УДК 517.977.56
DOI: 10.26102/2310-6018/2023.41.2.006

Численный анализ математической модели динамики турбулентного течения многофазной среды в сетеподобных объектах

В.Н. Хоанг✉, А.А. Парт, И.В. Перова

Воронежский государственный университет,
Воронеж, Российская Федерация
fadded9x@gmail.com✉

Резюме. В работе представлены методы математического анализа в применении к прикладным задачам теории переноса сплошных сред – тепловых потоков и вязких жидкостей в сетеподобных объектах. Ставится и изучается начально-краевая задача для дифференциальной системы Навье-Стокса, которая лежит в основе математического описания (математической модели) так называемых турбулентных процессов транспортировки ньютоновых жидкостей с заданной вязкостью. При этом предполагается, что жидкость со сложной внутренней реологией и является многофазной сплошной средой. Отличительная особенность рассматриваемого процесса – это отсутствие классического дифференциального уравнения в узловых местах сетеподобной области (поверхностях попарного примыкания подобластей). Представлены достаточные условия однозначной слабой разрешимости начально-краевой задачи, которые получены классическим анализом приближений точного решения с помощью априорных оценок, вытекающих из энергетического неравенства для норм решений уравнения Навье-Стокса. Рассмотрена оптимизационная задача, естественная в анализе процессов переноса сплошных сред по сетеподобному носителю. Указаны пространства состояний системы Навье-Стокса, пространства управлений и наблюдений, для которых доказана единственность решения оптимизационной задачи. Представленный подход и ему соответствующие методы оснащены необходимым алгоритмом и иллюстрированы примерами численного анализа тестовых задач. В основе анализа лежит классический подход изучения математических моделей процессов переноса сплошных сред. Работа ориентирована на развитие качественных и приближенных методов исследования математических моделей переноса сплошных сред различного типа.

Ключевые слова: перенос гидропотоков, сетевой носитель, оптимизационная задача, алгоритмы, численный анализ.

Для цитирования: Хоанг В.Н., Парт А.А., Перова И.В. Численный анализ математической модели динамики турбулентного течения многофазной среды в сетеподобных объектах. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2023;11(2). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1326 DOI: 10.26102/2310-6018/2023.41.2.006

Numerical analysis of the mathematical model of the turbulent flow dynamics of a multiphase medium in network-like objects

V.N. Hoang✉, A.A. Part, I.V. Perova

Voronezh State University,
Voronezh, the Russian Federation
fadded9x@gmail.com✉

Abstract. This paper presents methods of mathematical analysis used to solve the applied problems of the theory of transport of solid media – thermal flows and viscous liquids in network-like objects. The initial-boundary problem for the Navier-Stokes system, which lies at the basis of the mathematical description of the so-called turbulent transport processes of Newtonian liquids with a given viscosity, is defined and studied. It is assumed that the liquid has a complex internal rheology and is a multi-phase continuous medium. The distinctive feature of the process under consideration is the absence of a classical differential equation at the node points of the network-like area (the surfaces of mutual adhesion of subdomains). Sufficient conditions for the unique weak solvability of the initial-boundary problem are presented, which are obtained by the classical analysis of approximations of the exact solution by means of a priori estimates derived from the energy inequality for norms of solutions of the Navier-Stokes equation. An optimization problem, which is natural in the analysis of transport processes of continuous media on a network-like carrier, is considered. The state spaces of the Navier-Stokes system, spaces of controls and observations, for which the uniqueness of the solution of the optimization problem is proved, are indicated. The suggested approach and corresponding methods are equipped with the necessary algorithm and illustrated by the examples of numerical analysis of test problems. The basis of the analysis lies in the classical approach to studying mathematical models of transport processes of continuous media. The paper is aimed at developing qualitative and approximate methods for investigating mathematical models of various types of continuous media transport.

Keywords: transfer of hydroflows, network carrier, optimization problem, algorithms, numerical analysis.

