящих в него величин. Таким образом, определитель  $W$  никогда не обращается в ноль, а система (32) – совместна.

Находя коэффициенты  $A, B, C, D$ , входящие в уравнения данной системы, получим выражения, с помощью которых можно рассчитать величины напряжений и смещений.

Полные величины напряжений и смещений определяются на основании комплексирования расчетов по граничным условиям (30.1) и (30.2):

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_x^{(1)}, \sigma_y = \sigma_y^{(2)}, \sigma_z = \frac{\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}}{2} \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}^{(1)}, \tau_{yz} = \tau_{yz}^{(2)}, \tau_{xy} = \frac{\tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(2)}}{2} \\ u_x = u_x^{(1)}, u_y = u_y^{(2)}, u_z = \frac{u_z^{(1)} + u_z^{(2)}}{2} \end{cases} \quad (35)$$

Верхние индексы в соотношениях (35) соответствуют: индекс 1 – граничным условиям (30.1), а индекс 2 – граничным условиям (30.2).

Использование локальной модели совместно с региональной позволяет найти величины полных сдвиговых напряжений, необходимых для оценки сейсмических рисков для тестовых территорий.

### Результаты модельных экспериментов

Для практической реализации региональной и локальной детерминированных моделей оценки напряженно-деформированного состояния геологической среды, а также вероятностной модели оценки сейсмического риска на территории тестового региона, в среде Borland Delphi 7.0 разработано специальное программное обеспечение. А именно, программа RegionModel v.1.0 предназначена для численной реализации региональной, а программа LocalModel v.1.0 – локальной детерминированных моделей оценки напряженно-деформированного состояния объема геологической среды. Рассмотрим результаты, полученные на основании совместной реализации моделей.

Для построения и применения детерминированной региональной модели оценки напряженно-деформированного состояния геологической среды применительно к территории тестового региона (Армения и смежные территории) потребовалось значительное количество информации о геофизических полях.

Так, была использована информация по аномальному гравитационному полю в изостатической редукции, распределению глубины залегания границы Мохо, распределению величин плотностей, модуля сдвига, вязкости геологической среды на расчётных глубинах. Кроме того, применительно к тестовой территории потребовалась дополнительная информация по горизонтальным и вертикальным тектоническим движениям.

На основании указанной информации реализованы детерминированные модели оценки напряженно-деформированного состояния геологической среды для тестовой территории:

- региональная – на базе программы RegionModel;
- локальная – на базе программы LocalModel.

Геофизическая информация получена из базы данных (БД) «Цифровая модель литосферы Земли» [13], разработанной авторами, с помощью специализированной программы оценки геодинамического риска «Литосфера» [14].

Совместное использование региональной и локальной моделей дало возможность определить величины полных сдвиговых напряжений, а затем – величины коэффициентов переходов, входящих в соотношения вероятностной модели оценки сейсмических рисков (реализация программы SeismoRisk). С помощью той же программы выполнены оценки величин сейсмического риска для изучения всех необходимых глубинных уровней. На Рисунках 1 и 2 для примера представлены эквипотенциальные распределения сейсмических рисков для глубинных уровней 10 и 33 км.

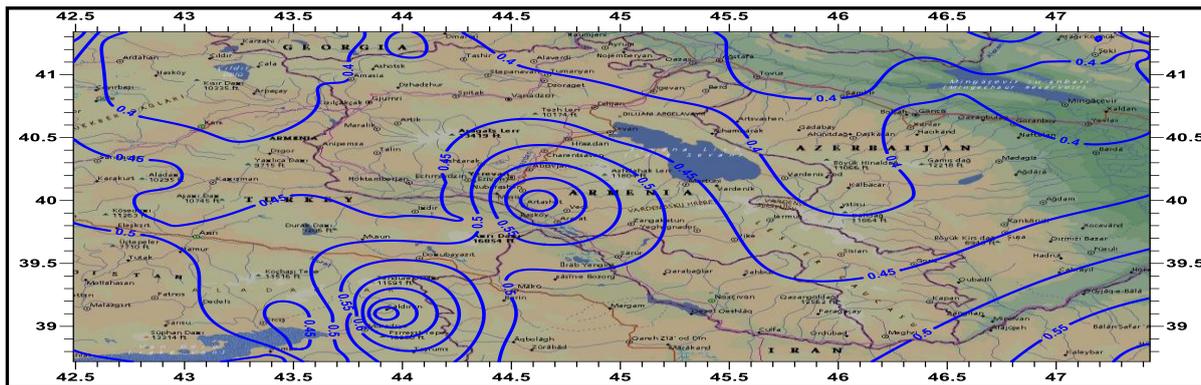


Рисунок 1 – Эквипотенциальное распределение величин сейсмического риска для территории тестового региона на глубине 10 км

Figure 1 – Equipotential distribution of seismic risk values for the test region at a depth of 10 km.

