

УДК 519.87+004.421

DOI: [10.26102/2310-6018/2022.38.3.009](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2022.38.3.009)

## Математическая модель стационарного переноса ионов соли в сечении канала при равновесии

Н.О. Чубырь✉, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенев, И.В. Гудза

*Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация  
chubyr-natalja@mail.ru✉*

**Резюме.** Равновесие на межфазных границах во многом определяет процессы переноса и поэтому ее исследование является важной задачей. В работе предлагается математическая модель задачи стационарного переноса ионов соли при наступлении равновесия, а именно при нулевом токе, в сечении канала обессоливания, образованного анионообменной и катионообменной мембраной, в виде краевой задачи для систем уравнений Нернста-Планка и Пуассона в потенциостатическом режиме. Получено численное и асимптотическое решение этой краевой задачи. Проведено сравнение численного и асимптотического решения, показывающее их совпадения с хорошей точностью. Полученное асимптотическое решение позволяет провести исчерпывающий анализ состояния равновесия в зависимости от начальной концентрации, скачка потенциалов, свойств ионообменных мембран и установить основные закономерности переноса. Показано, что стационарное состояние процесса переноса ионов соли через сечение канала совпадает с равновесным. Установлены расположение и размеры областей пространственного заряда и электронейтральности. Получена зависимость напряженности электрического поля и концентраций от скачка потенциала и граничных значений концентраций катионов и анионов. Результаты работы могут быть использованы для определения оптимальных режимов работы электродиализных аппаратов очистки воды.

**Ключевые слова:** малый параметр, асимптотическое решение, сечение канала обессоливания, электромембранные системы, численное решение, сингулярно-возмущенные задачи.

**Благодарности:** исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 20-58-12018 ННИО\_а.

**Для цитирования:** Чубырь Н.О., Коваленко А.В., Уртенев М.Х., Гудза И.В., Математическая модель стационарного переноса ионов соли в сечении канала при равновесии. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2022;10(3). Доступно по: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1219> DOI: 10.26102/2310-6018/2022.38.3.009

## Mathematical model of salt ion stationary transport in the cross section of the channel at equilibrium

N.O. Chubyr✉, A.V. Kovalenko, M.K. Urtenov, I.V. Gudza

*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation  
chubyr-natalja@mail.ru✉*

**Abstract.** The equilibrium at the interphase boundaries largely determines the transfer processes and therefore studying it is an important task. The paper proposes a mathematical model of the problem of salt ion stationary transfer at the onset of equilibrium, namely at zero current, in the cross section of the desalination channel formed by anion exchange and cation exchange membrane in the form of a boundary value problem for systems of Nernst-Planck and Poisson equations in the potentiostatic mode. A numerical and asymptotic solution of this boundary value problem is obtained. The numerical and asymptotic solutions are compared, and their coincidences were shown with good accuracy. The acquired asymptotic solution allows for an exhaustive analysis of the equilibrium state depending on the

initial concentration, potential jump, and properties of ion-exchange membranes and helps to establish the basic transfer patterns. It is shown that the stationary state of salt ion transfer process through the channel section coincides with the equilibrium state. The location and dimensions of the spatial charge and electroneutrality regions are established. The dependence of the electric field strength and concentration on the potential jump and the boundary values for cation and anion concentrations is obtained. The results of the research can be used to determine the optimal operating modes of electro dialysis water purification devices.

**Keywords:** small parameter, asymptotic solution, cross section of desalination channel, electromembrane systems, numerical solution, singularly perturbed problems.

**Acknowledgments:** The reported study was funded by RFBR and DFG under the research project No. 20-58-12018 NNIO\_a.

**For citation:** Chubyr N.O., Kovalenko A.V., Urtenov M.K., Gudza I.V. Mathematical model of salt ion stationary transport in the cross section of the channel at equilibrium. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2022;10(3). Available from: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1219> DOI: 10.26102/2310-6018/2022.38.3.009 (In Russ.).