For citation: Hoang V.N., Part A.A., Perova I.V. Numerical analysis of the mathematical model of the turbulent flow dynamics of a multiphase medium in network-like objects. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2023;11(2). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1326 DOI: 10.26102/2310-6018/2023.41.2.006 (In Russ.).

Введение

Исследование посвящено развитию качественных и приближенных методов в направлении постановки оптимизационных задач процессов переноса сплошных сред и поиска достаточных условий существования этих решений. При этом особое внимание уделяется построению приближений решения поставленной задачи и формированию эффективных алгоритмов, дающих возможность численной реализации поставленной задачи. Исследование базируется на полученных ранее результатах одного из авторов данной статьи, а также на результатах отечественных и зарубежных авторов в области теории качественного анализа дифференциальных уравнений и систем уравнений на сетях [1-3].

Основные обозначения, понятия и утверждения

В качестве математического аналога носителя сплошной среды используется сетеподобная область $\Im$, принадлежащая n-мерному пространству R^n: $\Im = \bigcup\limits_k \Im_k \bigcup\limits_l S_l$, где $\Im_k$ – подобласти, примыкающие друг к другу по типу пространственного графа-дерево [4], здесь S_l – места примыкания подобластей, примыкание осуществляется частями границ $\partial\Im_l$ (через S_l^-, S_l^+ обозначаются односторонние поверхности для поверхности S_l, n_l^-, n_l^+ – внешние нормали S_l^-, S_l^+). В дальнейшем используется классическое пространство Лебега $L_2(\Im_T)$ суммируемых функций $u(x,t)$, $x,\, t \in \Im_T = \Im \times (0,T)$, $T < \infty$, а также пространство Соболева $W_2^1(\Im_T)$, элементы $u(x,t) \in L_2(\Im_T)$ которого таковы, что $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in L_2(\Im_T)$ (пространства $L_2(\Im)$ и $W_2^1(\Im)$ формируются по аналогии: $\Im_T$ заменяется на $\Im$), везде ниже $t \in (0,T) \subset R^1$. Введем совокупность функций $u(x,t) \in W_2^1(\Im_T)$, для которых имеют место следующие соотношения:

$$Y|_{S_l^-} = Y|_{S_l^+}, \quad \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^-}|_{S_l^-} + \sum_l \frac{\partial Y}{\partial n_l^+}|_{S_l^+} = 0$$

и обозначим эту совокупность символом $\Omega(\Im_T)$.

Определение 1. *Замыкание* $\Omega(\Im_T)$ *в* $W_2^1(\Im_T)$ *называется пространство* $W_2^1(S_l, \Im_T)$.

Обозначим через $\Omega'(\Im_T)$ совокупность функций $u(x,t) \in \Omega(\Im_T)$, которые непрерывны по переменной $t \in (0,T)$ относительно нормы пространства $L_2(\Im)$.

Определение 2. *Замыкание* $\Omega'(\Im_T)$ *в* $W_2^1(\Im_T)$ *называется пространство* $V_2^1(S_l, \Im_T)$.

Определение пространств $W_2^1(S_l, \Im)$ и $V_2^1(S_l, \Im)$ аналогично определениям для $W_2^1(S_l, \Im_T)$ и $V_2^1(S_l, \Im_T)$.

Описание свойств элементов введенных пространств $W_2^1(S_l, \Im_T)$ и $V_2^1(S_l, \Im_T)$ приведено в работе [4].

Турбулентное течение многофазной среды по сетеподобному носителю (разветвленной гидросистеме) можно описать формализмами начально-краевой системы

$$\frac{\partial Y}{\partial t} - \sigma \Delta Y + \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{\partial Y}{\partial x_i} = f, \tag{1}$$

$$div\ Y = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y}{\partial x_i} = 0 \right), \tag{2}$$

$$Y(x,0) = Y_0(x), x \in \Im, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial Y}{\partial x}\right|_{\partial \Im_T} = v(x,t), \tag{4}$$

в замкнутой области $\overline{\Im}_T$ ($\partial\Im_T$ – граница области $\Im_T$). Здесь $Y(x,t) \in V_2^1(S_l, \Im_T)$, $Y = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$, $f(x,t)$, $v(x,t) \in L_2(\Im_T)$, $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Уравнения (1) и (2) – система Навье-Стокса с коэффициентом вязкости σ, через Δ обозначен оператор Лапласа; $Y_0(x) \in L_2(\Im)$, $Y_0 = \{Y_{0,1}, Y_{0,2}, \ldots, Y_{0,n}\}$.

