

УДК 519.85

DOI: [10.26102/2310-6018/2022.37.2.028](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2022.37.2.028)

Применение методов теории массового обслуживания для оценки параметров синхронизации распределенных вычислительных систем

П.В. Полухин✉

*Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
ivdas92@mail.ru✉*

Резюме. В работе рассматривается подход к оценке параметров синхронизации распределенных вычислительных систем, базирующийся на применении алгоритмов теории массового обслуживания. В основе предложенного подхода лежит использование статистических подходов на основе метода максимального правдоподобия, а также ряд численных алгоритмов для нахождения оптимальных параметров систем синхронизации. Применение методов теории массового обслуживания и модели Рикарта-Агравала позволяет эффективно адаптировать распределенную систему в рамках оптимального решения задачи синхронизации. Использование статистических подходов на основе расчета функции правдоподобия позволяет получить статистические оценки интенсивностей входных и выходных потоков требований синхронизации ресурсов, что позволяет производить оптимальную настройку системы синхронизации с разнородной аппаратной конфигурацией и определить максимально допустимый поток требований для данной системы. В работе проведен вычислительный эксперимент с использованием в качестве базовой распределенной вычислительной системы Spark. При проведении эксперимента вместо стандартного алгоритма синхронизации, включенного в состав сборки Spark, применяется анализируемый в работе алгоритм. В работе получены соотношения между временем синхронизации и объемом данных, передаваемых между узлами исследуемой системы, позволяющие произвести вычисление параметров системы синхронизации, а также подобрать оптимальные значения для данной системы. Приведенные в рамках научного исследования практические результаты доказывают правильность теоретических подходов, используемых в процессе создания эффективных систем синхронизации распределенных ресурсов для рассматриваемой платформы Spark.

Ключевые слова: распределенная вычислительная система, синхронизация, система массового обслуживания, условная функция правдоподобия, модель Рикарта-Агравала, метод апостериорного максимума, интенсивность потоков требований, алгоритм наказания за случайность.

Для цитирования: Полухин П.В. Применение методов теории массового обслуживания для оценки параметров синхронизации распределенных вычислительных систем. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2022;10(2). Доступно по: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1171> DOI: 10.26102/2310-6018/2022.37.2.028

Application of queueing theory methods for estimating synchronization parameters of distributed computing systems

P.V. Polukhin✉

*Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
ivdas92@mail.ru✉*

Abstract. The paper discusses the approach to estimating the synchronization parameters of distributed computing systems, based on the application of mass queueing theory algorithms. The proposed

approach is built upon the use of statistical approaches by means of the maximum likelihood method as well as a number of numerical algorithms to find optimal parameters of synchronization systems. The application of mass queueing theory methods and the Ricart-Agraval model helps to efficiently adapt a distributed system in terms of an optimal solution to the synchronization problem. The employment of statistical approaches in reliance on the calculation of the likelihood function allows one to obtain statistical estimates of the input and output flow intensities of resource synchronization requirements, which enables optimization of the synchronization system with a heterogeneous hardware configuration and makes it possible to determine the maximum allowable flow of requirements for this system. A computational experiment was conducted utilizing Spark as a basic distributed computing system. When conducting an experiment, the algorithm analyzed in the article is used instead of the standard synchronization algorithm included in the Spark assembly. Relations between synchronization time and volume of data transmitted between units of the analyzed system are obtained, which provides a means of calculating parameters of the synchronization system as well as selecting optimal values for the given system. The practical results presented in the scientific study prove the correctness of the theoretical approaches used in the process of creating effective systems for synchronizing distributed resources for the Spark platform in question.

Keywords: distributed computing system, synchronization, queueing system, conditional likelihood function, the Ricart-Agraval model, maximum posterior method, intensity of demand flows, accident punishment algorithm.

For citation: Polukhin P.V. Application of queueing theory methods for estimating synchronization parameters of distributed computing systems. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2022;10(2). Available from: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1171> DOI: 10.26102/2310-6018/2022.37.2.028 (In Russ.).

