УДК 517.929.2
DOI: 10.26102/2310-6018/2022.39.4.014

Определение скорости стабилизации решения одной начальной задачи для уравнения теплопроводности

А.С. Рябенко, З. Тран

Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
tranduysp94@gmail.com

Резюме. Дифференциальные уравнения интенсивно применяются в качестве моделей широкого круга естественнонаучных задач. Для большинства дифференциальных уравнений не удается получить решения в квадратурах, выраженных через элементарные или специальные функции, а если и удается, то зачастую представления этих решений очень громоздки, что затрудняет их практическое использование. Поэтому очень остро стоит вопрос об отыскании простых формул, которые с достаточной степенью точности описывают качественное поведение решений дифференциальных уравнений на некотором интервале изменения независимой переменной. Для определения качественного поведения решений дифференциальных уравнений на некотором интервале изменения независимой переменной используются асимптотические методы. Асимптотические методы более предпочтительны, чем численные методы, когда нужно знать поведение решения дифференциального уравнения, рассматриваемого на неограниченном интервале. Это объясняется тем, что невязка решения дифференциального уравнения (модуль разности истинного решения и численного решения) обычно оценивается сверху через величину, пропорциональную длине интервала, на котором применяется численный метод. В работе рассматривается одномерная задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием. Используя явное представление решения задачи Коши, была построена точная равномерная оценка и точная поточечная оценка скорости стабилизации решения задачи Коши к нулю при большом времени.

Ключевые слова: распределение тепла, стабилизация решения, поведение по времени, асимптотика по времени, уравнение теплопроводности, оценка по времени, асимптотика на бесконечности.

Для цитирования: Рябенко А.С., Тран З. Определение скорости стабилизации решения одной начальной задачи для уравнения теплопроводности. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2022;10(4). Доступно по: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1268 DOI: 10.26102/2310-6018/2022.39.4.014

Determination of the stabilization rate of the solution to one initial problem for the heat equation

A.S. Ryabenko, D. Tran

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
tranduysp94@gmail.com

Abstract. Differential equations are intensively used as models for a wide range of natural science problems. For most differential equations, it is not possible to obtain solutions in quadratures expressed in terms of elementary or special functions, and if it is possible, then the representations of these solutions are often very cumbersome, which makes their practical application difficult. Therefore, the question of finding simple formulas that describe with a sufficient degree of accuracy the qualitative behavior of solutions to differential equations on a certain interval of variation of the independent variable is very acute. Asymptotic methods are employed to determine the qualitative behavior of solutions to differential equations on a certain interval of change of the independent variable.

Asymptotic methods are more preferable than numerical methods when one needs to know the behavior of the solution to a differential equation considered on an unbounded interval. This is explained by the fact that the discrepancy of the solution to a differential equation (the modulus of the difference between the true solution and the numerical solution) is usually estimated from above through a value proportional to the length of the interval on which the numerical method is applied. The paper considers the one-dimensional Cauchy problem for an inhomogeneous heat equation with a homogeneous initial condition. Using an explicit representation of the solution to the Cauchy problem, an exact uniform estimate and an exact pointwise estimate of the stabilization rate of the solution to the Cauchy problem to zero for a long time were constructed.

Keywords: heat distribution, solution stabilization, time behavior, time asymptotics, heat equation, time estimate, asymptotics at infinity.

For citation: Ryabenko A.S., Tran D. Determination of the stabilization rate of the solution to one initial problem for the heat equation. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2022;10(4). Available from: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1268 DOI: 10.26102/2310-6018/2022.39.4.014 (In Russ.).

Введение

Огромное количество процессов, изменяющихся с течением времени, моделируются задачами для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. В таких задачах одна из независимых переменных интерпретируется как время и стандартно обозначается t, а сами задачи часто называют нестационарными или эволюционными. При изучении нестационарных задач естественным образом возникает вопрос о поведении их решений при $t \to \infty$ [1-4]. Это поведение показывает, к чему в итоге эволюционирует процесс, описываемый нестационарной задачей.

Большое количество работ посвящено изучению поведения при $t \to \infty$ решений задач для параболических уравнений [5-9], так как к задачам для параболических уравнений приводятся многие важные физические задачи, например, задачи распространения тепла, задачи диффузии, задачи теории марковских процессов и т. п.