Для дальнейшего анализа потребуется введение дифференциальных форм следующего вида:

$$\rho(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Im} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} dx, \quad \tilde{\rho}(u,v,\omega) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Im} u_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \omega_i dx,$$

где функции u, v, ω выбираются таким образом, чтобы соответствующие интегралы были содящимися.

Определение 3. *Векторная функция* $Y(x,t) \in V_2^1(S_l, \Im_T)$ *является турбулентным решением дифференциальной системы* (1) – (4), *если она удовлетворяет соотношениям*

$$(Y(x,t),\eta(x,t))-\int_{\Im_t}Y(x,\tau)\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau}dxd\tau+\nu\int_0^t\rho(Y,\eta)d\tau+\int_0^t\rho(Y,Y,\eta)d\tau=$$

$$=(Y_0(x),\eta(x,0))+\int_{\partial\Im_t}v(x,\tau)\eta(x,\tau)dxd\tau+\int_{\Im_t}f(x,\tau)\eta(x,\tau)dxd\tau,\quad \forall\, t\in[0,T],$$

при произвольных $\eta(x,t)\in W_2^1(S_l,\Im_T)$, $\eta(x,t)_{\partial\Im_T}=0$.

Теорема 1. *Дифференциальная система* (1) – (4) *имеет единственное турбулентное решение* $Y(x,t)\in V_2^1(S_l,\Im_T)$, *причем* $Y(x,t)$ *непрерывно зависит от* $f(x,t),\ v(x,t)$ *и* $Y_0(x)$.

Доказательство. Для доказательства утверждений теоремы потребуются спектральные харакиеристики оператора Лапласа Δ, а именно, система собственных функций $\{U_i(x)\}_{i\geq1}$ спектральной задачи $\Delta U=\lambda U$, $U\in W_2^1(S_l,\Im)$ (λ – спектральный параметр) [5-6]. Представим приближение $Y_m(x,t)$ для решения $Y(x,t)$ в виде

$$Y_m(x,t)=\sum_{i=1}^m g_{im}(t)U_i(x)$$

(коэффициентами $g_{im}(t)$ являются функции, абсолютно непрерывные на отрезке $[0,T]$), и пусть $Y_m(x,t)$ удовлетворяют соотношениям

$$(\frac{\partial Y_m}{\partial t},U_i)+\nu\rho(Y_m,U_i)+\rho(Y_m,Y_m,U_i)=(f,U_i),\quad i=\overline{1,m}\quad \forall t\in[0,T],$$
$$Y_m(x,0)=Y_{0m}(x),$$

здесь $Y_{0m}(x)=\sum_{i=1}^m g_{im}^0U_i(x),\quad Y_{0m}(x)\to Y_0(x)$ в $W_2^1(\Im)$, через $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Im)$. Эта система дает возможность определить приближения $Y_m(x,t)$, так как она однозначно разрешима относительно $g_{im}(t)$. Рассуждения, аналогичные представленным в работе [5] (см. также [1-2]), приводят к заключению: слабый предел $Y(x,t)$ последовательность $\{Y_m\}_{m\geq1}$ слабо сходящаяся при $m\to\infty$, этот предел определяет турбулентное решение дифференциальной системы (1)-(4).

Оптимизационная задача

Для оптимизационной задачи пространство $L_2(\partial\Im_T)$ является пространством допустимых управляющих воздействий $v(x,t)$, осуществляемых на границе $\partial\Im_T$ области $\Im_T$; $Y(x,t):=Y(v)(x,t)$ – состояние дифференциальной системы (1)-(4). Наблюдение за состоянием системы $Y(v)(x,t)$ осуществляется посредством линейного непрерывного оператора граничного наблюдения $CY(v)(x,t)=Y(v)(x,t)|_{\partial\Im_T}$, определенного в пространстве наблюдения $L_2(\Im_T)$.