Введение

Распределенные вычислительные системы (РВС) находят широкий спектр применения в рамках организации вычислительного процесса для решения задач численной оптимизации, машинного обучения, моделирования с помощью байесовских сетей, структуризации и статистической обработки больших массивов информации. РВС являются важнейшим звеном создания облачных платформ, реализуют механизмы управления и распределения ресурсов между вычислительными процессами, связанными с обработкой тех или иных фрагментов данных. Актуальным направлением исследований в области алгоритмического обеспечения РВС является разработка эффективных механизмов распределения и синхронизации данных между отдельными вычислительными узлами системы, образующими кластер. Мощными РВС являются платформы Hadoop и Spark. Обе системы реализуют механизм параллельной обработки данных без ограничения по числу узлов, входящих в состав кластера. Отличительной особенностью Spark является использование RDD-абстракции, представляющей собой распределенный блок данных, хранящийся в памяти на каждом из узлов. Применение данной технологии позволяет повысить интенсивность обработки данных за счет наиболее рационального использования оперативной памяти, доступной на каждом вычислительном узле. В основе синхронизации Spark лежит модифицированный алгоритм BitTorrent, который является достаточно эффективным. В качестве недостатка можно отметить необходимость проверки целостности всего блока данных, формируемого в результате выполнения параллельной программы. Для реализации механизма синхронизации необходимо выполнить пересылку всех результирующих блоков данных, а затем произвести проверку их целостности. На практике такой подход требует дополнительных временных и ресурсных затрат, а также накладывает ограничение, связанное с повторением процедуры валидации в случае возникновения ошибки. Для решения данной проблемы можно использовать модели синхронизации на

основе системы массового обслуживания (СМО). Для эффективной работы с моделями синхронизации на основе (СМО) необходимы специальные статистические подходы, позволяющие осуществлять оптимальную настройку параметров СМО и поддерживать допустимый поток требований в процессе распределенной синхронизации данных, передаваемых в РВС.

Материалы и методы

Кратко остановимся на описании математической модели СМО синхронизации РВС: входной поток требований, дисциплина очереди и механизм обслуживания заявок. Будет рассматриваться очередь, организованная классическим способом – потоки обслуживаются в порядке запросов на синхронизацию. В качестве входного потока будем использовать пуассоновский поток без последствия с интенсивностью λ :

$$P(v_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad (1)$$

$$Mv_t = \lambda t,$$

где v_t – число событий, поступающих в интервал времени $(0, t)$, λ – среднее число событий в единицу времени (интенсивность потока).

Введем ограничение, связанное с тем, что время обслуживания требований распределено по показательному закону. С учетом данного предположения механизм обслуживания будет описан в форме марковского процесса:

$$P(\xi(t_{n+1}) = X_n | \xi(t_1) = X_1, X_1, \dots, \xi(t_n) = X_n) =$$

$$= P(\xi(t_{n+1}) = X_n | \xi(t_n) = X_n). \quad (2)$$

Для задания марковского процесса необходимо определить вероятности переходов $P(\xi(t_{n+1}) | \xi(t_n))$ и начальное распределение $P(\xi(t_0))$:

$$P(\xi(t_{n+1}) = j | \xi(t_n) = i) = P_{ij}(\Delta t), \quad (3)$$

$$\sum_j P_{ij}(\Delta t) = 1 \forall \Delta t, \quad (4)$$

где $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, i, j – общее число требований в СМО в моменты времени t_n и t_{n+1} .

Для переходных вероятностей марковского процесса справедливы дифференциальные уравнения Колмогорова [1]:

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_k \lambda_{ik} P_{kj}(t), \quad (5)$$

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_k \lambda_{kj} P_{ik}(t), \quad (6)$$

где λ_{ik} – плотности перехода из состояния i в состояние j

Выражение (4) является прямым уравнением Колмогорова, а (5) – обратным.

При моделировании СМО процесса синхронизации РВС возникает ряд вопросов, связанных с настройкой ее параметров и оптимизацией критериев эффективности функционирования. Одним из таких критериев может выступать среднее значение затрат

на обработку СМО единичного требования, поступающего на вход системы. Этот критерий достаточно просто можно выразить через следующее выражение, устанавливающее зависимость между параметрами СМО [2]:

$$\Phi = q_1 \left(\frac{d}{\bar{k}t} \right) q_1 + q_2 \left(\frac{(n-a)}{n} \right), \quad (7)$$

$$a = \lambda \bar{\tau},$$

где d – число требований, поступивших в СМО и ожидающих обслуживания, \bar{k} – среднее число требований в очереди, q_1 – временные потери, связанные с ожиданием заявки, находясь в очереди на обслуживание, q_2 – потери, связанные с простоем канала обслуживания СМО, n – число доступных каналов, a – количество одновременно обслуживаемых заявок, $\bar{\tau}$ – среднее время, связанное с обслуживанием заявки одним каналом.

