УДК 517.929.2
DOI: 10.26102/2310-6018/2021.35.4.037

Параметрическая оптимизация процесса переноса сплошной среды по сетевому носителю

З. Тран[1]✉, А.А. Парт[2]

[1]*Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация*
[2] *Военно-воздушная академия им. профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация*
tranduysp94@gmail.com✉

Резюме: В статье рассматривается задача оптимального воздействия на процесс переноса сплошной среды по сетевому носителю, который осуществляет свое влияние на процесс в узловых местах (местах ветвления) сети. Математическая модель указанного процесса определяется формализмами начально-краевой задачи для дифференциального уравнения параболического типа с распределенными параметрами на графе (далее – дифференциальная система на графе). Оптимизирующая функция (в зарубежной литературе, например, в работах J.-L. Lions – функция стоимости) определяется функционалом, задаваемым на ограниченном множестве пространства допустимых изменений параметров, в качестве которых выступает совокупность функций, суммируемых по пространственной переменной. Анализ поставленной задачи осуществляется с помощью редукции дифференциальной системы к дифференциально-разностной, используя метод полудискретизации по временной переменной (аналог метода E. Rote), причем дифференциально-разностная система наследует основные свойства исходной: однозначная разрешимость, непрерывность по исходным данным. Таким образом, математическая модель изучаемого процесса переноса определяется дифференциально-разностной системой с погрешностью по временной переменной, пропорциональной шагу дискретизации, причем указана возможность уменьшения погрешности до пропорциональной квадрату шага дискретизации. Последнее продиктовано необходимостью максимально эффективно алгоритмизировать отыскание оптимальной совокупности параметров воздействия на дифференциальную систему, а значит, на изучаемый процесс переноса сплошных сред. В исследовании существенно используется сопряженное состояние и сопряженная система для дифференциально-разностной системы, в терминах которых получены соотношения, определяющие оптимальную совокупность параметров, приведен алгоритм отыскания этой совокупности. Полученные результаты лежат в основе анализа других задач оптимизации процессов переноса сплошных сред, при этом выявлены интересные аналогии с многофазными задачами многомерной гидродинамики.

Ключевые слова: ориентированный граф, дифференциально-разностная система, сопряженная система, параметрическая оптимизация, перенос сплошной среды

Для цитирования: Тран З., Парт А.А. Параметрическая оптимизация процесса переноса сплошной среды по сетевому носителю. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2021;9(4). Available from: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1090 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.35.4.037 (In Russ).

Parametric optimization of the continuous medium transferring process over a network carrier

D. Tran[1]✉, A.A. Part[2]

[1]*Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
[2] *N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation*

tranduysp94@gmail.com✉

Abstract: The article considers the issue of optimal impact on the continuous medium transferring process over a network carrier, which exerts its influence on the process at the nodal points (branch points) of the network. The mathematical model of this process is defined by the formalisms of the initial-boundary value problem for a differential equation of parabolic type with distributed parameters on a graph (hereinafter referred to as a differential system on a graph). The optimizing function (in the studies of foreign researchers, for example, in the works of J.-L. Lions, the cost function) is specified by a functionality within a limited set of the admissible parameter changes space, which is a range of functions aggregated by a spatial variable. The analysis of the outlined objective is carried out by reducing a differential system to a differential-difference system, using the semi-discretization method with respect to a time variable (an equivalent of the E. Rote method); besides, the differential-difference system inherits the basic properties of the original one: unique solvability and continuity with accordance to the initial data. Thus, the mathematical model of the transfer process under study is determined by a differential-difference system with an error in the time variable proportional to the sampling step. The possibility of reducing the error to the one which would be proportional to the square of the sampling step is also indicated. The latter is dictated by the need to algorithmize as efficiently as possible the search for the optimal set of the impact parameters on the differential system, and therefore, on the studied process of continuous media transfer. The study thoroughly employs the conjugate state and the adjoint system for a differential-difference system, in which terms the relations that ascertain the optimal set of parameters are obtained. An algorithm for finding this set is given. The achieved results underlie the analysis of other optimization problems for the processes of continuous media transfer while revealing interesting parallels with multiphase problems of multidimensional hydrodynamics.

Keywords: directed graph, differential-difference system, adjoint system, parametric optimization, continuous medium transfer.

For citation: Tran D., Part A.A. Parametric optimization of the continuous medium transferring process over a network carrier. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2021;9(4). Available from: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1090 DOI: 10.26102/2310-6018/2021.35.4.037 (In Russ).

Введение

Задачи параметрической оптимизации дифференциальных систем рассматривались многими авторами (см. например, работы [1-3]. При этом изучались и смежные вопросы: устойчивость по Ляпунову и Нейману, стабилизация решений, временное запаздывание [4-6]. Переход к дифференциально-разностным системам и ими описываемым математическим моделям явился следующим естественным шагом исследования – попытка приблизится к решению прикладных задач, имеющих свою специфику, определяемую реологической структурой носителя изучаемого процесса. Особое внимание уделяется поиску условий, при выполнении которых свойства исходной дифференциальной системы переносятся на дифференциально-разностную. Используемый метод полудискретизации является универсальным методом, дающим эффективный инструмент для отыскания условий однозначной разрешимости и непрерывности по исходным данным для дифференциально-разностной системы, а значит, и для дифференциальной системы. Кроме того, дифференциально-разностные системы указывают пути алгоритмизации полученных результатов, что необходимо при решении прикладних задач. Один из таких путей применительно к ламинарному течению вязкой жидкости по трубопроводной системе.