Введем минимизируемый функционал $J(v)$, определенный на замкнутой области $U_\partial\subset L_2(\partial\Im_T)$:

$$J(v)=\left\|CY(v)(x,t)-z_0(x,t)\right\|^2_{L_2(\partial\Gamma_T)}+(Nv,v)_{L_2(\partial\Gamma_T)}, \tag{5}$$

представление функцинала (5) включает в себя линейный оператор $N:L_2(\partial\Im_T)\to L_2(\partial\Im_T)$ со свойством коэрцитивности $(Nv,v)_{L_2(\partial\Im_T)}\geq\varsigma\|v\|_{L_2(\partial\Im_T)}$ ($\varsigma>0-$ const), заданное наблюдение $z_0(x,t)\in L_2(\Im_T)$ [2-3].

Оптимизационная задача для дифференциальной системы (1)-(4) *состоит в отыскании* $\inf\limits_{v\in U_\partial} J(v)$.

Определение 4. *Функция* $v^*(x,t)\in U_\partial$ *называется оптимумом для дифференциальной системы* (1)-(4), *если элемент* $v^*(x,t)$ *пространства* $L_2(\partial\Im_T)$ *определяет* $\inf\limits_{v\in U_\partial} J(v)$: $J(v^*)=\inf\limits_{v\in U_\partial} J(v)$.

Теорема 2. *Оптимизационная задача для дифференциальной системы* (1)-(4) *имеет единственное решение* (*оптимум*) $v^*\in U_\partial$.

Доказательство теоремы повторяет рассуждения, приведенные в работе [1].

Алгоритм построения решения оптимизационной задачи

Алгоритм нахождения оптимума содержит следующие части:

1 часть. Алгоритм построения турбулентного решения дифференциальной системы (1)-(4).

2 часть. Алгоритм нахождения оптимума оптимизационной задачи.

В приложениях отдают предпочтение алгоритмам конечномерной оптимизации. Остановимся на случае, когда область допустимых управлений ∂U аппроксимируется конечномерной областью.

Алгоритм построения оптимума функционала $J(v)$.

1) Задание граничных управляющих воздействий $v(x,t)$ в виде кусочно-постоянных интерполяций вида

$$v_k(x,t)=v_k,\quad x\in\Omega_k,$$

индексом k нумеруются подобласти $\Omega_k\subset\Im$ и вводится $v_k=const$, своя на каждой подобласти Ω_k.

2) Формирование приближений $Y_m(x,t)$ слабого решения $Y(v)(x,t)$ дифференциальной системы (1)-(4) как решение конечномерной системы интегральных тождеств

$$(\frac{\partial Y_m}{\partial t},U_i)+\nu\rho(Y_m,U_i)+\rho(Y_m,Y_m,U_i)=(f,U_i),\quad Y_m(x,0)=Y_{0m}(x),\quad i=\overline{1,m},\quad \forall t\in[0,T].$$

3) Определение минимизируемого функционала (5) на приближениях $Y_m(v)(x,t)$ в виде

$$J(v_1,v_2,...,v_{k_0})=\int\limits_{\partial\Im_T}\left(Y_m(v)(x,t)-z_0(x,t)\right)^2dxdt+\sum_{k=1}^{k_0}\int\limits_{[0,T]}Nv_k(x,t)v_k(x,t)dt,$$

которое определяет функцию $J(v_1,v_2,...,v_{k_0})$ конечного числа аргументов $v_1,v_2,...,v_{k_0}$.

4) Определения минимума функции $J(v_1, v_2, ..., v_{k_0})$ с изменяющимися переменными $v_1, v_2, ..., v_{k_0}$ на конечномерном множестве – классическая задача конечномерной оптимизации (см., например, [1]).