Критерий Φ представляет собой функцию нескольких переменных (параметров):

$$\Phi(X) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_{k'}). \quad (8)$$

В этом случае решение задачи оптимизации критерия $\Phi(X)$ может быть сведено к решению задачи:

$$\Phi' = \underset{X}{extr}(\Phi(X)), x_k^{min} \leq x_k \leq x_k^{max}. \quad (9)$$

Механизм оптимизации критерия $\Phi(X)$ был рассмотрен в работах Лифшица [3]. Он базируется на применении алгоритмов локального поиска, в частности, алгоритма наказания за случайность (НС). В процессе работы алгоритма НС выбирается случайное направление ξ . Если при перемещении в состояние $i+1$, значение функции $\Phi(X)$ улучшается, то на следующей позиции $i+2$ происходит смещение в ранее выбранном направлении, в противном случае происходит возврат в исходное состояние и происходит повторное случайное смещение в направлении ξ . Основные этапы алгоритма НС можно представить в виде следующей схемы:

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_{i+1},$$

$$\Delta X_{i+1} = \begin{cases} \Delta X_{i+1}, \Phi(X_i) < \Phi(X_{i+1}) \\ -\Delta X_{i+1} + a\xi, \Phi(X_i) \geq \Phi(X_{i+1}), \end{cases} \quad (10)$$

где a – шаг смещения в направлении ξ .

Для моделирования реальной системы в формате СМО требуется наблюдение за работой системы на некотором интервале времени Δt . Это дает возможность оценить основные параметры СМО: общее количество заявок n , количество обработанных заявок m , продолжительность занятости системы t_s , включающую совокупность всех этапов занятости системы в интервале Δt . С учетом того, что входной поток является пуассоновским с параметром λ и время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ , процесс обслуживания $\nu(t)$ будет представлять собой марковский процесс с вероятностями перехода:

$$P(X_{k+1}|X_k) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (11)$$

Исследования в области статистической оценки параметров λ и μ для закрытых процессов приведены в работах Риордана [4]. Им рассмотрена возможность оценки λ и μ для марковских СМО с критерием $\Phi(X)$, базирующаяся на использовании функции правдоподобия $L(X)$. В соответствии с введенными ранее обозначениями, определим интенсивности входящего и исходящего потоков $\lambda = n/t$ и $\mu = m/t$. Для получения оценок правдоподобия предполагается обучение СМО на основе некоторой тестовой выборки в течение заданного интервала времени $\Delta\tau$. Как показывает практика, процедура оценки параметров СМО процесса синхронизации становится достаточно трудоемкой, что связано со сложностью оценки параметров в случае масштабирования РВС. Далее рассмотрим процедуру получения статистической оценки функции правдоподобия, соответствующей интервалу наблюдения $(0;t)$.

Пусть t_0 – общее время нахождения процесса $P_k(v)$ в некотором состоянии $k = 0$ при рассмотрении отрезка наблюдения $(0;t)$ и $t_s = t - t_0$ время занятости, затраченное на синхронизацию одного распределенного ресурса. Распределение вероятностей начального числа заявок запишем в следующем виде:

$$P_k(v) = (1-p)p^v, v = 1, 2, \dots, k, \quad (12)$$

где v – общее число требований, ассоциированное с начальным состоянием системы, $p = \lambda/\mu$.

Тогда вероятности для входного и выходного потоков требований, соответствующие периоду занятости t_s и общему времени наблюдения t_0 , можно задать в следующем виде [5]:

$$N = \frac{e^{-\mu\Delta\tau} (bt_s)^m}{m!}, \quad (13)$$

$$N' = \frac{e^{-\lambda\Delta\tau} (\lambda t_0)^n}{n!},$$

Если параметры v и m заранее известны, то моменты x и z будут независимы. В таком случае можно записать следующее полное совместное распределение вероятностей по v и m :

$$P(v, m) = \lambda^{m-v} e^{-\lambda x_{m-v}}, 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{m-v} < \infty. \quad (14)$$

Если известны моменты x и z , то выражение (14) можно представить в виде:

$$P(v, m) = e^{-\lambda(t-x_{m-v})} \frac{(\lambda(t-x_{m-v}))^\beta}{\beta!}, \quad (15)$$

$$\beta = n - m + v.$$

Запишем условную функцию правдоподобия, соответствующую распределению $P(v, m)$. Для этого будем полагать, что в начальный момент запросы на синхронизацию

будут отсутствовать, то есть система будет свободна $v(0) = 0$. Тогда выражение для расчета $L'(\lambda, \mu)$ будет иметь следующий вид:

$$L'(\lambda, \mu) = (\lambda + \mu)^{n_3+m} e^{-(\lambda+\mu)n_3} \lambda^{n_0} e^{-\lambda t_0} \delta, \quad (16)$$

$$\delta = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{n_3} \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^m,$$

где n_0 – начальное число требований, $n_3 = n - n_0$ – общее число требований, полученных на момент обслуживания.