Основные понятия, используемые утверждения

Пусть Γ – ориентированный ограниченный граф, ребра которого параметризованы отрезком $[0,1]$; Γ_0 – совокупность всех ребер, не содержащих своих концевых точек (

$\overline{\Gamma}_0 = \Gamma$); $\partial\Gamma$ и $J(\Gamma)$ – множества граничных и внутренних узлов графа, соответственно (I – множество индексов внутренних узлов, J – число внутренних узлов) [7].
В области Γ_0 изменения пространственной переменной x изучается задача параметрической оптимизации дифференциально-разностной системы уравнений:

$$\frac{1}{\tau}(y(k)-y(k-1))-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dy(k)}{dx}\right)+b(x)y(k)=f(k),\ k=1,\ 2,\ ...,\ M, \qquad (1)$$

где $y(k):=y(x;\,k)$ и $f(k):=f(x;\,k)$, $k=1,2,...,M$. Система (1) является полу-дискретным аналогом по временному переменному t дифференциальной системы

$$\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial x}\right)+b(x)y(x,t)=f(x,\,t),\ x,\,t\in\Gamma_T,$$

в области $\Gamma_T=\Gamma_0\times(0,T),\ t\in(0,\,T),\ T<\infty$. Последняя является классическим математическим описанием процессов тепломассопереноса, обладающих свойством линейности изменений количественных характеристик по пространственной переменной $x\in\Gamma_0$. Редукция дифференциальной системы к дифференциально-разностной осуществляется посредством аппроксимации производной $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ разностным отношением $\frac{1}{\tau}(y(k)-y(k-1))$ с погрешностью $O(\tau)$, дифференциально-разностная система (1) в этом случае представляет собой неявную двухслойную полу-разностную схему. Следует отметить, что при аппроксимации можно использовать любое из однопараметрического семейста разностных отношений вида $\frac{1}{\tau}\sigma(y(k+1)-y(k))+\frac{1}{\tau}(1-\sigma)(y(k)-y(k-1))$, порожденного параметром σ. В этом случае можно указать такие значения σ, при которых погрешность аппроксимации будет равна $O(\tau^2)$ (при σ, отличном от 0 и 1, будем получать трехслойные полу-разностные схемы). Дальнейшие рассмотрения используют соотношение (1), все полученные результаты без особого труда переносятся на систему (1) с любой иной, указанной выше аппроксимацией.
Введем пространство состояний $y(k)$ ($k=1,\ 2,\ ...,\ M$) для уравнения (1). При этом будем использовать стандартные обозначения для следующих пространств: $L_p(\Gamma)$ ($p=1,\ 2$) – пространства функций, которые измеримых на Γ_0 и интегрируемые с p-й степенью; $W_2^1(\Gamma)$ – пространство, элементы которого являются функций из $u(x)\in L_2(\Gamma)$ и для них $\frac{du(x)}{dx}\in L_2(\Gamma)$.
Далее рассмотрим соотношение

$$\ell(\mu,\nu)=\int_\Gamma\left(a(x)\frac{d\mu(x)}{dx}\frac{d\nu(x)}{dx}+b(x)\mu(x)\nu(x)\right)dx, \qquad (2)$$

являющееся билинейной формой относительно $\mu(x),\ \nu(x)$ и фиксированными на Γ_0 функциями $a(x)$, $b(x)$ из $L_2(\Gamma)$: $0<a_*\le a(x)\le a^*$, $|b(x)|\le\beta$, $x\in\Gamma_0$. Несложно показать, что $W_2^1(\Gamma)$ содержит непустое множество $\Omega_a(\Gamma)$ элементов $y(x)$ из $C(\Gamma)$ (здесь $C(\Gamma)$ – пространство функций, непрерывных в области Γ), которые удовлетворяют соотношениям (условиям примыкания)

$$\sum_{\gamma\in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{dy(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma\in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{dy(0)_\gamma}{dx}$$

в узлах ξ, принадлежащих множеству $J(\Gamma)$ (через $R(\xi)$ и $r(\xi)$ обозначены совокупности ребер γ, которые соответственно ориентированы отрезком $[0, 1]$ в направлении к узлу ξ и от узла ξ, числа 0 и 1 изменения переменной x соответствуют концевым точкам примыкающих ребер γ; $\theta(\cdot)_\gamma$ – сужение функции $\theta(\cdot)$ на γ). Определим пространство $W^1(a;\Gamma)$ замыканием множества $\Omega_a(\Gamma)$ в норме $W_2^1(\Gamma)$. Если элементы $y(x)\in\Omega_a(\Gamma)$ удовлетворяют $y(x)|_{x\in\partial\Gamma}=0$, тогда получим более узкое пространство $W_0^1(a;\Gamma)$: $W_0^1(a;\Gamma)\subset W^1(a;\Gamma)\subset W_2^1(\Gamma)$.

Определим исходные данные: $\varphi(x)\in L_2(\Gamma)$ $f(k)\in L_2(\Gamma)$, $k=1, 2, ..., M$, а $y(k)$ удовлетворяют начальным и краевым условиям:

$$y(0)=\varphi(x),\ y(k)|_{x\in\partial\Gamma}=0,\ k=1, 2,..., M. \quad (3)$$

Математическая модель сетевого процесса переноса сплошной среды

Дифференциально-разностная система уравнений (1), (3) определяет математическую модель дискретного по времени процесса переноса сплошной среды по сетевому носителю Γ. Эта модель является дискретным аналогом по временному переменному t непрерывной модели, порожденной дифференциальной системой, описанной выше. Дальнейшее рассмотрение направлено на анализ этой математической модели с точки зрения подходов и методов теории оптимизации.

Определение 1. Совокупность функций $y(k)\in W_0^1(a;\Gamma)$ ($k=1, 2, ..., M$) называется слабым решением дифференциально-разностной системы уравнений (1), (3), если $y(k)$ удовлетворяют интегральному соотношению (тождеству)

$$\int_\Gamma y(k)_t\eta(x)dx+\ell(y(k),\eta)=\int_\Gamma f(k)\eta(x)dx,$$

для $k=1, 2, ..., M$ и для произвольной $\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma)$, соотношение $y(0)=\varphi(x)$ в (3) определяется в пространстве $L_2(\Gamma)$, $y(k)_t=\frac{1}{\tau}[y(k)-y(k-1)]$; $\ell(y(k),\eta)$ представлено соотношением (2).