Примеры

Приведем примеры построения приближений точного решения начально-краевой задачи переноса теплового потока по сетеподобным носителям, представленные выше областью $\Im$.

1. Задача переноса на сетеподобной области с двумя областями. Пусть задана сетеподобная область $\Im \subset \mathrm{R}^2$, состоящая из двух областей $\Im_1, \Im_2$ и поверхности примыкания S:

$$\Im_1 = \left\{(x_1, x_2): 0 \le x_1 \le \frac{1}{2},\ 0 \le x_2 \le 1\right\},\ \ \Im_2 = \left\{(x_1, x_2): \frac{1}{2} \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1\right\},$$

функция $u(x_1, x_2, t)$, определяющая процесс переноса теплового потока, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} - \sum_{\kappa,\ \iota=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x_1, x_2)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\right) + b(x_1, x_2)u = f(x_1, x_2, t), \quad x_1, x_2 \in \Im,\ \ t \in (0, T], \tag{6}$$

условиям в поверхности примыкания S

$$\begin{gathered} u\big|_{x_1=\frac{1}{2}\in\Im_1} = u\big|_{x_1=\frac{1}{2}\in\Im_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\frac{1}{2}\in\Im_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\frac{1}{2}\in\Im_2}, \end{gathered} \tag{7}$$

начальным

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2), \tag{8}$$

и граничным условиям

$$\begin{gathered} u\big|_{x_1=0} = u\big|_{x_1=1} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\bigg|_{x_2=0} = 0, \quad u\big|_{x_2=1} = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Начально-краевую задачу (6)-(9) аппроксимирует дифференциально-разностная система вида

$$\frac{1}{\tau}\big(u(k) - u(k-1)\big) - \sum_{\kappa,\ \iota=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x_1, x_2)\frac{\partial u(k)}{\partial x_\iota}\right) + b(x_1, x_2)u(k) = f(k), \tag{10}$$

$$u(k) = u(x_1, x_2; k), \quad f(k) := f(x_1, x_2; k) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, t)dt, \quad \tau = T / K, \quad k = 1, 2, \ldots, K,$$

$$u(k)\Big|_{x_1=\frac{1}{2}\in\Im_1}=u(k)\Big|_{x_1=\frac{1}{2}\in\Im_2},\quad \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{2}\in\Im_1}=\left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{2}\in\Im_2}, \tag{11}$$

$$u(0)=\varphi(x_1,x_2), \tag{12}$$

$$u(k)\,|_{x_1=0}=u(k)\,|_{x_1=1}=0,$$
$$\left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0}=0,\quad u(k)\,|_{x_2=1}=0. \tag{13}$$

Проведены численные расчеты для случая, когда коэффициенты в соотношениях (10)-(13) фиксированы:

$$a_{12}(x_1,x_2)=a_{21}(x_1,x_2)=0,\quad a_{11}(x_1,x_2)=a_{22}(x_1,x_2)=1,$$

$$b(x_1,x_2)=0,\ f(x_1,x_2,t)=0,$$

начальная функция имеет вид

$$\varphi(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1\cos\dfrac{\pi x_2}{2}, & x_1,x_2\in\Im_1,\\[2mm] (-4x_1^2+5x_1-1)\cos\dfrac{\pi x_2}{2}, & x_1,x_2\in\Im_2.\end{cases}$$

2. Задача переноса на сетеподобной области с тремя областями. Пусть сетеподобная область $\Im\subset\mathrm{R}^2$, состоящая из трех областей $\Im_1$, $\Im_2$, $\Im_3$ и поверхности примыкания S_1, S_2: $\Im_1=\left\{(x_1,x_2):0\leq x_1\leq\dfrac{1}{3},\ 0\leq x_2\leq 1\right\}$,

$$\Im_2=\left\{(x_1,x_2):\frac{1}{3}\leq x_1\leq\frac{2}{3},\ 0\leq x_2\leq 1\right\},\ \Im_3=\left\{(x_1,x_2):\frac{2}{3}\leq x_1\leq 1,\ 0\leq x_2\leq 1\right\},$$