Введя ограничение $N(0) = 0$ для начального потока, приведем формулу (16) к следующему виду:

$$L'(\lambda, \mu) = \lambda^n \mu^m e^{-\lambda t - \mu t_3}. \quad (17)$$

Рассмотрим работу с $L'(\lambda, \mu)$ для стационарных процессов без последствия, для этого остановимся на понятии безусловного правдоподобия $L(\lambda, \mu)$. Зададим распределение вероятностей, соответствующее рассматриваемому случайному процессу $v(t)$ для начального момента времени $P_k(v(0) = k)$. Выразим значение $L(\lambda, \mu)$, соответствующее времени t_0 через соответствующие значения P_k и $L'(\lambda, \mu)$ для состояния $v(0) = k$

$$L(\lambda, \mu) = P_k(v(0) = k) \times L'(\lambda, \mu). \quad (18)$$

Для стационарного процесса величина $v(0)$ может быть представлена формулой (11), поэтому для $L(\lambda, \mu)$ справедливо выражение:

$$L = L(\lambda, \mu) = (1 - p) \times \lambda^{n+v} \times \mu^{m-v} e^{-\mu T - \lambda T}. \quad (19)$$

Используя функцию $L(\lambda, \mu)$, можно получить оценки для λ и μ на основе метода максимального правдоподобия. Рассмотрим случай, когда интенсивности λ и μ удовлетворяют ограничениям $0 < \lambda < \mu$. Для данного случая решение $\arg \max L(\lambda, \mu)$ может быть получено путем решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dL'(\lambda, \mu)}{d\lambda} = \frac{d \ln L'(\lambda, \mu)}{d\lambda} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{dL'(\lambda, \mu)}{d\mu} = \frac{d \ln L'(\lambda, \mu)}{d\mu} = 0. \quad (21)$$

Решая уравнения (20) и (21), получаем следующие оценки для интенсивностей λ и μ :

$$\hat{\lambda} = (\hat{\mu} - \hat{\lambda})(n + v - \hat{\lambda}t), \quad (22)$$

$$\hat{\mu} = (\hat{\lambda} - \hat{\mu})(m - v - \hat{\mu}t). \quad (23)$$

В данном случае λ и μ можно выразить через соответствующую оценку нагрузки $\hat{p} = \hat{\lambda} / \hat{\mu}$:

$$\lambda t = n + v - \frac{\hat{p}}{(1 - \hat{p})}, \quad (24)$$

$$\mu t = m - v + \frac{\hat{p}}{(1 - \hat{p})}. \quad (25)$$

Оценку максимального правдоподобия для p можно получить из следующего выражения:

$$\begin{aligned} L(\hat{p}) &= t \times (\hat{p})^2 \times (m - v - 1) - \gamma \hat{p} + t_0(n + v), \\ \gamma &= t(m - v) + \Delta\tau(n + v + 1). \end{aligned} \quad (26)$$

Получим приближенные значения p' , решая уравнение (26). Для этого заменим $(m - v - 1)$ и $(n + v + 1)$ на $m - v$ и $n + v$, ограничим область определения функции $L(p)$ интервалом $(0;1)$. Тогда имеем следующие два корня:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, \\ p_2 &= \frac{(n + v)t_0}{(m - v)t}. \end{aligned} \quad (27)$$

Ввиду того, что значения корня p_2 ограничены интервалом $(0;1)$, подставляя его в (26), получим:

$$(p_2 - p')(1 - p')(m - v) = p' \left(p' + \frac{t_0}{t} \right). \quad (28)$$

Значения λ и μ с учетом p_2 определяются следующим выражением:

$$\hat{\lambda} \approx \frac{(n + v)t_0}{p'(t - t_0)}, \quad (29)$$

$$\hat{\mu} \approx \frac{(m - v)t}{p'(t - t_0)}. \quad (30)$$

Если $\hat{p} < p_2$ имеем:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &\approx \frac{n + v}{t}, \\ \hat{\mu} &\approx \frac{m - v}{t_0}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\hat{p} = \frac{(n + v)t_0}{(m - v)t}.$$