Замечание 1. Как следует из определения 1, для каждого фиксированного $k=1,2,...,M$ соотношения (1), (3) – краевая задача в пространстве $W_0^1(a,\Gamma)$ для эллиптического уравнения (1) относительно $y(k)$. Будем считать, что для такого уравнения однозначная слабая разрешимость имеет место и, кроме того, имеет место непрерывная зависимость слабого решения от исходных данных $\varphi(x)$, $f(k)$. Таким образом, решение этих краевых задач определяет состояние $y=\{y(k),\ k=1, 2,..., M\}$ системы (1), (3).

Параметрическая оптимизация математической модели

Обратимся к задаче воздействия на систему (1), (3) параметрами $v(k)$ ($k=1, 2, ..., M$), сосредоточенными во всех внутренних узлах множества $J(\Gamma)$. Таким образом. для каждого узла $\xi_i\in J(\Gamma)$, $i\in I$, параметрической воздействие $v(k)$ определяется множеством чисел $v_i(k)$: $v(k)=\{v_i(k),\ i\in I\}\in U$ ($k=1, 2,..., M$). Множество $U\subset \mathrm{R}^J$ задается в зависимости от характера прикладных задач.

Определим функции $f(k)$ ($k = 1, 2, ..., M$) в системе (1) соотношениями

$$f(k) = \sum_{i \in I} v_i(k) \delta(x - x^i)|_{x^i = 1 \in \gamma^{\xi_i}} \ (k = 1, 2, ..., M),$$

где через $\delta(x - x^i)$, $i \in J$, определяемая на множестве $J(\Gamma)$, тогда дифференциально-разностная система уравнений

$$\frac{1}{\tau}[y(k;\, v(k)) - y(k-1;\, v(k-1))] - \frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dy(k;\, v(k))}{dx}\right) + b(x) y(k;\, v(k)) =$$
$$= \sum_{i \in I} v_i(k) \delta(x - x^i)|_{x^i = 1 \in \gamma^{\xi_i}},\ k = 1, 2, ..., M, \tag{4}$$

$$y(0;\, v(0)) := y(0) = \varphi(x),\ y(k;\, v(k))|_{x \in \partial\Gamma} = 0,\ k = \overline{1,\, M} \tag{5}$$

рассматривается относительно требующей отыскания совокупности функций $y(x, k;\, v(k))$ ($k = \overline{1,\, M}$).

Определение 2. Совокупность функций $y(k) \in W_0^1(a;\, \Gamma)$ ($k = \overline{1,\, M}$) называется слабым решением дифференциально-разностной системы уравнений (4), (5), если $y(k)$ удовлетворяют интегральному соотношению (тождеству)

$$\int_{\Gamma} y(k;\, v(k))_t \eta(x) dx + \ell(y(k;\, v(k)), \eta) = \sum_{i \in I} v_i(k) \eta_i$$

для $k = \overline{1, M}$ и для любой функции $\eta(x) \in W_0^1(a,\, \Gamma)$, $\eta_i = \eta(x)|_{x = 1 \in \gamma^{\xi_i}}$, $\xi_i \in J(\Gamma)$, $i \in I$.

В целях простоты дальнейшего изложения будем считать, что наблюдение состояния $y(k; v(k))$ системы (4), (5) осуществляется на всей области Γ. Как следует из замечания 1, линейное отображение $v(k) \to y(k;\, v(k))$ множества $U \subset \mathrm{R}^J$ в пространство $W_0^1(a;\, \Gamma)$ непрерывно для любого $k = \overline{1,\, M}$.

Введем функционал $\Psi(v)$, $v \in U$, следующим соотношением:

$$\Psi(v) := \Psi(v(1),\, v(2), ...,\, v(M)) = \tau \sum_{n=1}^{M} \Psi_k(v(k)),$$
$$\Psi_k(v(k)) = \| y(k;\, v(k)) - w_0(k) \|^2_{L_2(\Gamma)} + (Nv(k),\, v(k))_{\mathrm{R}^J}, \tag{6}$$

где $w_0(k)$ ($k = \overline{1,\, M}$) – заданные элементы пространства $L_2(\Gamma)$ и $N: U \to U$ – положительно определенная ненулевая эрмитова матрица, для которой выполнены условия

$$(N(v(k),\, (v(k))_{\mathrm{R}^J} \geq \varsigma \| v(k) \|^2_{\mathrm{R}^J},\ \ \varsigma > 0\ \ \forall v(k) \in U,\ k = \overline{1, M} \tag{7}$$

здесь и везде ниже символами $(\cdot,\cdot)$ и $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{R}^J}$ обозначаются скалярные произведения в пространствах $L_2(\Gamma)$ и R^J, соответственно. Функционал $\Psi(v)$ определяется с помощью оператора $v \to y(v)$, устанавливающего для всех $k = \overline{1,\, M}$ связь параметрического воздействия $v(k)$ с состоянием $y(k;\, v(k))$ системы (4), (5).

Пусть далее U_∂ – непустое ограниченное подмножество множества U.

Задача параметрической оптимизации системы (4), (5) состоит в определении

$$\inf_{v \in U_\partial} \Psi(v),\ v = \{v(k),\ k = 1,\ 2,\ ...,\ M\},$$

где функционал $\Psi(v)$ имеет вид (6).

В последующем исследовании мы несколько изменим терминологию, отходя от использования классических термннов теории опитмизации, и будем называть систему

(4), (5) полудискретной математической моделью сетевого процесса переноса сплошной среды, а задачу параметрической оптимизации системы (4), (5) – оптимизационной задачей сетевого процесса переноса сплошной среды.