## Введение

Процессы переноса через ионообменные мембраны во многом определяются и управляются явлениями, возникающими на межфазной границе. Так, например, для идеально селективной мембраны равновесный электроосмос не может привести к неустойчивости, в то же время отказ от предположения об идеальной селективности мембраны может вызывать неустойчивость равновесия [1]. Таким образом, исследование ионного состава и электропроводящих свойств ионообменных мембран, а также равновесия на межфазных границах изучаемых электро мембранных систем является важной задачей [2-4]. В этом направлении отметим, например, диссертационное исследование [5], посвященное теории электро мембранных процессов с участием амфолитов, где приведен достаточно большой обзор современных работ в этой области. Целью работы является теоретическое исследование равновесия при стационарном переносе ионов соли, в сечении канала обессоливания, образованного анионообменной и катионообменной мембраной. Для этого потребовалось решить следующие задачи: 1) составление математической модели в виде краевой задачи, 2) численное и асимптотическое ее решение. В работе предложена математическая модель переноса ионов соли в сечении бесконечно длинного канала обессоливания при отсутствии течения раствора. В этих условиях массоперенос в любом сечении происходит одинаково, поэтому описывается одномерными уравнениями Нернста-Планка-Пуассона [1].

## Математическая модель

Краевая задача в размерном виде, характерные величины, переход к безразмерному виду, оценка безразмерного параметра  $\varepsilon$  и скачка потенциала приведены в предыдущих работах [6, 7, 8].

В безразмерном виде краевая задача является сингулярно-возмущенной [6, 9]:

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dx} &= C_1 E - j_1, \\ \frac{dC_2}{dx} &= -C_2 E - j_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dE}{dx} &= C_1 - C_2, \\ E &= -\frac{d\varphi}{dx}. \end{aligned}$$

$$\left( C_1 E - \frac{dC_1}{dx} \right) (0, \varepsilon) = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} C_2(0, \varepsilon) &= C_{2a}, \quad \varphi(0, \varepsilon) = \varphi_0, \\ C_1(1, \varepsilon) &= C_{1k}, \\ \left( C_2 E + \frac{dC_2}{dx} \right) (1, \varepsilon) &= 0, \quad (2) \\ \varphi(1, \varepsilon) &= 0, \\ \int_0^1 E dx &= \varphi(0) - \varphi(1) = \varphi_0. \end{aligned}$$

Здесь  $C_1(x, \varepsilon)$ ,  $C_2(x, \varepsilon)$ ,  $j_1$ ,  $j_2$ ,  $E(x, \varepsilon)$ ,  $\varphi(x, \varepsilon)$  соответственно искомые концентрации и потоки катионов и анионов, а также напряженность и потенциал электрического поля,  $\varepsilon > 0$  малый параметр.

Для стационарного переноса  $j_1 = const$  и  $j_2 = const$ .

Из условия (1) следует  $j_1 = 0$ , а из условия (2) –  $j_2 = 0$ , следовательно, ток, переносимый ионами соли, равен нулю  $I = j_1 - j_2 = 0$ , то есть стационарное состояние процесса переноса ионов соли через сечение канала совпадает с равновесным, и система уравнений принимает вид:

$$\frac{dC_1}{dx} = C_1 E, \quad (3)$$

$$\frac{dC_2}{dx} = -C_2 E, \quad (4)$$

$$\varepsilon \frac{dE}{dx} = C_1 - C_2.$$

### Асимптотическое решение

При асимптотическом решении будем использовать метод декомпозиции [4], а именно вывод уравнения для напряженности электрического поля, не содержащего концентраций [4]:

$$\varepsilon \frac{d^2 E}{dx^2} = \frac{1}{2} \varepsilon E^3 - \alpha E. \quad (5)$$

Заметим, что как только  $E$  найдено, концентрации могут быть легко вычислены по уравнениям (3)-(4). Однако, для получения асимптотических приближений удобнее использовать уравнения:

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 - \alpha,$$

$$C_1 - C_2 = \varepsilon \frac{dE}{dx}.$$

Откуда следует:

$$C_1 = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{dE}{dx} + \frac{1}{4} \varepsilon E^2 - \frac{1}{2} \alpha, \quad (6)$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \varepsilon \frac{dE}{dx} + \frac{1}{4} \varepsilon E^2 - \frac{1}{2} \alpha. \quad (7)$$