функция $u(x_1,x_2,t)$, определяющая процесс переноса теплового потока, удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t}-\sum_{\kappa,\,\iota=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\right)+b(x_1,x_2)u=f(x_1,x_2,t),\quad x_1,x_2\in\Im,\ \ t\in(0,T], \tag{14}$$

условиям в поверхности примыкания S_1

$$u\Big|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_1}=u\Big|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_2},$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_1}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_2}, \tag{15}$$

условиям в поверхности примыкания S_2

$$u\big|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_3} = u\big|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_3},$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_2} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_3}, \tag{16}$$

начальным

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2), \tag{17}$$

и граничным условиям

$$u\big|_{x_1=0} = u\big|_{x_1=1} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0,\ u\big|_{x_2=1} = 0. \tag{18}$$

Начально-краевую задачу (14)-(18) аппроксимирует дифференциально-разностная система следующего вида:

$$\frac{1}{\tau}\big(u(k)-u(k-1)\big) - \sum_{\kappa,\ \iota=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x_1,x_2)\frac{\partial u(k)}{\partial x_\iota}\right) + b(x_1,x_2)u(k) = f(k), \tag{19}$$

$$u(k) = u(x_1,x_2;k),\quad f(k) := f(x_1,x_2;k) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1,x_2,t)dt,\quad \tau = T/K,\quad k = 1,2,\ldots,K,$$

$$u(k)\big|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_1} = u(k)\big|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_2},\quad \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_2} = \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{1}{3}\in\Im_2}, \tag{20}$$

$$u(k)\big|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_2} = u(k)\big|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_3},\quad \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_2} = \left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_1}\right|_{x_1=\frac{2}{3}\in\Im_3}, \tag{21}$$

$$u(0) = \varphi(x_1, x_2), \tag{22}$$

$$u(k)\big|_{x_1=0} = u(k)\big|_{x_1=1} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial u(k)}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0,\ u(k)\big|_{x_2=1} = 0. \tag{23}$$

Проведены численные расчеты для случая, когда коэффициенты в соотношениях (19)-(23) фиксированы:

$$a_{12}(x_1,x_2) = a_{21}(x_1,x_2) = 0,\quad a_{11}(x_1,x_2) = a_{22}(x_1,x_2) = 1,$$
$$b(x_1,x_2) = 0,\ f(x_1,x_2,t) = 0,$$

начальная функция имеет вид

$$\varphi(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1\cos\dfrac{\pi x_2}{2},\quad x_1,x_2\in\Im_1, \\ x_1\cos\dfrac{\pi x_2}{2},\ x_1,x_2\in\Im_2, \\ (-9x_1^2+13x_1-4)\cos\dfrac{\pi x_2}{2},\quad x_1,x_2\in\Im_3. \end{cases}$$

Заключение

Работа посвящена развитию качественных и приближенных методов исследования математических моделей сетеподобных процессов переноса сплошных сред на примере процесса переноса тепловых потоков. Представленные методы математического анализа могут быть осуществлены для применения их к анализу прикладных задач гидродинамики в сетеподобных объектах (такой анализ необходим при изучении свойств динамики многофазных сред в различного типа гидросетях. Представленный метод оснащен соответствующим алгоритмом построения решения оптимизационной задачи, естественной в анализе процессов переноса сплошных сред. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании других типов задач [7-10].