Определим математические ожидания для $(n+v)/t$ и $(m-v)/t_0$:

$$\begin{aligned} M \frac{n+v}{t} &= \frac{Mn + Mv}{t} = \lambda + \frac{p}{(1-p)t}, \\ M \frac{m-v}{t_0} &= \frac{Mm - Mv}{t_0} = \mu - \frac{p}{(1-p)t_0}. \end{aligned} \quad (32)$$

Значение оценок $\hat{\lambda}, \hat{\mu}$ и \hat{p} можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &\approx \hat{\lambda}_c + \frac{1}{t} \left(v - \frac{\hat{p}_c}{1 - \hat{p}_c} \right), \hat{\lambda}_c = \frac{n}{t}, \\ \hat{\mu} &\approx \hat{\mu}_c + \frac{1}{t_0} \left(v - \frac{\hat{p}_c}{1 - \hat{p}_c} \right), \hat{\mu}_c = \frac{m}{t_0}, \\ \hat{p}_c &= \frac{\hat{\lambda}_c}{\hat{\mu}_c} \end{aligned} \quad (33)$$

где $\hat{\lambda}_c, \hat{\mu}_c, \hat{p}_c$ – оценки правдоподобия без учета начальных данных.

На ряду с классическим алгоритмом максимального правдоподобия, можно использовать различные численные алгоритмы локального поиска, в частности, алгоритмы Ньютона-Рафсона (НР) и Бroyдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно (БФГШ). В качестве оценочной функции будем использовать функцию правдоподобия $L'(\lambda, \mu)$. Для получения оценок $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ рассмотрим метод НР:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda_{i+n} \\ \mu_{i+n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_{i+n-1} \\ \mu_{i+n-1} \end{pmatrix} + H^{-1} \times J, \\ H &= \begin{pmatrix} \frac{d^2 \ln L'(\lambda, \mu)}{d\lambda^2} & \frac{d^2 \ln L'(\lambda, \mu)}{d\lambda d\mu} \\ \frac{d^2 \ln L'(\lambda, \mu)}{d\mu d\lambda} & \frac{d^2 \ln L'(\lambda, \mu)}{d\mu^2} \end{pmatrix}, \\ J &= \begin{pmatrix} \frac{d \ln L'(\lambda, \mu)}{d\lambda} \\ \frac{d \ln L'(\lambda, \mu)}{d\mu} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (34)$$

где H – матрица Гессе, H^{-1} – инверсная матрица Гессе, J – матрица Якоби.

Определим расчетную формулу для $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ на основе метода БФГШ. Сущность данного метода заключается в вычислении приближенного значения матрицы Гессе взамен прямого вычисления на каждой итерации алгоритма. Эта задача решается на основе метода БФГШ итерационным путем и используется разложение функции $L'(\lambda, \mu)$ в ряд Тейлора:

$$F_{k+n}(x_{k+n} + \gamma) = f(x_{k+n}) + \nabla f^T(x_{k+n})\gamma + \frac{1}{2}\gamma^T B_{x_{k+n}}\gamma, \quad (35)$$

$$\gamma = -B^{-1}(x_{k+n})\nabla f(x_{k+n})$$

Запишем основное уравнение БФГШ расчета приближенной матрицы $B_{x_{k+n}}$ через ее инверсное представление $M_{x_{k+n}} = B_{x_{k+n}}^{-1}$:

$$M_{x_{k+n}} = \left(I - \delta_{k+n-1} s_{k+n-1} y_{k+n-1}^T \right)^T \Theta + \delta_{k+n-1} s_{k+n-1} s_{k+n-1}^T,$$

$$\Theta = M_{x_{k+n-1}} \left(I - \delta_{k+n-1} y_{k+n-1} s_{k+n-1}^T \right),$$

$$\delta_{k+n-1} = 1 / y_{k+n-1} s_{k+n-1}^T, \quad (36)$$

$$s_{k+n-1} = x_{k+n} - x_{k+n-1},$$

$$y_{k+n-1} = \nabla f(x_{k+n}) - \nabla f(x_{k+n-1}),$$

где I – единичная матрица.