Для определения неизвестной константы  $\alpha$ , а также двух значений напряженности

$$E(0, \varepsilon) = E_A \text{ и } E(1, \varepsilon) = E_K \quad (8)$$

получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{aligned} C_{2A} &= \frac{\varepsilon}{2} E_A^2 - \alpha, \\ C_{1K} &= \frac{\varepsilon}{2} E_K^2 - \alpha, \\ \int_0^1 E(x) dx &= \varphi_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для асимптотического решения краевой задачи (2), (8) для  $E$  можно использовать метод погранслойных функций [5], который наряду с асимптотическим решением дает доказательство существования и единственности краевой задачи. Однако, в данном случае удобно использовать метод сращивания асимптотических разложений возле погранслоев у ионообменных мембран при  $x=0$ ,  $x=1$  и отдельно в средней части канала. Из (9) следует, что  $\alpha < 0$ .

### Асимптотическое решение в области электронейтральности (ОЭН)

В области электронейтральности имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{C}_1}{dx} &= \bar{C}_1 \bar{E}, \\ \frac{d\bar{C}_2}{dx} &= -\bar{C}_2 \bar{E}, \\ \bar{C}_1 - \bar{C}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = \bar{C}$ ,  $\bar{C}\bar{E} = 0$ . Откуда одно из решений, имеющее вид  $\bar{E} = 0$ , как будет видно из дальнейших вычислений, позволяет сращивать его с решением в области пространственного заряда. При этом  $\bar{C} \neq 0$  – произвольная постоянная, которую необходимо определить впоследствии.

### Асимптотическое решение в области пространственного заряда (ОПЗ)

Из уравнения (2), после умножения на  $\frac{dE}{dx}$  и интегрирования получаем уравнение:

$$\varepsilon \left( \frac{dE}{dx} \right)^2 = \frac{1}{4} \varepsilon E^4 - \alpha E^2 + 2\beta,$$

которое возле  $x=0$  и  $x=1$  решается по-разному.

а) Решение в погранслое около  $x=0$ .

Замена  $\xi = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $E = \frac{\tilde{E}(\xi, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}$ ,  $\xi \rightarrow +\infty$ , при  $\varepsilon \rightarrow +0$  приводит к уравнению

$$\frac{d}{d\xi} \tilde{E} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{E})^4 - 4\alpha(\tilde{E})^2}.$$

Вблизи  $x=0$  функция  $E$  убывает, поэтому берем знак «-»:

$$\frac{d}{d\xi} \tilde{E} = -\frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{E})^4 - 4\alpha(\tilde{E})^2},$$

интегрируя которое, после ряда преобразований, получаем:

$$\tilde{E} = \frac{4\sqrt{\beta} e^{-\sqrt{-\alpha}\xi}}{1 - \beta e^{-\sqrt{-4\alpha}\xi}} (\sqrt{-\alpha}).$$

Таким образом:

$$E(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{4\sqrt{\beta} e^{-\sqrt{-\alpha} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - \beta e^{-\sqrt{-4\alpha} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}} (\sqrt{-\alpha}).$$

Условие сращивания с решением в ОЭН:  $\tilde{E} \rightarrow 0, \xi \rightarrow +\infty$  очевидно выполняется, более того, можно определить левую границу ОЭН в виде  $x_1 = k\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|$ , где  $k > 0$  – произвольная постоянная.

б) Решение в погранслое около  $x=1$  аналогично пункту а) с необходимыми изменениями, а именно, замена имеет вид:

$$\xi = \frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}, E = \frac{\tilde{E}(\xi, \varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \xi \rightarrow -\infty, \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0$$

приводит к уравнению

$$\frac{d}{d\xi} \tilde{E} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{E})^4 - 4\alpha(\tilde{E})^2}.$$

Вблизи  $x=1$  функция  $E$  возрастает, поэтому берем знак «+»:

$$\frac{d}{d\xi} \tilde{E} = \frac{1}{2} \sqrt{(\tilde{E})^4 - 4\alpha(\tilde{E})^2},$$

решая которое получаем:

$$E(x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{4\sqrt{\beta} e^{-\sqrt{-\alpha} \frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - \beta e^{-\sqrt{-4\alpha} \frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}} (\sqrt{-\alpha}).$$

Условие сращивания с решением в ОЭН:  $\tilde{E} \rightarrow 0, \xi \rightarrow -\infty$  очевидно выполняется, более того, можно определить правую границу ОЭН в виде  $x_2 = 1 - k\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|$ , где  $k > 0$  – произвольная постоянная.