Теорема 1. Если выполнены условия (7), тогда оптимизационная задача сетевого процесса переноса сплошной среды (4), (5) имеет единственное решение $v^* \in U_\partial$; $v^* = \{v^*(k),\ k = 1,\ 2, \ldots,\ M\} \in U_\partial$ – оптимальная совокупность параметров воздействия на процесс переноса сплошной среды (4), (5).

Доказательство. Как сказано выше, линейное отображение $v \to y(v)$ множества U в $W_0^1(a,\ \Gamma)$ непрерывно. Исходя из этого, используется свойство коэрцитивности квадратичной составляющей функционала $\Psi(v)$ на ограниченном множестве U_∂. Для любого $k = 1, 2, \ldots, M$ справедливы соотношения

$$\Psi_k(v(k)) = \| y(k;\ v(k)) - w_0(k) \|^2_{L_2(\Gamma)} + (Nv(k),\ v(k))_{\mathbb{R}^J} =$$

$$= \| y(k;\ v(k)) - y(0;\ v(0)) + y(0;\ v(0) - w_0(k) \|^2_{L_2(\Gamma)} + (Nv(k),\ v(k))_{\mathbb{R}^J} =$$

$$= \Phi_k(v(k),\ v(k)) - 2\Lambda_k(v(k)) + \| y(0;\ v(0)) - w_0(k) \|^2_{L_2(\Gamma)},$$

где $\Phi_k(v(k),\ (v(k)) = (y(k;\ v(k)) - y(0;\ v(0)),\ y(k;\ v(k)) - y(0;\ v(0))) + (Nv(k),\ v(k))_{\mathbb{R}^J}$ является квадратичной формой на множестве U; выражение

$$\Lambda_k(v(k)) = \left(w_0(k) - y(0;\ v(0)),\ y(k;\ v(k)) - y(0;\ v(0)) \right)$$

определяет линейную форму на $\mathbb{R}^J$. Из сказанного вытекает представление

$$\Psi(v) = \Phi(v,\ v) + \Lambda(v),\ \Phi(v, v) = \tau \sum_{n=1}^{M} \Phi_k(v(k),\ v(k)),\ \Lambda(v) = \tau \sum_{n=1}^{M} \Lambda_k(v(k)).$$

Условия (7) гарантируют коэрцитивность квадратичной формы $\Phi(v,\ v)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в работе [8, с. 13].

Далее остановимся на подробном изучении условий существования оптимальной совокупности параметров воздействия на систему (4), (5) и получим соотношения, определяющие этот вектор. Для упрощения представлений различных преобразований дальнейшие действия проводятся одновременно для всех состояний $y(k;\, u(k))$ и управлений $u(k)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ M$; обозначения $y(k;\ u(k))$, $y(k;\ u(k))_t$ и $u(k)$ заменяются на $y(u)$, $y(u)_t$ и u, соответственно.

Условия (7) гарантируют коэрцитивность квадратичной формы $\Phi(v,\ v)$. Дальнейшие рассуждения повторяют приведенные в работе [8, с. 24**]**.

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $u^* = \{u^*(k),\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ M\} \in U_\partial$ – минимизирующий элемент функционала $\Psi(v)$, тогда неравенство

$$\Psi'(u^*)(v - u^*) \geq 0 \tag{8}$$

выполняется для любого $v \in U_\partial$; производная $\Psi'(u^*)$ понимается в смысле Фреше.

Доказательство. Так как u^* – минимизирующий элемент функционала $\Psi(v)$, то для любого $v \in U_\partial$ и любого $\theta \in (0,1)$ имеет место $\Psi(u^*) \leq \Psi((1-\theta)u^* + \theta v)$, то есть неравенство

$$\frac{1}{\theta}[\Psi((1-\theta)u^* + \theta v) - \Psi(u^*)] = \frac{1}{\theta}[\Psi(u^* + \theta(v - u^*)) - \Psi(u^*)] \geq 0$$

и $\Psi'(u^*)(v-u^*)\ge 0$, для $\theta\to 0$, т. е. (8). Справедливо обратное утверждение: пусть для фиксированного $u\in U_\partial$ имеет место $\Psi'(u)(v-u)\ge 0$ для любого $v\in U_\partial$. В силу выпуклости отображения $v\to\Psi(v)$ (см. доказательство теоремы 1) для любого $v\in U_\partial$ имеет место

$$\frac{1}{\theta}[\Psi((1-\theta)u+\theta v)-\Psi(u)]=\frac{1}{\theta}[\Psi(u^*+\theta(v-u^*))-\Psi(u^*)]\le\Psi(v)-\Psi(u),$$

а значит, $0\le\Psi'(u)(v-u)\le\Psi(v)-\Psi(u)$ при $\theta\to 0$. Отсюда следует $\Psi(v)\ge\Psi(u)$ для любого $v\in U_\partial$, т. е. u – минимизирующий элемент функционала $\Psi(v)$.

Лемма 2. При $v,u\in U_\partial$ имеет место соотношение

$$y'(u)(v-u)=y(v)-y(u) \tag{9}$$

(здесь $y'(u)$ – производная в смысле Фреше отображения $u\to y(u)$).

Доказательство. Исходя из определения 2 для управлений $u(k), v(k)\in U_\partial$ $(k=0,1,...,M)$ выполнено

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau}\int_\Gamma[(y(k;\,v(k))-y(k;\,u(k)))-(y(k-1;\,v(k-1))-y(k-1;\,u(k-1)))]\eta(x)dx+\\+\ell(y(k;\,v(k))-y(k;\,u(k)),\eta)=\sum_{i\in I}(v_i(k)-v_i(k))\eta_i\end{gathered} \tag{10}$$

для любой $\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma)$; $\eta_i=\eta(x)|_{x\in\zeta_i}$, $\zeta_i\in J(\Gamma)$. Имеем соотношение