Пожалуй, одной из первых работ, посвященных изучению поведения при $t \to \infty$ решения задачи для параболического уравнения, была работа [10] А. Н. Тихонова. В ней автор показал, что решение однородного уравнения теплопроводности, рассмотренного в цилиндрической области $Q \times (0;\infty)$, где Q – ограниченная область в R^n, принимающее на боковой поверхности цилиндра значения $\varphi(x)$, равномерно по $x \in Q$ стремится при $t \to \infty$ к решению уравнения Лапласа в области Q, принимающему на границе области значения $\varphi(x)$. Этот результат обобщался во многих работах. Среди этих работ большое количество было посвящено определению условий, при которых решения задач для параболических уравнений стабилизируются при большом времени, в том числе стабилизируются к нулю [11-14]. Чаще всего в таких работах рассматривались однородные уравнения, а под стабилизацией решения понималось существование равномерного или поточечного предела при $t \to \infty$ [11].

Таким образом, при изучении задач для параболических уравнений и вообще для эволюционных уравнений естественным образом возникает вопрос об определении скорости стабилизации решений.

В работе рассматривается задача

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

$$v(x,0) = 0, \tag{2}$$

где $t > 0, x \in R, a \equiv const > 0$.

Под решением задачи (1)-(2) понимается классическое решение.

Предполагается, что функция $f(x,t)$ принадлежит пространству $C^{2,1}_{x,t}\big(R\times(0;\infty)\big)\cap C\big(R\times 0;\infty)\big)$, является финитной по совокупности переменных и $\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(y,\tau)\,dyd\tau\neq 0$.

Хорошо известно [15], что при сформулированных условиях на функцию $f(x,t)$ решение задачи (1)-(2) задается формулой

$$v(x,t)=\int_0^t\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,dyd\tau. \qquad (3)$$

Целью работы является построение точной равномерной оценки и точной поточечной оценки скорости стабилизации к нулю функции $v(x,t)$, заданной равенством (3), при большом времени.

Оценка скорости стабилизации

Теорема. Для функции $v(x,t)$ при достаточно больших t равномерно по $x\in R$ выполнена оценка

$$|v(x,t)|\le Ct^{-1/2},$$

где C – некоторая константа, причем это не улучшаемая равномерная оценка.

Для любого фиксированного $x\in R$ при $t\to\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$v(x,t)=\frac{t^{-1/2}}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(y,\tau)\,dyd\tau+O(t^{-3/2}),$$

причем оценка $O(t^{-3/2})$ равномерна по $x\in[-N_1;N_1]$, где N_1 – любое фиксированное положительное число.

Доказательство. Так как функция $f(x,t)$ финитна по совокупности переменных, то найдется такая положительная константа N, что $\operatorname{supp} f(x,t)\subset[-N;N]\times[0;N]$. Тогда при $t>N$

$$v(x,t)=\int_0^N\int_{-N}^N \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}}f(y,\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,dyd\tau. \qquad (4)$$

Воспользовавшись формулой Тейлора, получаем, что

$$e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}}=1-\frac{(x-y)^2}{4a^2(t-\tau)}e^{-\frac{(x-y)^2Q_1}{4a^2(t-\tau)}}, \qquad (5)$$

где $0<Q_1<1$.

С учетом (5) при $t>N$ представление (4) можно записать в виде

$$v(x,t)=I_1(t)+I_2(x,t), \qquad (6)$$

где

$$I_1(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N\frac{f(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,dyd\tau,$$

$$I_2(x,t)=-\frac{1}{8a^3\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N\frac{(x-y)^2f(y,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-y)^2Q_1}{4a^2(t-\tau)}}\,dyd\tau$$

Из формулы Тейлора следует, что при $\alpha > 0$ и малых x

$$(1-x)^{-\alpha} = 1 + \alpha x(1 - xQ_\alpha)^{-1-\alpha},$$

где $0 < Q_\alpha < 1$.

При помощи последнего равенства находим, что при $\alpha > 0$ и $t \gg \tau$

$$(t-\tau)^{-\alpha} = t^{-\alpha}\left(1 - \tfrac{\tau}{t}\right)^{-\alpha} = t^{-\alpha}\left(1 + \tfrac{\alpha\tau}{t}\left(1 - \tfrac{\tau}{t}Q_\alpha\right)^{-1-\alpha}\right) =$$

$$= t^{-\alpha} + \alpha t^{-1-\alpha}\tau\left(1 - \tfrac{\tau}{t}Q_\alpha\right)^{-1-\alpha}. \quad (7)$$