### Асимптотическое представление на $[0, 1]$

Таким образом, напряженность электрического поля  $E(x, \varepsilon)$  в начальном приближении имеет асимптотическое представление при  $\varepsilon \rightarrow +0$ :

$$E(x, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{4\sqrt{\beta} e^{-\sqrt{-\alpha} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - \beta e^{-\sqrt{-4\alpha} \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}} (\sqrt{-\alpha}), & x \in [0; x_1], \quad x_1 = k\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon| \\ 0, & x \in [x_1, x_2] \\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{4\sqrt{\beta} e^{-\sqrt{-\alpha} \frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - \beta e^{-\sqrt{-4\alpha} \frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}}} (\sqrt{-\alpha}), & x \in [x_2; 1], \quad x_2 = 1 - k\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon| \end{cases}, \varepsilon \rightarrow +0 \quad (10)$$

Функции  $C_1$  и  $C_2$  можно вычислить, используя формулы (6), (7).

### Определение констант

Из формул (3)-(7) следует, что  $\alpha = -2\bar{C} < 0$ , и, соответственно,  $C_{2A} = \frac{\varepsilon}{2} E_A^2 + 2\bar{C}$ ,

$$C_{1K} = \frac{\varepsilon}{2} E_K^2 - \alpha, \text{ т. е. } E_A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{2(C_{2A} - 2\bar{C})}, \quad E_K = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{2(C_{1K} - 2\bar{C})}$$

Таким образом, нужно найти лишь константу  $\bar{C}$ .

Для этого используем соотношение:

$$\varphi_0 = \int_0^1 E(x, \varepsilon) dx = \int_0^{x_1} E(x, \varepsilon) dx + \int_{x_1}^{x_2} E(x, \varepsilon) dx + \int_{x_2}^1 E(x, \varepsilon) dx.$$

С учетом, что  $C_2(x_1, \varepsilon) = \bar{C}$  и  $C_1(x_2, \varepsilon) = \bar{C}$ , причем  $x_1 \approx 0, x_2 \approx 1$  левая и правая границы ОЭН.

$$\varphi_0 = \int_0^1 E(x, \varepsilon) dx = -\int_0^{x_1} \frac{dC_2}{C_2} + \int_{x_1}^{x_2} \bar{E}(x, \varepsilon) dx + \int_{x_2}^1 \frac{dC_1}{C_1} = \ln \frac{C_{2A} C_{1K}}{\bar{C}^2},$$

$$\text{откуда } \bar{C} = \sqrt{C_{1K} C_{2A}} e^{-\frac{1}{2}\varphi_0} \quad (11)$$

Формула (11) показывает концентрацию катионов и анионов в области электронейтральности, которая занимает почти всю ширину канала, постоянна и пропорциональна среднегеометрическому их граничных значений на мембранах и экспоненциально зависит от скачка потенциала.

### Сравнение с численным решением

Ниже дано сравнение полученного безразмерного асимптотического решения с численным решением, найденным методом конечных элементов для некоторого набора исходных данных в размерном виде.

