

УДК 519.65

DOI: [10.26102/2310-6018/2023.41.2.030](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2023.41.2.030)

## Конечномерные аналоги дифференциальных операторов переноса с носителями на пространственных сетях

В.Н. Хоанг<sup>1</sup>, О.А. Махинова<sup>2</sup>, В.В. Тимошенко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация

<sup>2</sup>Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина,  
Воронеж, Российская Федерация  
[faded9x@gmail.com](mailto:faded9x@gmail.com)

**Резюме.** Представленные в исследовании результаты являются обоснованием применимости численных методов анализа начально-краевых задач для эволюционных дифференциальных уравнений с пространственной переменной, изменяющейся на сети (графе), т. е. на многообразии одномерных континуумов со скалярной переменной. Аналогичные результаты для  $n$ -мерной пространственной переменной ( $n = 2, 3$ ), изменяющейся на сетеподобной  $n$ -мерной области еще в стадии формирования из-за несравненно высокого уровня технических сложностей, естественным образом возникающих при увеличении размерности пространственной переменной. Подтверждением возможности обоснования численных методов анализа начально-краевых задач для случаев  $n = 2, 3$  являются приведенные в работе результаты применения вычислительных методов к решению тестовой задачи с пространственной переменной, изменяющейся на двухмерном сетеподобном носителе – двухмерной сложноструктурированной области. Представленный пример численного анализа открывает пути распространения полученных результатов и на дифференциальных операторах, определенных на функциях с  $n$ -мерным носителем. При этом для упрощения представлений разностных схем используется метод полудискретизации по временной переменной (в некотором смысле нивелируются многочисленные рутинные издержки, необходимо возникающие как прямое следствие многомерности пространственной переменной). Полученные результаты применяются в построении и численном анализе математических моделей ламинарных и турбулентных сетеподобных процессов прикладной гидродинамики.

**Ключевые слова:** дифференциальные операторы на сетеподобных областях, конечномерные аналоги, спектральные свойства конечномерных аналогов, разностные схемы, численный анализ.

**Для цитирования:** Хоанг В.Н., Махинова О.А., Тимошенко В.В. Конечномерные аналоги дифференциальных операторов переноса с носителями на пространственных сетях. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2023;11(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1363> DOI: 10.26102/2310-6018/2023.41.2.030

## Finite-dimensional analogues of transfer differential operators with carriers on spatial networks

V.N. Hoang<sup>1</sup>, O.A. Makhinova<sup>2</sup>, V.V. Timoshenko<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation

<sup>2</sup>The Air Force Academy named after N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin,  
Voronezh, the Russian Federation  
[faded9x@gmail.com](mailto:faded9x@gmail.com)

**Abstract.** The presented results provide justification for the applicability of numerical methods for analyzing initial-boundary value problems for evolutionary differential equations with a spatial variable

changing on a network (graph), i. e., on a manifold of one-dimensional continua with a scalar variable. Similar results for  $n$ -dimensional spatial variables ( $n = 2, 3$ ) changing on a network-like  $n$ -dimensional domain are still in the stage of formation due to the incomparably high level of technical complexity that naturally arises when increasing the dimensionality of the spatial variable. Confirmation of the possibility of justifying numerical methods for analyzing initial-boundary value problems for  $n = 2, 3$  cases is provided using the results of applying computational methods to solving a test problem with a spatial variable changing on a two-dimensional network-like carrier – a two-dimensional complex-structured domain. The presented example of numerical analysis opens prospects for extending the obtained results to differential operators defined on functions with an  $m$ -dimensional carrier. To simplify the representations of difference schemes, a method of semi-discretization with respect to the time variable is used (in a sense, numerous routine costs that arise as a direct consequence of the multidimensionality of the spatial variable are leveled). The obtained results are applied in constructing and numerically analyzing mathematical models of laminar and turbulent network-like processes in applied hydrodynamics.

**Keywords:** differential operators on network-like domains, finite-dimensional analogues, spectral properties of finite-dimensional analogues, difference schemes, numerical analysis.

**For citation:** Hoang V.N., Makhinova O.A., Timoshenko V.V. Finite-dimensional analogues of transfer differential operators with carriers on spatial networks. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2023;11(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1363> DOI: 10.26102/2310-6018/2023.41.2.030 (In Russ.).

## Введение

Настоящая работа является логическим продолжением исследований, представленных в работе [1]. Рассматриваются различного типа эллиптические дифференциальные операторы, присутствующие в математических моделях процессов переноса сплошных сред, а также при математическом описании волновых процессов в пространственных сетях [2, 3]. Основная цель исследования – получить конечномерные аналоги таких операторов и сформировать условия, гарантирующие сохранения свойств исходного дифференциального оператора. Редукция дифференциального оператора к конечномерному означает замену бесконечномерного пространства, в котором определяется дифференциальный оператор, конечномерным пространством сеточных функций. По сути, указанная редукция есть обоснование использования разностных схем (двух или трехслойных разностных схем) для отыскания приближений решений начально-краевых задач с данным эллиптическим дифференциальным оператором [4]. В работе приведены примеры численных расчетов при использовании различного типа эллиптических операторов, определенных на функциях с различной топологией носителей.