Применив (7), получаем, что при достаточно больших t

$$I_1(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N \frac{f(y,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}dyd\tau =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N f(y,\tau)\left(t^{-1/2} + \frac{1}{2}t^{-3/2}\tau\left(1 - \frac{\tau}{t}Q_{1/2}\right)^{-3/2}\right)dyd\tau =$$

$$= \frac{t^{-1/2}}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N f(y,\tau)dyd\tau + \frac{t^{-3/2}}{4a\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N f(y,\tau)\tau\left(1 - \frac{\tau}{t}Q_{1/2}\right)^{-3/2}dyd\tau =$$

$$= I_{1,1}(t) + I_{1,2}(t), \quad (8)$$

где

$$I_{1,1}(t) = \tfrac{t^{-1/2}}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N f(y,\tau)dyd\tau, \; I_{1,2}(t) = \tfrac{t^{-3/2}}{4a\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N f(y,\tau)\tau\left(1 - \tfrac{\tau}{t}Q_{1/2}\right)^{-3/2}dyd\tau.$$

При достаточно больших t

$$\left|I_{1,2}(t)\right| \le \frac{t^{-3/2}}{4a\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N\left|f(y,\tau)\tau\left(1 - \frac{\tau}{t}Q_{1/2}\right)^{-3/2}\right|dyd\tau \le$$

$$\le C_1 t^{-3/2}\int_0^N\int_{-N}^N |f(y,\tau)|\tau dyd\tau \le Ct^{-3/2},$$

то есть

$$\left|I_{1,2}(t)\right| \le Ct^{-3/2}. \quad (9)$$

Применив (7), получаем, что при достаточно больших t

$$I_2(x,t) = -\frac{1}{8a^3\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N (x - y)^2 f(y,\tau)\left(t^{-3/2} + \frac{3}{2}t^{-5/2}\tau\left(1 - \frac{\tau}{t}Q_{3/2}\right)^{-5/2}\right)e^{-\frac{(x-y)^2Q_1}{4a^2(t-\tau)}}dyd\tau =$$

$$= -\tfrac{t^{-3/2}}{8a^3\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N (x-y)^2 f(y,\tau)e^{-\frac{(x-y)^2Q_1}{4a^2(t-\tau)}}dyd\tau - \quad (10)$$

$$-\tfrac{3t^{-5/2}}{16a^3\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N (x-y)^2 f(y,\tau)\tau\left(1 - \tfrac{\tau}{t}Q_{3/2}\right)^{-5/2}e^{-\frac{(x-y)^2Q_1}{4a^2(t-\tau)}}dyd\tau = I_{2,1}(x,t) + I_{2,2}(x,t),$$
(10)

где

$$I_{2,1}(x,t)=-\frac{t^{-3/2}}{8a^3\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N(x-y)^2f(y,\tau)e^{-\frac{(x-y)^2Q_1}{4a^2(t-\tau)}}dyd\tau,$$

$$I_{2,2}(x,t)=-\frac{3t^{-5/2}}{16a^3\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N(x-y)^2f(y,\tau)\tau\left(1-\frac{\tau}{t}Q_{3/2}\right)^{-5/2}e^{-\frac{(x-y)^2Q_1}{4a^2(t-\tau)}}dyd\tau.$$

При достаточно больших t

$$\left|I_{2,1}(x,t)\right|\leq\frac{t^{-3/2}}{8a^3\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N\left|(x-y)^2f(y,\tau)e^{-\frac{(x-y)^2Q_1}{4a^2(t-\tau)}}\right|dyd\tau\leq$$

$$\leq C_1t^{-3/2}\int_0^N\int_{-N}^N(x-y)^2|f(y,\tau)|dyd\tau\leq Ct^{-3/2},$$

то есть

$$\left|I_{2,1}(x,t)\right|\leq Ct^{-3/2}. \quad (11)$$

При достаточно больших t

$$\left|I_{2,2}(x,t)\right|\leq\frac{3t^{-5/2}}{16a^3\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N\left|(x-y)^2f(y,\tau)\tau\left(1-\frac{\tau}{t}Q_{3/2}\right)^{-5/2}e^{-\frac{(x-y)^2Q_1}{4a^2(t-\tau)}}\right|dyd\tau\leq \quad (12)$$

$$\leq C_1t^{-5/2}\int_0^N\int_{-N}^N(x-y)^2|f(y,\tau)|\tau dyd\tau\leq Ct^{-5/2}.$$

Учитывая финитность функции$f(x,t)$, из (6), (8)-(12) следует, что для любого фиксированного $x\in R$ при $t\to\infty$

$$v(x,t)=\frac{t^{-1/2}}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(y,\tau)\,dyd\tau+O(t^{-3/2}). \quad (13)$$

Из (4) находим, что при достаточно больших t равномерно по $x\in R$

$$|v(x,t)|\leq\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^N\int_{-N}^N\frac{|f(y,\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}dyd\tau. \quad (14)$$