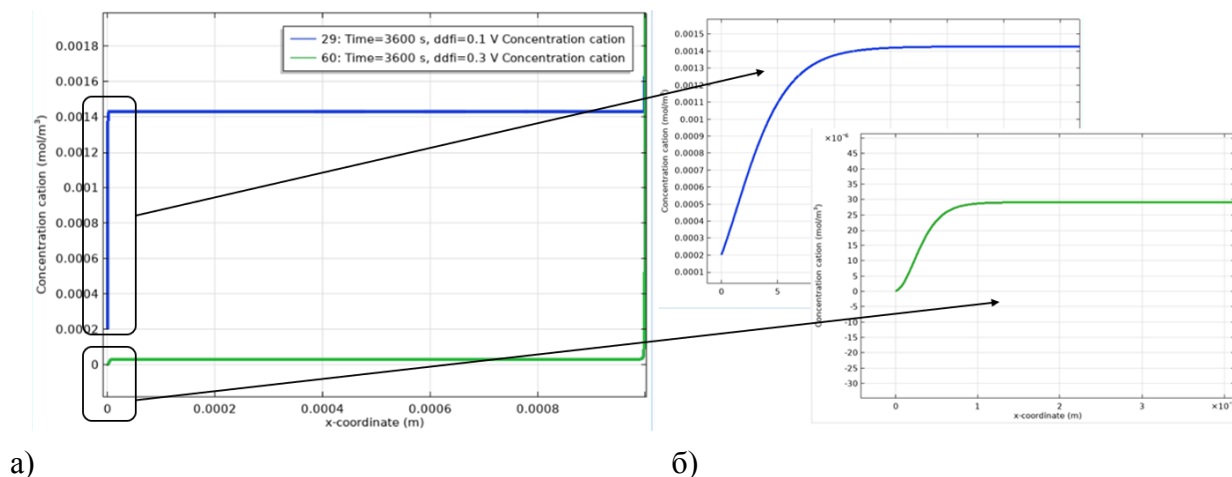


Рисунок 1 – Графики концентрации катионов, полученные в результате численного решения при размерных скачках потенциала 0,1В и 0,3В, ширина канала равна 1мм, концентрации на границах равны 0,01 моль/м<sup>3</sup>: а) общий вид, б) увеличение около анионообменной мембраны  
Figure 1 – Graphs of cation concentration obtained as a result of numerical solution with dimensional jumps of potential 0.1V and 0.3V; the channel width is 1 m; the concentrations at the boundaries are 0.01 mol/m<sup>3</sup>: a) general view, b) increase near the anion exchange membrane

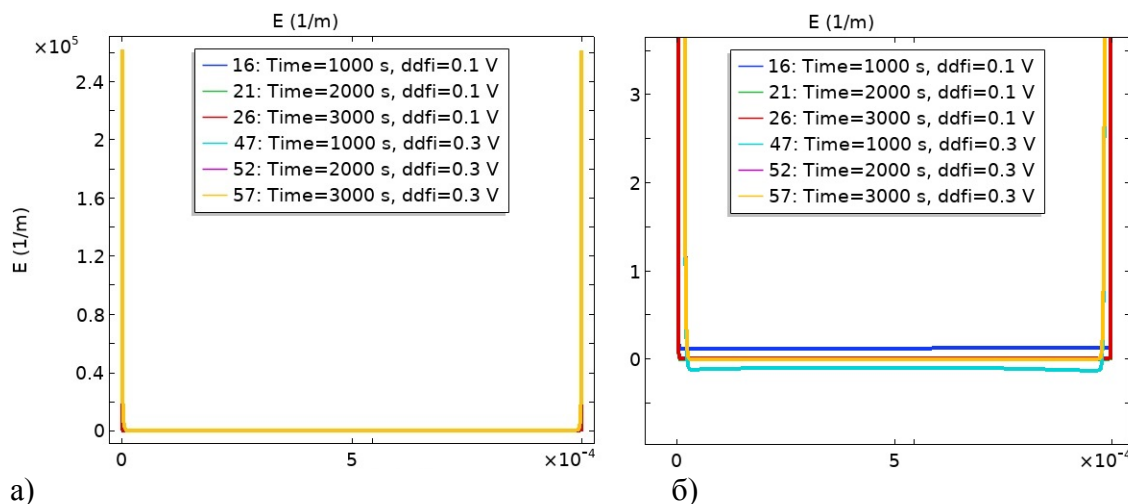


Рисунок 2 – Графики напряженности электрического поля, полученные в результате численного решения: а) общий вид, б) увеличение  
Figure 2 – Graphs of the electric field strength obtained as a result of numerical solution: a) general view, b) magnification