Для решения задачи поиска оптимальных значений $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ перепишем выражение (36) в следующем виде [6]:

$$M_{x_{k+n}} = \left(I - K \times \Delta X \times \Delta J^T \right)^T M_{x_{k+n-1}} C,$$

$$C = \left(I - K \times \Delta J \times \Delta X^T \right) + K \times \Delta X \times \Delta X^T, \quad (37)$$

$$\Delta X = \begin{pmatrix} \lambda_{i+n} \\ \mu_{i+n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_{i+n-1} \\ \mu_{i+n-1} \end{pmatrix},$$

$$\Delta J = J_{i+n} - J_{i+n-1},$$

где $K = \frac{1}{\Delta J \times \Delta X^T}$.

Для случая, когда закон распределения времени обслуживания носит произвольный характер, требуется пересмотр алгоритма. Для получения оценок $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ для СМО с произвольным распределением необходимо применить метод вложенных цепей Маркова. Запишем математическую формулировку данного метода для расчета вероятностей $P_{ij}(t_k)$:

$$P_{ij}(t_k) = P(X_{k+1} = i | X_k = j) = P(K = m) =$$

$$= \int_0^{\infty} P(K = m | T = t) \Omega(t) dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} \Omega(t) dt, \quad (38)$$

$$j \geq i - 1, i \geq 1,$$

$$P_{ij}(t_k) = 0, j < i - 1, i \geq 1,$$

где $\Omega(t)$ – плотность распределения для $\xi(t_k)$, $\xi(t_k)$ – количество заявок, соответствующих моменту времени $t_k \geq 0$.

Для одного шага вложенной цепи Маркова, исходя из уравнения (38), получим:

$$P_{ij} = \begin{cases} k_{j-i+1}, i > 0 \\ k_j, i = 0 \end{cases}, \quad (39)$$

$$k_j = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} d\Omega(t) dt.$$

Определим основной подход к оценке параметров СМО с произвольным распределением временем обслуживания методом максимального правдоподобия. Для этого введем следующие обозначения: Q_n – входящий поток требований, n_{ij} – количество переходов между состояниями i и j для наблюдаемых требований $Q'_n \subset Q_n$. С учетом данных обозначений можем получить обобщенное выражение функции правдоподобия [7]:

$$P(Q'_n | \theta) = \prod_{n=1}^N P(Q_n = Q'_n | Q_{n-1} = Q'_{n-1}). \quad (40)$$

Логарифмируя левую и правую части уравнения (40), получим:

$$\log P(Q'_n | \theta) = \sum_{n=1}^N \log P(Q_n = Q'_n | Q_{n-1} = Q'_{n-1}). \quad (41)$$

С учетом переходных вероятностей (39) получим [8]:

$$L(\theta) = \log P(Q'_n | \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} (n_{0j} - n_{1j}) \log k_{ij} + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{j=i-1}^{\infty} n_{ij} k_{j-i+1}. \quad (42)$$

Если задано распределение θ , то оценку максимального правдоподобия для функции $L(\theta)$:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} L(\theta) \quad (43)$$

можно вычислить с использованием метода апостериорного максимума:

$$\hat{\theta}_{MAP} = \arg \max_{\theta} (\log P(Q'_n | \theta) + \log P(\theta)), \quad (44)$$

где $P(\theta)$ – плотность распределения для θ .

Результаты и их обсуждение

В качестве базового алгоритма распределенной синхронизации будем использовать модель Рикарта-Агравала (РА), реализующего модель СМО. На Рисунке 1 приведена схема синхронизации РВС с использованием РА [9] и СМО

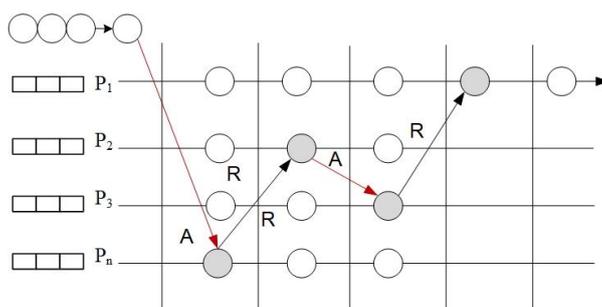


Рисунок 1 – Этапы синхронизации разделяемых ресурсов на основе алгоритма РА и СМО
Figure 1 – Synchronization stages for shared resources based on the RA and SMO algorithm

На Рисунке 1 элемент А обозначает выполнение доступа к ресурсам со стороны одного из процессов, элемент R – освобождение ресурса процессом. Отметим, что вход в критическую секцию процессом P_1 не будет выполнен до тех пор, пока все другие процессы P_2, \dots, P_k не пришлют сообщение типа «R», свидетельствующее о том, что ни один из процессов не владеет ресурсом на данный момент [10]. Если при запросе доступа к ресурсу он уже занят одним из таких процессов, то данный процесс добавляется в очередь ожидания, до тех пор, пока ресурс не будет освобожден. Тогда, используя выражение (44), можно установить области допустимых значений интенсивности входных и выходных потоков λ, μ , решить задачу оптимальной синхронизации и распределения ресурсов РВС в процессе выполнения вычислительных задач с блокировкой и распределением ресурсов между обрабатываемыми узлами.