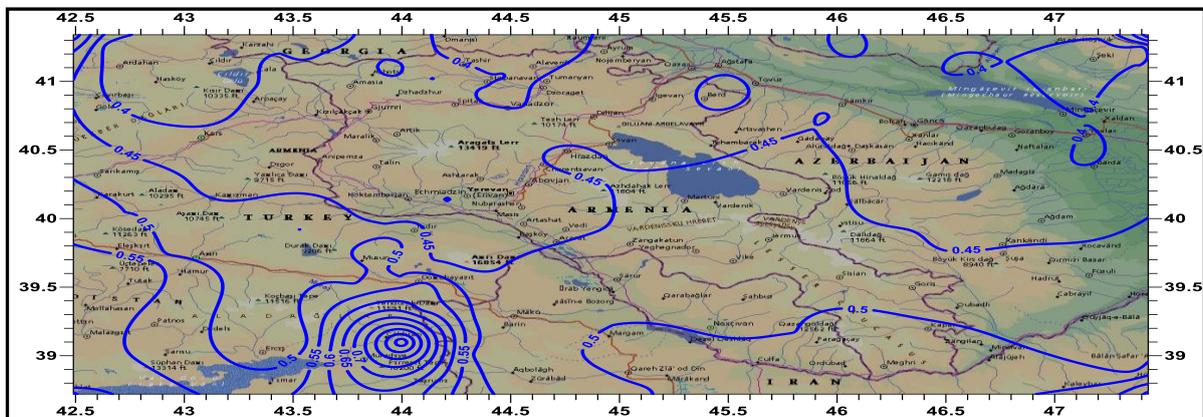


Рисунок 2 – Эквипотенциальное распределение величин сейсмического риска для территории тестового региона на глубине 33 км

Figure 2 – Equipotential distribution of seismic risk values for the test region at a depth of 33 km

Таким образом, в статье описаны две новые модели, позволяющие рассчитать параметры вероятностной модели, зависящие от локально-региональных характеристик геологической среды, что дало возможность определить величины сейсмических рисков на различных глубинах тестовой территории. В итоге, получены все исходные характеристики, позволяющие приступить к количественному соотнесению сейсмических рисков, рассчитанных по математическим моделям, сейсмическим воздействиям, регламентированным в Своде правил (СП) 14.13330.2018 «Строительство в сейсмических районах».

Очевидно, что и математические модели, и полученные с их применением

расчетные материалы являются новыми результатами и с научной, и с практической точек зрения, отражающими реальные и перспективные возможности компьютерного моделирования в сфере проектирования и строительства зданий и сооружений в условиях сложных грунтов, когда изыскательские работы требуют существенных затрат на свое осуществление. В то же время, математические модели и методы, реализуя современные цифровые способы и средства оценки, анализа и прогнозирования в строительной отрасли, позволяют существенно сократить не только время, но и материально-финансовые ресурсы, необходимые на предпроектные изыскания.

### Заключение

В статье рассмотрены обоснование и результаты реализации региональной и локальной математических моделей, созданных для вычисления геодинамических характеристик сложных геологических сред. Указанные модели, будучи реализованными в компьютерной версии и обеспеченными необходимой информацией, открывают принципиально новые возможности для строительной сферы при решении задач оценки, анализа и прогнозирования сейсмических характеристик геологической среды.

Базируясь на современных достижениях геодинамики и цифровых технологиях, математические модели и полученные с их применением расчетные материалы являются надежной основой в сфере проектирования и строительства зданий и сооружений в сложных геологических условиях, когда и изыскательские работы и само строительство требуют существенных материально-технических и финансовых ресурсов, когда любая ошибка мультиплицируется не только в еще большие будущие затраты, но, к сожалению, и в человеческие трагедии.