Воспользовавшись (7), получаем, что при достаточно больших t

$$\int_0^N\int_{-N}^N\frac{|f(y,\tau)|}{\sqrt{t-\tau}}dyd\tau=\int_0^N\int_{-N}^N|f(y,\tau)|\left(t^{-1/2}+\frac{1}{2}t^{-3/2}\tau\left(1-\frac{\tau}{t}Q_{1/2}\right)^{-3/2}\right)dyd\tau=$$

$$=t^{-1/2}\int_0^N\int_{-N}^N|f(y,\tau)|\,dyd\tau+\frac{t^{-3/2}}{2}\int_0^N\int_{-N}^N|f(y,\tau)|\tau\left(1-\frac{\tau}{t}Q_{1/2}\right)^{-3/2}dyd\tau=$$
$$\tilde{I}_1(t)+\tilde{I}_2(t), \quad (15)$$

где

$$\tilde{I}_1(t)=t^{-1/2}\int_0^N\int_{-N}^N|f(y,\tau)|\,dyd\tau,\ \tilde{I}_2(t)=\frac{t^{-3/2}}{2}\int_0^N\int_{-N}^N|f(y,\tau)|\tau\left(1-\frac{\tau}{t}Q_{1/2}\right)^{-3/2}dyd\tau.$$

Легко видеть, что при достаточно больших t

$$\tilde{I}_1(t)\leq Ct^{-1/2},\ \tilde{I}_2(t)\leq Ct^{-3/2}. \quad (16)$$

Из (14-16) следует существование такой положительной константы C, что при достаточно больших t равномерно по $x\in R$ выполнена оценка

$$|v(x,t)|\leq Ct^{-1/2}. \quad (17)$$

Покажем, что (17) не улучшаемая равномерная по $x \in R$ оценка.

Предположим, что при достаточно больших t равномерно по $x \in R$ выполнена оценка

$$|v(x,t)| \leq Ch(t), \tag{18}$$

где $h(t) = o(t^{-1/2})$ при $t \to \infty$, а C – некоторая константа.

Из (18) следует, что при любом фиксированном $x \in R$ для достаточно больших t выполнена оценка

$$\left|t^{1/2} v(x,t)\right| \leq Ch(t)t^{1/2}. \tag{19}$$

Используя (13), находим, что для любого фиксированного $x \in R$

$$\lim_{t\to\infty} t^{1/2} v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(y,\tau)\, dy d\tau \neq 0,$$

а из условия на функцию $h(t)$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty} h(t)t^{1/2} = 0.$$

Следовательно, оценка (19) неверна, а значит, оценка (17) не улучшаемая равномерная по $x \in R$ оценка.

Теорема доказана.

Заключение

В работе рассматривалась одномерная задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием. Используя явное представление решения задачи Коши, была построена точная равномерная оценка и точная поточечная оценка скорости стабилизации решения задачи Коши к нулю при большом времени.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Зеленяк Т.И. Об асимптотики решений одной смешанной задачи. *Диф. уравнения.* 1966;2(1):47–64.
2. Глушко А.В. *Асимптотические методы в задачах гидродинамики*. Воронеж, Воронежский государственный университет; 2003. 300 с.
3. Глушко А.В., Рябенко А.С. О малых одномерных акустических колебаниях стратифицированной жидкости в полупространстве. *Вестник Воронежского государственного университет. Серия: Физика. Математика*. 2008;1:226–231.
4. Глушко А.В., Рябенко А.С. Принцип локализации и оценка скорости затухания колебаний вязкой сжимаемой стратифицированной жидкости. *Математические заметки.* 2009;85(4):585–592.
5. Денисов В.Н. О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени. *УМН*. 2005;60(4):145–212.
6. Рябенко А.С. Оценка при $t \to \infty$ решения задачи о распределении тепла в полупространстве с переменным коэффициентом теплопроводности. *Вестник Воронежского государственного университета*. *Серия: Физика. Математика*. 2007;1:95–99.
7. Рябенко А.С., Карпова Ю.Ю. Изучение второй начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом теплопроводности. *Вестник Воронежского государственного университета*. *Серия: Физика. Математика.* 2011;1:168–174.