В качестве базовой РВС в данной работе рассматривается Spark, но вместо стандартного алгоритма синхронизации, включенного в состав сборки Spark [11,12], применяется описанный выше алгоритм. В качестве платформы для анализа статистических характеристик предлагаемой системы синхронизации будем использовать облачную среду платформы Yandex Cloud из 6 узлов со следующей аппаратной конфигурацией: 2 процессора Intel Xeon-Platinum 2.5 ГГц 16 ядер, 128 ГБ ОЗУ, жесткий диск 10 ТБ, оптический канал связи 25 Гб/с. В качестве максимального размера данных для синхронизации будет использован порог в 100 МБ. В Таблице 1 приведены временные характеристики различных методов по определению интенсивностей λ, μ .

Расчет параметров λ, μ позволяет адаптировать предложенные алгоритм РА и СМО для работы в условиях неоднородности аппаратной платформы РВС и в наибольшей степени адаптировать РВС для синхронизации данных в распределенной памяти с учетом ее функциональных и вычислительных возможностей.

Таблица 1. Сравнение производительности алгоритмов оценки параметров СМО в секундах
Table 1. Comparison of SMO parameter estimation algorithm performance in seconds

№	Объем начальной выборки	Алгоритм МП	Алгоритм МП с НР	Алгоритм МП с БФГШ
1.	1000	16,78	20,87	18,43
2.	100000	42,32	49,12	45,81
3.	1000000	97,45	129,87	101,63
4.	100000000	200,03	240	210,18

В процессе анализа Таблицы 1 видно, что с ростом объема данных для проведения статистической оценки, а затем и решения задачи локального поиска, алгоритм БФГШ

показывает более высокую производительность. При этом можно отметить высокую точность алгоритма в получении оптимальных значений анализируемой целевой функции. Также отметим, что рост числа узлов и вычислительных мощностей приводит к увеличению интенсивности синхронизации. Алгоритм позволяет синхронизировать большие объемы данных, которые хранятся в оперативной памяти в виде объекта RDD, распределенной между всеми доступными вычислительными узлами РВС. В отличие от других алгоритмов, предложенный подход позволяет минимизировать требование к сетевому каналу вычислительной среды за счет сокращения числа служебных сообщений, требуемых для обеспечения распределенной синхронизации ресурсов, а также повысить точность статистических выводов при минимальном наборе начальных данных. Применение описанного подхода для определения параметров СМО играет важную роль в оценке основных ее показателей и позволяет: рассчитать допустимое время выполнения единичной процедуры синхронизации для правильной и гарантированной обработки ошибок и исключений; оценить максимальный объем синхронизированных данных, а также максимальное число параллельных заданий, которое может быть запущено с требуемым объемом данных для обеспечения синхронизации.

Заключение

Алгоритмы синхронизации играют основополагающую роль в архитектуре построения современных РВС. Они позволяют исключить избыточное копирование данных между узлами-обработчиками, что дает существенный прирост производительности, а также снижает риски потери данных в случае их повторной пересылки между узлами. Применение СМО и алгоритма РА дает возможность выстраивания концептуально новой архитектуры, включающей в себя возможность предварительной оценки и настройки параметров РВС. Специальные методы на основе максимального правдоподобия в сочетании с численными методами НР и БФГШ позволяют оценить допустимые значения параметров СМО для обеспечения оптимальной синхронизации РВС. Возможность моделирования и оценки параметров для разных процедур обслуживания позволяет адаптировать систему для работы в независимости от временных параметров обслуживания, дает возможность наиболее рационально и адаптивно подойти к процедуре решения задачи синхронизации РВС. Использование свойств несмещенности применяемых оценок дает возможность повысить точность определения параметров λ и μ и позволяет получить их оценки как с учетом начальной информации, так и без нее. Применение БФГШ обусловлено необходимостью оптимизации задачи поиска оптимальных допустимых значений λ и μ за счет исключения операции прямого вычисления матрицы Гессе. Это дает возможность наиболее быстро вычислить необходимые параметры РВС.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Гнеденко Б. В., Коваленко И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания*. М.: Наука; 1966. 431 с.
2. Кендалл М. *Статистические выводы и связи*. М.: Наука; 1973. 878 с.
3. Лившиц А.Л., Мальц Э.А. *Статистическое моделирование систем массового обслуживания*. М.: Сов. Радио; 1978. 248 с.
4. Риордан Дж. *Вероятностные системы обслуживания*. М.: Связь; 1966. 184 с.
5. Azarnova T.V., Polukhin P.V. Distributed computing systems synchronization modeling for solving machine learning tasks. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021;1902(1):012050.