Сравнение асимптотического и численного решений проведено для двух размерных значений скачка потенциала 0,1В и 0,3В. Безразмерные значения концентраций  $\bar{C}$ , найденные для этих двух случаев имеют значения  $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = e^{-2} = 0,135$  и  $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = e^{-6} = 0,0024$ . Им соответствуют следующие размерные

значения концентраций  $0,0014 \frac{\text{моль}}{\text{м}^3}$  и  $0,0000248 \frac{\text{моль}}{\text{м}^3}$ . Как видно из Рисунка 1, значения концентраций, полученные в результате численного расчета, совпадают с хорошей точностью. Незначительные отличия численного и асимптотического решения связаны как с погрешностью численного решения, связанного с «жесткостью» [10] краевой задачи, так и с тем, что используется только начальное асимптотическое представление. Напряженность электрического поля в численном решении внутри отрезка с большой точностью обращается в ноль (Рисунок 2), как это и следует из асимптотического решения.

### Заключение

В работе сформулирована безразмерная математическая модель равновесного переноса ионов соли через сечение канала обессоливания непроточного электродиализного аппарата. Осуществлен переход к безразмерному виду, который получился сингулярно возмущенной краевой задачей. Предложено асимптотическое решение этой краевой задачи методом сращивания асимптотических разложений. Проведено сравнение асимптотического решения с численным решением, которое показало их совпадение с хорошей точностью. Асимптотическое решение позволяет проводить исчерпывающий анализ состояния равновесия в широком диапазоне изменения начальной концентрации, скачка потенциалов, свойств ионообменных мембран. Показано, например, что концентрация катионов и анионов в области электронейтральности пропорциональна среднегеометрическому их граничных значений на мембранах и экспоненциально зависит от скачка потенциала и т. д. Показано, что стационарное состояние процесса переноса ионов соли через сечение канала совпадает с равновесным. В дальнейшем предполагается обобщение результатов на случай тернарного электролита [11], а также гальванодинамического и гальваностатического режимов [12].

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Заболоцкий В.И., Никоненко В.В. *Перенос ионов в мембранах*. М.: Наука; 1996. 392 с.
2. Kwak R., Pham V.S., Lim K.M., Han J., Shear Flow of an Electrically Charged Fluid by Ion Concentration Polarization: Scaling Laws for Electroconvective Vortices. *Phys. Rev. Lett.* 2013;(10):114501.
3. Demekhin E.A., Nikitin N.V., and Shelistov V.S. Direct numerical simulation of electrokinetic instability and transition to chaotic motion Fluids. *Phys.* 2013;25:122001.
4. Новикова Л.А. *Ионный перенос и равновесие в электромембранных системах с растворами аминокислот*. Воронеж: ВГУ; 2003. 22 с.
5. Rubinstein I., Zaltzman B. Equilibrium Electroconvective Instability. *Phys. Rev. Lett.* 2015;(114):114502.
6. Уртенев М.Х. *Краевые задачи для систем уравнений Нернста-Планка-Пуассона (асимптотические разложения и смежные вопросы)*. Краснодар: КубГУ; 1999. 124 с.
7. Чубырь Н.О., Коваленко А.В., Уртенев М.Х. *Двумерные математические модели переноса бинарного электролита в мембранных системах (численный и асимптотический анализ)*. Краснодар: КубГТУ; 2012. 132 с.
8. Узденова А.М., Коваленко А.В., Уртенев М.А.Х. *Математические модели электроконвекции в электромембранных системах*. Карачаевск: КЧГУ; 2011. 154 с.



9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*. М.: Высшая школа; 1990. 209 с.
10. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. *Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем*. М.: Мир; 1983. 254 с.
11. Бабешко В.А., Заболоцкий В.И., Корженко Н.М., Сеидов Р.Р., Уртенев М.Х. Теория стационарного переноса тернарного электролита в одномерном случае. *Доклады РАН*. 1997;355(4):488–497.
12. Uzdanova A., Kovalenko A., Urtenov M., Nikonenko V. 1D mathematical modelling of non-stationary ion transfer in the diffusion layer adjacent to an ion-exchange membrane in galvanostatic mode. *Membranes*. 2018;8(3):84.