8. Першин И.В. Асимптотика решения уравнения теплопроводности с особенностью на границе. *Тр. ИММ. Уро РАН*. 2012;18(1):268–272.
9. Горшков А.В. Стабилизация решения уравнения теплопроводности во внешней сфере с управлением на границе. *Вестник Московского университета*. *Сер 1. Математика. Механика.* 2016;5:3–14.
10. Тихонов А.Н. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных. *Бюлл. МГУ, мат. мех*. 1938;1(9):1–40.
11. Михайлов В.П. О стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности. *Докл. АН СССР*. 1970;90(1):38–41.
12. Эйдельман С.Д, Порпер Ф.О. О стабилизации параболических уравнений. *Изв. вузов. Матем.* 1960;4:210–217.
13. Денисов В.Н., Репников В.Д. О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений. *Дифференциальные уравнения*. 1984;20(1):20–41.
14. Денисов В.Н. О необходимых и достаточных условиях стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с младшими коэффициентами. *ДАН. РАН*. 2010;433(4):452–454.
15. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики*. Москва: ФИЗМАТЛИТ; 1976. 519 с.

REFERENCES

1. Zelenjak T.I. Ob asimptotiki reshenij odnoj smeshannoj zadachi. *Dif. uravnenija*. 1966;2(1):47–64. (In Russ.).
2. Glushko A.V. *Asimptoticheskie metody v zadachah gidrodinamiki*. Voronezh, Voronezhskij gosudarstvennyj universitet. 2003;300 p. (In Russ.).
3. Glushko A.V., Rjabenko A.S. O malyh odnomernyh akusticheskih kolebanijah stratificirovannoj zhidkosti v poluprostranstve. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universitet*. *Serija: Fizika. Matematika = Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2008;1:226–231. (In Russ.).
4. Glushko A.V., Rjabenko A.S. Princip lokalizacii i ocenka skorosti zatuhanija kolebanij vjazkoj szhimaemoj stratificirovannoj zhidkosti. *Matematicheskie zametki*. 2009;85(4):585–592. (In Russ.).
5. Denisov V.N. O povedenii reshenij parabolicheskih uravnenij pri bol'shih znachenijah vremeni. *UMN*. 2005;60(4):145–212. (In Russ.).
6. Rjabenko A.S. Ocenka pri reshenija zadachi o raspredelenii tepla v poluprostranstve s peremennym kojefficientom teploprovodnosti. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta*. *Serija: Fizika. Matematika = Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2007;1:95–99. (In Russ.).
7. Rjabenko A.S., Karpova Ju.Ju. Izuchenie vtoroj nachal'no-kraevoj zadachi dlja uravnenija teploprovodnosti s peremennym kojefficientom teploprovodnosti. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta*. *Serija: Fizika. Matematika = Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2011;1:168–174. (In Russ.).
8. Pershin I.V. Asimptotika reshenija uravnenija teploprovodnosti s osobennost'ju na granice. *Tr. IMM. Uro RAN*. 2012;18(1):268–272. (In Russ.).
9. Gorshkov A.V. Stabilizacija reshenija uravnenija teploprovodnosti vo vneshnej sfere s upravleniem na granice. *Vestnik Moskovskogo universiteta*. *Ser 1. Matematika. Mehanika.* 2016;5:3–14. (In Russ.).
10. Tihonov A.N. Ob uravnenii teploprovodnosti dlja neskol'kih peremennyh. *Bjull. MGU, mat. meh.* 1938;1(9):1–40. (In Russ.).

11. Mihajlov V.P. O stabilizacii reshenija zadachi Koshi dlja uravnenija teploprovodnosti. *Dokl. AN SSSR*. 1970;90(1):38–41. (In Russ.).
12. Jejdel'man S.D., Porper F.O. O stabilizacii parabolicheskih uravnenij. *Izv. vuzov. Matem*. 1960;4:210–217. (In Russ.).
13. Denisov V.N., Repnikov V.D. O stabilizacii reshenija zadachi Koshi dlja parabolicheskih uravnenij. *Differencial'nye uravnenija = Differential equations*. 1984;20(1):20–41. (In Russ.).
14. Denisov V.N. O neobhodimyh i dostatochnyh uslovijah stabilizacii reshenija zadachi Koshi dlja parabolicheskih uravnenij s mladshimi kojefficientami. *DAN. RAN*. 2010;433(4):452–454. (In Russ.).
15. Vladimirov V.S. *Uravnenija matematicheskoj fiziki*. Moskva: FIZMATLIT; 1976. 519 p. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Рябенко Александр Сергеевич кандидат физико-математических наук; доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: alexr-83@yandex.ru

Aleksandr Sergeevich Ryabenko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Partial Differential Equations and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.

Тран Зуй, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: tranduysp94@gmail.com

Tran Duy, Postgraduate Student, Department of Equations in Partial Derivatives and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 09.11.2022; одобрена после рецензирования 06.12.2022; принята к публикации 19.12.2022.

The article was submitted 09.11.2022; approved after reviewing 06.12.2022; accepted for publication 19.12.2022.