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau}\int_\Gamma[(y(k;\,u(k)+\vartheta(v(k)-u(k)))-y(k;\,u(k)))-(y(k-1;\,u(k-1)+\vartheta(v(k-1)-u(k-1)))-\\-y(k-1;\,u(k-1)))]\eta(x)dx+\ell(y(k;\,u(k)+\vartheta(v(k)-u(k)))-y(k;\,u(k)),\eta)=\vartheta\sum_{i\in I}(v_i(k)-v_i(k))\eta_i\end{gathered}$$

для $\vartheta\in(0,1)$ и любой $\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma)$; $\eta_i=\eta(x)|_{x=x_i\in\xi_i}$, $\xi_i\in J(\Gamma)$. Разделив левую и правую части на ϑ и устремляя $\vartheta\to 0$, получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau}\int_\Gamma[y'(k;\,u(k))(v(k)-u(k))-y'(k-1;\,u(k-1))(v(k-1)-u(k-1))]\eta(x)dx+\\+\ell(y'(k;\,u(k))(v(k)-u(k)),\eta)=\sum_{i\in I}(v_i(k)-v_i(k))\eta_i\end{gathered} \tag{11}$$

для любой $\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma)$; $\eta_i=\eta(x)|_{x=x_i\in\xi_i}$, $\xi_i\in J(\Gamma)$. Сравнение соотношений (10) и (11) между собой ведет к равенствам

$$y'(k;\,u(k))(v(k)-u(k))=y(k;\,v(k))-y(k;\,u(k)),\ k=0,1,...,M.$$

Лемма доказана.

Пусть $u(k)$ является оптимальной совокупностью параметров воздействия на сетевой процесса переноса (4), (5) для каждого фиксированного $k=1,2,...,M$, тогда в силу (8) и (9) имеем

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\Psi_k'(u(k))(v(k)-u(k))=(y(k;\,u(k))-w_0(k),\ y'(k;\,u(k))(v(k)-u(k)))+(Nu(k),v(k)-u(k))_{\mathrm{R}^J}=\\=(y(k;\,u(k))-w_0(k),\ y(k;\,v(k))-y(k;\,u(k)))+(Nu(k),\ v(k)-u(k))_{\mathrm{R}^J}\ge 0.\end{gathered} \tag{12}$$

для любого $v(k)\in U_\partial$.

Из соотношений (12) следует неравенство

$$(y(k;\,u(k))-w_0(k),\ y(k;\,v(k))-y(k;\,u(k)))+(Nu(k),\ v(k)-u(k))_{\mathrm{R}^J}\ge 0, \tag{13}$$

а значит, исходя из представления (6) функционала $\Psi(v)$ и соотношения (7), приходим к неравенству

$$\tau\sum_{k=1}^{M}[(y(k;\,u(k))-w_0(k),\ y(k;\,v(k))-y(k;\,u(k)))+(Nu(k),\ v(k)-u(k))_{\mathrm{R}^J}]\ge 0 \qquad (14)$$

для любого $v(k)\in U_\partial$. Таким образом, неравенство (13) (или (14)) определяет условие существования оптимальной совокупности параметров воздействия на процесс переноса сплошной среды (4), (5) и имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть выполнено утверждение теоремы 1, оптимальная совокупность $u\in \mathrm{U}_\partial$ параметров воздействия на систему (4), (5) характеризуется соотношениями

$$\int_\Gamma y(k;\,u(k))_t\,\eta(x)dx+\ell(y(k;\,u(k)),\,\eta)=\sum_{i\in I}v_i(k)\eta_i,\ k=1,\,2,\,...,M,$$

для любой $\eta(x)\in W_0^1(a,\,\Gamma)$; $\eta_i=\eta(x)|_{x=1\in\gamma^{\xi_i}}$, $\xi_i\in J(\Gamma)$, $i\in I$;

$$\sum_{i\in I}p_i(k;\,u(k))(v_i(k)-u_i(k))+(Nu(k),v(k)-u(k))_{\mathrm{R}^J}\ge 0,\ k=0,1,...,M.$$

и произволльной $v(k)\in U_\partial$. Здесь $y(k;\,u(k))\in W_0^1(a,\,\Gamma)$, $k=0,\,1,\,...,\,M$, $x\in\Gamma$.

Для более детального описания условий существования оптимальной совокупности параметров воздействия на систему (4), (5) введем сопряженное состояние для системы (4), (5). В пространстве $W_0^1(a;\,\Gamma)$ понятие сопряженного состояния $p(k;v(k))$ ($k=1,\,2,\,...,\,M$) и сопряженной системы к системе (4), (5) определим, исходя из следующей задачи

$$-\frac{1}{\tau}[\,p(k+1;\,v(k+1))-p(k;\,v(k))]-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dp(k;\,v(k))}{dx}\right)+b(x)\,p(k;\,v(k))= \qquad (15)$$

$$=y(k;\,v(k))-w_0(k),\ k=0,1,...,\,M-1,$$

$$p(M;\,v(M))=0,\ \ p(k;\,v(k))|_{x\in\partial\Gamma}=0,\ k=0,1,...,\,M-1.$$

Теорема 3. Решение системы (15), (16) при достаточно малых τ однозначно определяются как элементы пространства $W_0^1(a;\,\Gamma)$.

Доказательство. Чтобы в этом убедиться, достаточно перенумеровать соотношения системы (15), (16) и применить утверждение теоремы 1. Действительно, меняя нумерацию по закону $l=M-k$, $k=M$, $M-1$, ..., 1, 0, получим, что l меняется от 0 до M и мы приходим к системе

$$-\frac{1}{\tau}[\,\overline{p}(l-1;\,v(l-1))-\overline{p}(l;\,v(l))]-\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d\,\overline{p}(l;\,v(l))}{dx}\right)+b(x)\overline{p}(l;\,v(l))=$$

$$=y(l;\,v(l))-w_0(l),\ l=1,\,2,...,\,M,$$

$$\overline{p}(0;\,v(0))=0,\ \overline{p}(l;\,v(l))|_{x\in\partial\Gamma}=0,\ l=1,\,2,...,\,M,$$

относительно $\overline{p}(l;\,v(l))$ ($l=1,\,2,...,\,M$), для которой справедливо утверждение теоремы 1. Это завершает доказательство.