Именно подобные причины и условия, характеризующие строительную отрасль, вызывают необходимость применения современных цифровых технологий оценки, анализа и прогнозирования сейсмических рисков, снижая неоправданные, подчас необратимые потери и развивая интеллектуальную составляющую применяемых способов и методов проектных изысканий.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Абрамова А.В., Бондарь К.М., Данилов Р.М., В.А. Минаев В.А., Павлова С.А., Попов А.Н., Фаддеев А.О. *Моделирование геодинамических рисков в чрезвычайных ситуациях: монография под ред. К.М. Бондаря, В.А. Минаева, А.О. Фаддеева*. Хабаровск: ДВЮИ МВД России; 2014. 124 с.
2. Минаев В.А., Фаддеев А.О. *Оценки геоэкологических рисков. Моделирование безопасности туристско-рекреационных территорий*. М.: Финансы и статистика, Изд. дом ИНФРА-М; 2009. 370 с.
3. Минаев В.А., Фаддеев А.О. Безопасность и отдых: системный взгляд на проблему рисков. *Труды II Международной научно-практической конференции «Туризм и рекреация: фундаментальные и прикладные исследования»*. М.: Издательство: РИБ «Турист»; 2007. С. 329–334.
4. Минаев В.А., Фаддеев А.О., Абрамова А.В. Разломно-узловая тектоническая модель оценки геодинамической устойчивости территориальных систем. *Проблемы управления рисками в техносфере*. 2014;(29):90–99.
5. Минаев В.А., Фаддеев А.О., Бондарь К.М., Сычев М.П., Видов С.В., Кираковский В.В., Кузьменко Н.А., Попов А.Н. *Математическое моделирование геодинамических рисков: оценки и перспективы; Под ред. В.А. Минаева, А.О. Фаддеева, К.М. Бондаря*.

- Хабаровск: Издательство Дальневосточного юридического института МВД России; 2015. 212 с.
6. Минаев В.А., Топольский Н.Г., Фаддеев А.О., Бондарь К.М., Мокшанцев А.В. *Геодинамические риски и строительство. Математические модели*. М.: Академия ГПС МЧС России; 2017. 208 с.
  7. Минаев В.А., Фаддеев А.О., Кузьменко Н.А. 3-D моделирование миграции опасных эндогенных геологических процессов. *Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета*. 2016;58:64–74.
  8. Минаев В.А., Фаддеев А.О., Кузьменко Н.А. *Моделирование и оценка геодинамических рисков*. М.: «РТСофт» – «Космоскоп»; 2017. 256 с.
  9. Кузьмин Ю.О., Жуков В.С. *Современная геодинамика и вариации физических свойств горных пород*. М.: Горная книга; 2012. 264 с.
  10. Лурье А.И. *Пространственные задачи теории упругости*. М.: Наука; 1952. 432 с.
  11. Ляв А. *Математическая теория упругости*. М-Л.: ОНТИ НКТП, СССР; 1935. 674 с.
  12. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Ленанд; 2019. 336 с.
  13. Минаев В.А., Степанов Р.О., Фаддеев А.О. Геодинамические индикаторы нефтегазоносных бассейнов в Арктической зоне РФ на основе цифровой модели литосферы Земли. *Материалы Всероссийской конференции с международным участием, посвященной 90-летию со дня рождения акад. Николая Павловича Лавёрова «Глобальные проблемы Арктики и Антарктики» отв. ред. акад. РАН А.О. Глико, акад. РАН А. А. Барях, чл.-корр. РАН К. В. Лобанов, чл.-корр. РАН И.Н. Болотов*. 2020. Архангельск. 2-5 ноября. Архангельск, УРО РАН; 2020. С. 257-260.
  14. Минаев В.А., Фаддеев А.О., Невдах Т.М., Ахметшин Т.Р. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «Литосфера» № 2021611454 от 28.01.2021 г.* Федеральная служба по интеллектуальной собственности.

## REFERENCES

1. Abramova A.V., Bondar K.M., Danilov R.M., Minaev V.A., Pavlova S.A., Popov A.N., Faddeev A.O. *Modeling of geodynamic risks in emergency situations: monograph*. Edited by K.M. Bondar, V.A. Minaev, A.O. Faddeev. Khabarovsk: Far Eastern Law Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia; 2014. 124 p. (In Russ.)
2. Minaev V.A., Faddeev A.O. *Assessment of geoeological risks. Modeling the safety of tourist and recreational territories*. Moscow: Finance and Statistics, Publishing House INFRA-Moscow; 2009. 370 p. (In Russ.)
3. Minaev V.A., Faddeev A.O. Safety and recreation: system view on the problem of risks. *Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference «Tourism and Recreation: fundamental and applied research»*. Moscow, Publishing House «Tourist»; 2007. P. 329-334. (In Russ.)
4. Minaev V.A., Faddeev A.O., Abramova A.V. Fault-nodal tectonic model for assessing geodynamic stability of territorial systems *Problemy upravleniya riskami v tekhnosfere = Problems of risk management in the technosphere*. 2014;1(29):90–99. (In Russ.)
5. Minaev V.A., Faddeev A.O., Bondar K.M., Sychev M.P., Vidov S.V., Kirakovsky V.V., Kuzmenko N.A., Popov A.N. *Mathematical modeling of geodynamic risks: estimates and prospects*. Edited by V.A. Minaev, A.O. Faddeev, K.M. Bondar. Khabarovsk: Publishing House of the Far Eastern Law Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia; 2015. 212 p. (In Russ.)