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Lubary J.A. On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. 2001;219:135–146.
2. Nicaise S., Penkin O. Relationship between the lower frequense spectrum of plates and networks of beams. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2000;23(16):1389–1399. DOI: 10.1002/1099-1476(20001110)23:16<1389::aid-mma171>3.0.co;2-k.
3. Von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1988;10(4):383–395. DOI: 10.1002/mma.1670100404.
4. Dekoninck B., Nicaise S. The eigenvalue problem for networks of beams. Linear Algebra and its Applications. 2000;314(1–3):165–189. Доступно по: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002437950000118X?via%3Dihub (дата обращения: 27.02.2023).
5. Sergeev S.M., Raijhelgauz L.B., Hoang V.N., Panteleev I.N. Modeling unbalanced systems in network-like oil and gas processes. *Journal of Physics*: *Conference Series.* 2020;1679(2):022015. Доступно по: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1679/2/022015 (дата обращения: 27.02.2023).
6. Провоторов В.В. *Собственные функции краевых задач на графах и приложения*. Воронеж. Научная книга; 2008. 247 с.
7. Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation. *Vestnik of Saint Petersburg University*. *Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2019;15(3):323–336. Доступно по: https://dspace.spbu.ru/handle/11701/16384 (дата обращения: 27.02.2023).
8. Baranovskii E.S. Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2019;18(2):735–750. DOI: 10.3934/cpaa.2019036.
9. Baranovskii E.S. Existence results for regularized equations of second-grade fluids with wall slip. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2015;(91):1–12. Доступно по: http://real.mtak.hu/32263/ (дата обращения: 27.02.2023).
10. Artemov M.A., Baranovskii E.S. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions. *Mathematics.* 2019;7(7). Article ID 611. Доступно по: https://www.mdpi.com/2227-7390/7/7/611 (дата обращения: 27.02.2023).

REFERENCES

1. Lubary J.A. On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. 2001;219:135–146.

2. Nicaise S., Penkin O. Relationship between the lower frequense spectrum of plates and networks of beams. *Mathematical Methods in the Applied Sciences.* 2000;23(16):1389–1399. DOI: 10.1002/1099-1476(20001110)23:16<1389::aid-mma171>3.0.co;2-k.
3. Von Below J. Sturm-Liouville eigenvalue problems on networks. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1988;10(4):383–395. DOI: 10.1002/mma.1670100404.
4. Dekoninck B., Nicaise S. The eigenvalue problem for networks of beams. Linear Algebra and its Applications. 2000;314(1–3):165–189. Available from: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002437950000118X?via%3Dihub (accessed on 27.02.2023).
5. Sergeev S.M., Raijhelgauz L.B., Hoang V.N., Panteleev I.N. Modeling unbalanced systems in network-like oil and gas processes. *Journal of Physics*: *Conference Series.* 2020;1679(2):022015. Available from: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1679/2/022015 (accessed on 27.02.2023).
6. Provotorov V.V. *Sobstvennyye funktsii krayevykh zadach na grafakh i prilozheniya*. Voronezh. Nauchnaya kniga; 2008. 247 p. (In Russ.).
7. Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation. *Vestnik of Saint Petersburg University*. *Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2019;15(3):323–336. Available from: https://dspace.spbu.ru/handle/11701/16384 (accessed on 27.02.2023).
8. Baranovskii E.S. Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2019;18(2):735–750. DOI: 10.3934/cpaa.2019036.
9. Baranovskii E.S. Existence results for regularized equations of second-grade fluids with wall slip. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2015;(91):1–12. Available from: http://real.mtak.hu/32263/ (accessed on 27.02.2023).
10. Artemov M.A., Baranovskii E.S. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions. *Mathematics.* 2019;7(7). Article ID 611. Available from: https://www.mdpi.com/2227-7390/7/7/611 (accessed on 27.02.2023).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Хоанг Ван Нгуен, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: fadded9x@gmail.com
ORCID: 0000-0001-6970-2770

Hoang Van Nguyen, Postgraduate Student, Department of Equations in Partial Derivatives and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Парт Анна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры природопользования факультета географии, геоэкологии и туризма Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
e-mail: anna_razinkova@mail.ru

Anna Aleksandrovna Part, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Environmental Management, Faculty of Geography, Geoecology and Tourism, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Перова Ирина Васильевна, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: wwprov@mail.ru

Irina Vasilievna Perova, Postgraduate Student, Department Of Equations In Partial Derivatives and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 08.03.2023; одобрена после рецензирования 21.03.2023; принята к публикации 14.04.2023.

The article was submitted 08.03.2023; approved after reviewing 21.03.2023; accepted for publication 14.04.2023.