Для каждого фиксированного $k=1,\,2,...,\,M$ преобразуем неравенство (13). Учитывая соотношения

$$-\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{M-1}[\,p(k+1;\,u(k+1))-p(k;\,u(k))][y(k;\,v(k))-y(k;\,u(k))]=$$

$$=\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{M}\left\{[y(k;\,v(k))-y(k;\,u(k))]-[y(k-1;\,v(k-1))-y(k-1;\,u(k-1))]\right\}p(k;\,u(k)),$$

$$\sum_{k=0}^{M-1}\ell(p(k;\, u(k)),\; y(k;\, v(k))-y(k;\, u(k))) = \sum_{k=1}^{M}\ell(y(k;\, v(k))-y(k;\, u(k)),\, p(k;\, u(k))),$$

приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{M-1}\left(y(k;\, v(k))-w_0(k),\, y(k;\, v(k))-y(k;\, u(k))\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M}\sum_{i\in I}p_i(k;\, u(k))(v_i(k)-u_i(k)) = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{i\in I}p_i(k;\, u(k))(v_i(k)-u_i(k))$$

(здесь $p_i(k;\, u(k)) = p(k;\, u(k))|_{x=x_i\in\xi_i}$, $\xi_i \in J(\Gamma)$, при этом учитываются равенства нулю $y(0;\, v(0))-y(0;\, u(0))$ и $p(M;\, u(M))$). Следовательно, из полученного равенства вытекает

$$\sum_{i\in I}p_i(k;\, u(k))(v_i(k)-u_i(k)) = \sum_{i\in I}p_i(k;\, u(k))(v_i(k)-u_i(k))$$

для каждого фиксированного $k = 0, 1, ..., M-1$, тогда неравенство (13) можно переписать в виде:

$$\sum_{i\in I}p_i(k;\, u(k))(v_i(k)-u_i(k)) + (Nu(k),\, v(k)-u(k))_{\mathrm{R}^J} \ge 0,\; k = 0, 1,..., M,$$

а неравенство (14) преобразуется к виду

$$\tau\sum_{k=0}^{M-1}[\sum_{i\in I}p_i(k;\, u(k))(v_i(k)-u_i(k)) + Nu(k),\, v(k)-u(k))_U] \ge 0$$

$$\forall\, v(k)\in U_\partial,\; k = 0, 1,..., M,$$

(как и выше, учитывается $y(0;\, v(0))-y(0;\, u(0)) = 0$ и $p(M;\, u(M)) = 0$).

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть выполнено утверждение теоремы 2. Оптимальная совокупность $u\in \mathrm{U}_\partial$ параметров воздействия на систему (4), (5) характеризуется соотношениями

$$\int_\Gamma y(k;\, u(k))_t\,\eta(x)dx + \ell(y(k;\, u(k)),\, \eta) = \sum_{i\in I}v_i(k)\eta_i,\, k = 1,\, 2,...,\, M, \tag{17}$$

для любой функции $\eta(x)\in W_0^1(a,\,\Gamma)$; $\eta_i = \eta(x)|_{x=1\in\gamma^{\xi_i}}$, $\xi_i \in J(\Gamma)$ и $i\in I$;

$$\int_\Gamma p(k;\, u(k))_t\,\eta(x)dx + \ell(p(k;\, u(k)),\, \eta) = \int_\Gamma (y(k;\, v(k))-w_0(k))\eta(x)dx,\quad k = 1,\, 2,...,\, M \tag{18}$$

для любой функции $\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma)$;

$$\sum_{i\in I}p_i(k;\, u(k))(v_i(k)-u_i(k)) + (Nu(k),\, v(k)-u(k))_{\mathrm{R}^J} \ge 0\;\; \forall\, v(k)\in U_\partial,\;\; k = 0,1,...,M \tag{19}$$

Здесь $y(k;\, u(k)),\; p(k;\, u(k))\in W_0^1(a,\,\Gamma)$ $(k = 0,\, 1,\, ...,\, M)$, $y(0;\, v(0)) = \varphi(x)$, $p(M;\, v(M)) = 0$.

Алгоритм решения задачи параметрической оптимизации

Утверждения теорем 2-4 представляют условия определения оптимальной совокупности параметров воздействия на дифференциально-разностностную систему (4), (5) и соответствующие этой совокупности состояния $y(k;\, u(k))$, $p(k;\, u(k))$, $k = 1,\, 2,...,\, M$, для системы (4), (5) и ей сопряженной системы (15), (16). Соотношения (17)-(19) определяют алгоритм постороения оптимального вектора параметров воздействия на систему (4), (5), который приводится применительно к прикладной задачи транспортировки нефтепродуктов по сетевому и магистральному трубопроводам. При этом предполагается, что перемещение вязкой жидкости по трубопроводной системе осуществляется по законам ламинарного течения. В этом случае формализмы дифференциально-разностных систем (4), (5), и (15), и (16) соответствуют математической модели транспортировки. Коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ определяют внутренние количественные характеристики потоков (вязкость, внутренние сопротивление и пр.), использование пространства состояний $W_0^1(a;\Gamma)$ для систем (4), (5), и (15), и (16) означает, что математическая модель учитывает наличие в составе нефтепродукта сторонних компонент (примесей) – переносимая среда является многофазной. Выбор краевых условий (см. второе соотношение (3)) предопределен достаточно часто встречающимся эффектом прилипания переносимой среды к внутренним стенкам трубопровода.

Алгоритм решения задачи:

1-й шаг. Построение сети носителя сплошной среды. Устанавливается количество линейных фрагментов сети (ребер графа), количество внутренних узлов ветвлений сети, фиксируется число граничных узлов и их местоположение на сети.