## REFERENCES

1. Zabolockij V.I., Nikonenko V.V. *Ion transfer in membranes*. М.: Nauka; 1996. 392 p. (In Russ.).
2. Kwak R., Pham V.S., Lim K.M., Han J., Shear Flow of an Electrically Charged Fluid by Ion Concentration Polarization: Scaling Laws for Electroconvective Vortices. *Phys. Rev. Lett.* 2013;(10):114501.
3. Demekhin E.A., Nikitin N.V., and Shelistov V.S. Direct numerical simulation of electrokinetic instability and transition to chaotic motion Fluids. *Phys.* 2013;25:122001.
4. Novikova L.A. Ion transfer and equilibrium in electromembrane systems with amino acid solutions. Voronezh, VGU; 2003. 22 p. (In Russ.).
5. Rubinstein I., Zaltzman B. Equilibrium Electroconvective Instability. *Phys. Rev. Lett.* 2015;(114):114502.
6. Urtenov M.H. *Boundary value problems for systems of Nernst-Planck-Poisson equations (asymptotic expansions and related issues)*. Krasnodar: KubGU\$ 1999. 124 p. (In Russ.).
7. Chubyr' N.O., Kovalenko A.V., Urtenov M.H. *Two-dimensional mathematical models of binary electrolyte transfer in membrane systems (numerical and asymptotic analysis)*. Krasnodar: KubGTU; 2012. 132 p. (In Russ.).
8. Uzdanova A.M., Kovalenko A.V., Urtenov M.A.H. *Mathematical models of electroconvection in electromembrane systems*. Karachaevsk: KchGU; 2011. 154 p. (In Russ.).
9. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asymptotic methods in the theory of singular perturbations*. М.: Vysshaja shkola; 1990. 209 p. (In Russ.).
10. Dulan Je., Miller Dzh., Shilders U. *Uniform numerical methods for solving problems with a boundary layer*. М.: Mir; 1983. 254 p. (In Russ.).
11. Babeshko V.A., Zabolockij V.I., Korzhenko N.M., Seidov R.R., Urtenov M.H. Theory of stationary transfer of ternary electrolyte in the one-dimensional case. *Doklady RAN*. 1997;355(4):488–497. (In Russ.).
12. Uzdanova A., Kovalenko A., Urtenov M., Nikonenko V. 1D mathematical modelling of non-stationary ion transfer in the diffusion layer adjacent to an ion-exchange membrane in galvanostatic mode. *Membranes*. 2018;8(3):84.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Чубырь Наталья Олеговна**, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра прикладной математики, Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация.  
e-mail: [chubyr-natalja@mail.ru](mailto:chubyr-natalja@mail.ru)  
ORCID: [0000-0003-3535-0361](https://orcid.org/0000-0003-3535-0361)

**Natalia Olegovna Chubyr**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Applied Mathematics Department, Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation.

**Коваленко Анна Владимировна**, доктор технических наук, доцент, кафедра анализа данных и искусственного интеллекта, Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация.

*e-mail:* [savanna-05@mail.ru](mailto:savanna-05@mail.ru)

ORCID: [0000-0002-3991-3953](https://orcid.org/0000-0002-3991-3953)

**Anna Vladimirovna Kovalenko**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Data Analysis and Artificial Intelligence, Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation.

**Уртенев Махамет Хусеевич**, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра прикладной математики, Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация.

*e-mail:* [urtenovmax@mail.ru](mailto:urtenovmax@mail.ru)

ORCID: [0000-0002-0252-6247](https://orcid.org/0000-0002-0252-6247)

**Makhamet Khuseevich Urtenov**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Applied Mathematics Department, Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation.

**Гудза Инна Владимировна**, аспирантка, кафедра прикладной математики, Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация.

*e-mail:* [shkorkina\\_inna@mail.ru](mailto:shkorkina_inna@mail.ru)

**Inna Vladimirovna Gudza**, Postgraduate Student, Applied Mathematics Department, Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation.

*Статья поступила в редакцию 17.08.2022; одобрена после рецензирования 06.09.2022; принята к публикации 12.09.2022.*

*The article was submitted 17.08.2022; approved after reviewing 06.09.2022; accepted for publication 12.09.2022.*