6. Minaev V.A., Topolsky N.G., Faddeev A.O., Bondar K.M., Mokshantsev A.V. *Geodynamic risks and construction. Mathematical models*. Moscow, Academy of GPS of the Ministry of Emergency Situations of Russia; 2017. 208 p. (In Russ.)
7. Minaev V.A., Faddeev A.O., Kuzmenko N.A. 3-D modeling of migration of dangerous endogenous geological processes. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta = Bulletin of the Ryazan State Radio Engineering University*. 2016;58:64–74. (In Russ.)
8. Minaev V.A., Faddeev A.O., Kuzmenko N.A. *Modeling and assessment of geodynamic risks*. Moscow, "RTSoft"– "Kosmoscope"; 2017. 256 p. (In Russ.)
9. Kuzmin Yu.O., Zhukov V.S. *Modern geodynamics and variations of physical properties of rocks*. Moscow, Gornaya kniga; 2012. 264 p. (In Russ.)
10. Lurie A.I. *Spatial problems of elasticity theory*. Moscow, Nauka; 1952. 432 p. (In Russ.)
11. Lyav A. *Mathematical theory of elasticity*. M-L.: ONTI NKTP, USSR; 1935. 674 p. (In Russ.)
12. Pontryagin L.S. *Ordinary differential equations*. Moscow, Lenand; 2019. 336 p. (In Russ.)
13. Minaev V.A., Stepanov R.O., Faddeev A.O. Geodynamic indicators of oil and gas basins in the Arctic zone of the Russian Federation based on a digital model of the Earth's lithosphere. *Materials of the All-Russian conference with international participation dedicated to the 90th anniversary of the birth of akad. Nikolay Pavlovich Laverov "Global problems of the Arctic and Antarctic"*; Ed. acad. RAS A.O. Gliko, acad. RAS A.A. Baryakh, corresponding member RAS K. V. Lobanov, corresponding member RAS I. N. Bolotov. 2020. Arkhangelsk. November 2-5. Arkhangelsk: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; 2020. Pp. 257–260. (In Russ.)
14. Minaev V.A., Faddeev A.O., Nevдах T.M., Akhmetshin T.R. *Certificate of state registration of the computer program "Lithosphere" No. 2021611454 dated 28.01.2021*. Federal Service for Intellectual Property. (In Russ.)

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Минаев Владимир Александрович**,  
доктор технических наук, профессор,  
главный научный сотрудник Дирекции по  
Арктическим программам МГТУ  
им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская  
Федерация  
*e-mail*: [mlva@yandex.ru](mailto:mlva@yandex.ru)  
ORCID: [0000-0002-5342-0864](https://orcid.org/0000-0002-5342-0864)

**Vladimir A. Minaev**  
Doctor of Technical Sciences, Professor,  
Chief Researcher of the Arctic Programs  
Directorate of Bauman Moscow State  
Technical University, Moscow, Russian  
Federation

**Степанов Родион Олегович**,  
кандидат технических наук, доцент,  
директор Дирекции по Арктическим  
программам МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва,  
Российская Федерация  
*e-mail*: [stepanovr@bmstu.ru](mailto:stepanovr@bmstu.ru)  
ORCID: [0000-0001-9124-5924](https://orcid.org/0000-0001-9124-5924)

**Rodion O. Stepanov**  
Candidate of Technical Sciences, Associate  
Professor, Director of the Arctic Programs  
Directorate of the Bauman Moscow State  
Technical University, Moscow, Russian

*Статья поступила в редакцию 11.10.2021; одобрена после рецензирования 13.01.2022;  
принята к публикации 25.02.2022.*

*The article was submitted 11.10.2021; approved after reviewing 13.01.2022;  
accepted for publication 25.02.2022.*