2-й шаг. Осуществляется математическое описание потоковых явлений во всех внутренних узлах $\xi \in J(\Gamma)$ сети с помощью балансовых соотношений:

$$\sum_{\gamma\in R(\xi)} a(1)_\gamma \frac{dy(1)_\gamma}{dx} = \sum_{\gamma\in r(\xi)} a(0)_\gamma \frac{dy(0)_\gamma}{dx}$$

(условий примыкания, см. описание множества $\Omega_a(\Gamma)$).

3-й шаг. Формирование дифференциально-разностной системы переноса сплошной вязкой среды по сетевому носителю – соотношения (4), (5).

4-й шаг. Формирование сопряженной дифференциально-разностной системы переноса сплошной вязкой среды по сетевому носителю – соотношения (15), (16).

5-й шаг. Формирование смешанной системы интегральных уравнений и неравенств (утверждение теоремы 4) вида:

$$\int_\Gamma y(k;\,u(k))_t\,\eta(x)dx + \ell(y(k;\,u(k)),\,\eta) = \sum_{i\in I} v_i(k)\eta_i \quad \forall\,\eta(x)\in W_0^1(a,\,\Gamma),\ k=\overline{1,M},$$

$$\eta_i = \eta(x)|_{x=1\in\gamma^{\xi_i}},\ \xi_i\in J(\Gamma),\ i\in I;$$

$$\int_\Gamma p(k;\,u(k))_t\,\eta(x)dx + \ell(p(k;\,u(k)),\,\eta) = \int_\Gamma (y(k;\,v(k)) - w_0(k))\eta(x)dx,\quad \forall\,\eta(x)\in W_0^1(a,\Gamma),\ k=\overline{1,M};$$

$$\sum_{i\in I} p_i(k;\,u(k))(v_i(k)-u_i(k)) + (Nu(k),\,v(k)-u(k))_{\mathrm{R}^J} \ge 0\ \forall\, v(k)\in U_\partial,\ k=\overline{1,M},$$

относительно искомой оптимальной совокупности $\{v(k),\ k=\overline{1,M}\}$ параметров воздействия на систему (4), (5), а также соответствующих этой совокупности состояний $y(k;\,u(k))$, $p(k;\,u(k))$, $k=\overline{1,\,M}$, системы (4), (5) и ей сопряженной системы (15), (16). В качестве произвольных функций $\eta(x)\in W_0^1(a,\,\Gamma)$ можно взять любые гладкие функции, удовлетворяющие балансным соотношениям во всех узлах $\xi\in J(\Gamma)$ (см. 2-й шаг), т. к. множество таких функций всюду плотны в простанстве $W_0^1(a,\,\Gamma)$.

6-й шаг. Завершение работы алгоритма на 5-м шаге по результатам определения приближенного решения системы с наперед заданной точностью

Основополагающий вклад (и сложность) в работу алгоритма привносит решение системы интегральных уравнений и неравенств на 3-м шаге, что является предметом отдельной алгоритмизации и последующей задачей численного анализа (см., например, [9, с. 63]).

Заключение

В работе рассмотрена оптимизационная задача сетевого процесса переноса сплошной среды как задача параметрической оптимизации дифференциально-разностной системы с параметрами, распределенными на графе. При этом использован класс интегрируемых функций, а именно, рассматривается частный случай: параметры воздействия на дифференциально-разностную систему (4), (5) сосредоточены только в узлах графа. В исследовании существенно используется сопряженное состояние и сопряженная система (15), (16) для дифференциально-разностной системы (4), (5), определяющие оптимальную совокупность параметров воздействия на систему (4), (5). Следует отметить, что результаты, представленные в работе, могут быть использованы при анализе проблем управления [10-13], стабилизации дифференциальных систем [14, 15], а также в изучении сетевых процессов прикладного характера [16-18].

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Krasnov S., Sergeev S., Zotova E., Grashchenko N. Algorithm of optimal management for the efficient use of energy resources. *E3S Web of Conferences. 2018 International Science Conference on Business Technologies for Sustainable Urban Development, SPbWOSCE 2018.* 2019;02052 (accessed 18/11/2021).
2. Krasnov S., Sergeev S., Titov A., Zotova Y. Modelling of digital communication surfaces for products and services promotion. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2019;012032 (accessed 18/11/2021).
3. Krasnov S., Zotova E., Sergeev S., Krasnov A., Draganov M. Stochastic algorithms in multimodal 3PL segment for the digital environment. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 8th International Scientific Conference «TechSys 2019» – Engineering, Technologies and Systems.* 2019; 012069 (accessed 18/11/2021).
4. Парт А.А. Задача оптимизации гиперболической системы в пространстве $W_2^1(\Gamma_T)$. *Сборник трудов X Международной конференции «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий».* 2017;283–286.
5. Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A. Asymptotic stability conditions of solutions for nonlinear multiconnected time-delay systems. *Circuits Systems and Signal Processing*. 2016;35(10):3531–3554 (accessed 18/11/2021).
6. Alexandrova I.V., Zhabko A.P. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays. *Automatica*. 2018;91:173–178 (accessed 18/11/2021).
7. Тран З., Провоторов В.В. Метод конечных разностей для уравнения переноса с распределенными параметрами на сети. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2021;9(3). Доступно по: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1019. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012 (дата обращения: 18/11/2021).
8. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*. Москва, Мир.1972, 587 с.
9. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М.: Наука; 1977. 456 с.
10. Карелин В.В. Штрафные функции в задаче управления процессом наблюдения. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2010;10(4):109–114.
11. Карелин В.В., Буре В.М., Свиркин М.В. Обобщенная модель распространения информации в непрерывном времени. *Вестник Санкт-Петербургского*

университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017;13(1):74–80. Доступно по: https://doi:10.21638/11701/spbu_10.2017.107 (дата обращения: 18/11/2021).
12. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay. *Intern. Journal Control.* 2020;93(4):763–770.
13. Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Kosinov E.S. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019»*. 2019;42025 (accessed 18/11/2021).
14. Веремей Е.И., Сотникова М.В. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2011;10(1):116–133.
15. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity. *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2017;23(4):825–837(accessed 18/11/2021).
16. Borisoglebskaya L.N., Provotorova E. N., Sergeev S. M. Promotion based on digital interaction algorithm. *International Scientific Workshop «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering», MIP: Engineering-2019. 2019. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 537 042032(accessed 18/11/2021).
17. Sergeev S.M., Sidnenko T.I., Sidnenko D.B. Distribution centers for agriculture, their modeling. *International Scientific School «Paradigma» Summer-2016 Selected Papers*. Yelm, WA, USA. 2016;92–97 (accessed 18/11/2021).
18. Iliashenko O., Sergeev S., Krasnov S. Calculation of high-rise construction limitations for non-resident housing fund in megacities. *E3S Web of Conferences*. 2018;03006 (accessed 18/11/2021).

REFERENCES

1. Krasnov S., Sergeev S., Zotova E., Grashchenko N. Algorithm of optimal management for the efficient use of energy resources. *E3S Web of Conferences. 2018 International Science Conference on Business Technologies for Sustainable Urban Development, SPbWOSCE 2018.* 2019;02052 (accessed 18/11/2021).
2. Krasnov S., Sergeev S., Titov A., Zotova Y. Modelling of digital communication surfaces for products and services promotion. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* 2019;012032 (accessed 18/11/2021).
3. Krasnov S., Zotova E., Sergeev S., Krasnov A., Draganov M. Stochastic algorithms in multimodal 3PL segment for the digital environment. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 8th International Scientific Conference «TechSys 2019» – Engineering, Technologies and Systems.* 2019;012069 (accessed 18/11/2021).
4. Part A.A. Zadacha optimizatsii giperbolicheskoi sistemy v prostranstve $W_2^1(\Gamma_T)$. *Sbornik trudov X Mezhdunarodnoi konferentsii «Sovremennye metody prikladnoi matematiki, teorii upravleniya i komp'yuternykh tekhnologiI»*. 2017;283–286. (In Russ.)
5. Aleksandrov A., Aleksandrova E., Zhabko A. Asymptotic stability conditions of solutions for nonlinear multiconnected time-delay systems. *Circuits Systems and Signal Processing*. 2016;35(10):3531–3554 (accessed 18/11/2021).
6. Alexandrova I.V., Zhabko A.P. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays. *Automatica*. 2018;91:173–178 (accessed 18/11/2021).

7. Tran D., Provotorov V.V. Finite difference method for transfer equation with distributed parameters on the network. *Modelirovaniye, optimizatsiya i informatsionnyye tekhnologi = Modeling, Optimization and Information Technology*. 2021;9(3). Available from: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1019. DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012 (In Russ) DOI: 10.26102/2310-6018/2021.34.3.012 (accessed 18/11/2021). (In Russ.)
8. Lions ZH.-L. *Nekotorye metody resheniya nelineinykh kraevykh zadach*. Moskva, Mir; 1972. 587 p. (In Russ.)
9. Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noi matematiki*. M.: Nauka, 1977. 456 p. (In Russ.)
10. Karelin V.V. Shtrafnye funktsii v zadache upravleniya protsessom nablyudeniya. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes.* 2010;10(4):109–114. (In Russ.)
11. Karelin V.V., Bure V.M., Svirkin M.V. Obobshchennaya model' rasprostraneniya informatsii v nepreryvnom vremeni. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes*. 2017;13(1):74–80. Available from: https://doi:10.21638/11701/spbu 10.2017.107 (accessed 18/11/2021). (In Russ.)
12. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay. *Intern. Journal Control.* 2020;93(4):763–770.
13. Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Kosinov E.S. Mathematical aspects of optimal control of transference processes in spatial networks. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. International Workshop «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering – MIP: Engineering – 2019»*. 2019;42025 (accessed 18/11/2021).
14. Veremei E.I., Sotnikova M.V. Stabilizatsiya plazmy na baze prognoza s ustoichivym lineinym priblizheniem. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer science. Control processes.* 2011;10(1):116–133. (In Russ)
15. Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. On uniqueness and properties of periodic solution of second-order nonautonomous system with discontinuous nonlinearity. *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2017;23(4):825–837(accessed 18/11/2021).
16. Borisoglebskaya L.N., Provotorova E. N., Sergeev S. M. Promotion based on digital interaction algorithm. *International Scientific Workshop «Advanced Technologies in Material Science, Mechanical and Automation Engineering», MIP: Engineering-2019. 2019. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 537 042032(accessed 18/11/2021).
17. Sergeev S.M., Sidnenko T.I., Sidnenko D.B. Distribution centers for agriculture, their modeling. *International Scientific School «Paradigma» Summer-2016 Selected Papers*. Yelm, WA, USA. 2016;92–97 (accessed 18/11/2021).
18. Iliashenko O., Sergeev S., Krasnov S. Calculation of high-rise construction limitations for non-resident housing fund in megacities. *E3S Web of Conferences*. 2018;03006 (accessed 18/11/2021).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Тран Зуй, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: *tranduysp94@gmail.com*

Tran Duy, Graduate Student, Department Of Equations In Partial Derivatives And Probability Theory, Faculty Of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.

Парт Анна Александровна, кандидат физико-математических наук, преподаватель кафедры высшей математики Военно-воздушной академии им. профессора. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: *anna_razinkova@mail.ru*

Part Anna Aleksandrovna, Candidate In Physics And Mathematics, Lecturer At The Department Of Higher Mathematics Of The N.E. Zhukovsky And Y.A. Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russian Federation

Статья поступила в редакцию 21.11.2021; одобрена после рецензирования 17.12.2021; принята к публикации 23.12.2021.

The article was submitted 21.11.2021; approved after reviewing 17.12.2021; accepted for publication 23.12.2021.