6. Magnus Ya.R., Neudecker H. *Matrix differential calculus with application in statistics and econometrics*. Oxford, Wiley; 1988. 496 p.
7. Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*. М.: Физматлит; 2006. 816 с.
8. Леман Э. *Проверка статистических гипотез*. М.: Наука; 1987. 408 с.
9. Ricart G., Agrawala A.K. An optimal algorithm for mutual exclusion in computer networks. *Communications of the ACM*. 2021;1(2):9–17.
10. Бернс Б. *Распределенные системы. Паттерны проектирования*. СПб.: Питер; 2019. 224 с.
11. Zaharia M., Chowdhury M, Das T, Dave A, McCauley M, Franklin M, Shenker S, Stoica I. Resilient Distributed Datasets: A Fault-Tolerant Abstraction for In-Memory Cluster Computing. *NSDI*. 2012;1–15.
12. Chowdhury M., Ma J., Jordan M.I., Stoica I. Managing Data Transfers in Computer Clusters with Orchestra. *SIGCOMM*. 2011;41(4):98–109.

REFERENCES

1. Gnedenko B.V., Kovalenko N.N. *Vvedenie v teoriyu massovogo obsluzhivaniya*. Moscow, Nauka; 1966. 431 с. (In Russ.)
2. Kendall M. *Statisticheskie vyvody i svyazi*. Moscow, Nauka; 1973. 878 p. (In Russ.)
3. Livshic A.L., Malc E.A. *Statisticheskoe modelirovanie sistem massovogo obsluzhivaniya*. Moscow, Sov. Radio; 1978. 248 p. (In Russ.)
4. Riordan J. *Veroyatnostnye sistemy obsluzhivaniya*. Moscow, Svyaz; 1966. 184 с. (In Russ.)
5. Azarnova T.V., Polukhin P.V. Distributed computing systems synchronization modeling for solving machine learning tasks. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021;1902(1):012050.
6. Magnus Ya.R., Neudecker H. *Matrix differential calculus with application in statistics and econometrics*. Oxford, Wiley; 1988. 496 p.
7. Kobzar A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika*. Moscow, Fizmatlit; 2006. 816 p. (In Russ.)
8. Леман Э. *Проверка статистических гипотез*. М.: Наука; 1987. 408 p. (In Russ.)
9. Ricart G., Agrawala A.K. An optimal algorithm for mutual exclusion in computer networks. *Communications of the ACM*. 2021;1(2):9–17.
10. Berns B. *Raspredeleynnye sistemy. Patterny proektirovaniya*. Saint Petersburg, Piter; 2019. 224 p. (In Russ.)
11. Zaharia M., Chowdhury M, Das T, Dave A, McCauley M, Franklin M, Shenker S, Stoica I. Resilient Distributed Datasets: A Fault-Tolerant Abstraction for In-Memory Cluster Computing. *NSDI*. 2012;1–15.
12. Chowdhury M., Ma J., Jordan M.I., Stoica I. Managing Data Transfers in Computer Clusters with Orchestra. *SIGCOMM*. 2011;41(4):98–109.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Полухин Павел Валерьевич, кандидат техн. наук, кафедра математических методов исследования операций факультета прикладной математики, информатики и механики Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация.

e-mail: ivdas92@mail.ru

Pavel Valerievich Polukhin, Candidate of Technical Sciences, Department of Mathematical Methods for Operations Research, Faculty of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.

*Статья поступила в редакцию 12.05.2022; одобрена после рецензирования 06.06.2022;
принята к публикации 28.06.2022.*

*The article was submitted 12.05.2022; approved after reviewing 06.06.2022;
accepted for publication 28.06.2022.*