## Дифференциальные операторы, определенные на сетях

Рассматривается несколько типов пространственных сетей моделируемых формализмами геометрических графов, используются достаточно часто употребляемые в моделях граф-звезда, составленный из конечного числа таких звезд граф-цепочка и для общего случая – граф-дерево [3].

Используются следующие обозначения:

$\mathfrak{Z}$  – произвольный граф-дерево

$\mathfrak{Z}^\circ$  – граф  $\mathfrak{Z}$ , не содержащий всех своих узлов,

$J(\mathfrak{Z})$  – множество внутренних узлов  $\xi$  графа,

$\partial\mathfrak{Z}$  – множество граничных узлов  $\zeta$  графа,

$\mathfrak{Z}_z$  – граф-звезда (везде далее *звезда*),

$\mathfrak{Z}_{z,L}$  – граф-цепочка из  $L$  последовательно примыкающих звезд (далее *цепочка звезд*),

$\mathfrak{Z}_0$  – частный случай звезды, имеющей только два ребра (далее *простейшая звезда*),

$\mathfrak{Z}_{0,L}$  – граф-цепочка из  $L$  последовательно примыкающих простейших звезд (далее *простейшая цепочка*).

Графы всех поименованных типов содержат определенное число ребер, обозначаемые (придерживаясь используемые в работах [3, 4] обозначений) символом  $\gamma$ , и определенное число внутренних узлов  $\xi$ , граничные узлы обозначаются символом  $\zeta$ .

Введем следующие совокупности функций (подробные описания совокупностей содержатся в монографии [4]):

$\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}_0}$  – совокупность  $y(x) \in C(\mathfrak{Z}_0) \cap C^2[\mathfrak{Z}_0]$ , для которых имеют место условия следующего вида:

$$y'(\frac{i\pi}{M})_{\gamma_i} - y'(\frac{i\pi}{M})_{\gamma_{i+1}} = \alpha_i y(\frac{i\pi}{M})_{\gamma_{i+1}}, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (1)$$

где  $\xi = \{\xi_i (i = \overline{1, M-1})\}$  – совокупность всех узлов,  $C(\mathfrak{Z}^\circ)$ ,  $C^2[\mathfrak{Z}^\circ]$  – множества непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых функций на  $\mathfrak{Z}^\circ = \mathfrak{Z} \setminus \xi$ , соответственно,

$\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}_L}$  – совокупность  $y(x) \in C(\mathfrak{Z}_L) \cap C^2[\mathfrak{Z}_L]$ , для которых имеют место условия следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{m_j-1} y'(\frac{\pi}{2})_{\gamma_i^j} = y'(\frac{\pi}{2})_{\gamma_i^j}, \quad (2)$$

$$y'(j\pi/2)_{\gamma_{m_{j-1}^{j-1}}} + \sum_{i=1}^{m_j-1} y'(j\frac{\pi}{2})_{\gamma_i^j} = y'(j\frac{\pi}{2})_{\gamma_{m_j^j}} \quad (j = \overline{1, L}). \quad (3)$$

$\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$  – совокупность  $y(x) \in C(\mathfrak{Z}) \cap C^2[\mathfrak{Z}]$ , для которых в произвольном узле имеют место условия следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{m_\xi-1} y'(a_\xi)_{\gamma_i^\xi} = y'(a_\xi)_{\gamma_{m_\xi}^\xi}, \quad (4)$$

$m_\xi$  – количество  $\gamma_i^\xi$ , примыкающих к  $\xi$ , числом  $a_\xi$  параметризован узел  $\xi$ . Соотношения (1)-(4) достаточно часто встречаются в приложениях [3].

Дифференциальное выражение  $-\frac{d^2}{dx^2}y + q(x)y$  на функциях  $y(x)$  из совокупностей  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}_0}$ ,  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}_L}$  и  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}$ , определяют операторы  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_0}$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}$ :

$$\Lambda_\Gamma y = -\frac{d^2}{dx^2}y + q(x)y, \quad y \in \mathfrak{R}_\Gamma, \quad (5)$$

где  $\Gamma$  – один из  $\mathfrak{Z}_z$ ,  $\mathfrak{Z}_L$ ,  $\mathfrak{Z}$ , пространства, соответствующие  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}$  являются

$L^2(\mathfrak{T}_z)$ ,  $L^2(\mathfrak{T}_L)$ ,  $L^2(\mathfrak{T})$ , а области определения –  $\Phi_{\mathfrak{T}_0}$ ,  $\Phi_{\mathfrak{T}_L}$ ,  $\Phi_{\mathfrak{T}}$ , соответственно ( $\Phi_{\mathfrak{T}_0} \subset L^2(\mathfrak{T}_0)$ ,  $\Phi_{\mathfrak{T}_L} \subset L^2(\mathfrak{T}_L)$ ,  $\Phi_{\mathfrak{T}} \subset L^2(\mathfrak{T})$ ), при этом для элементов  $y(x)$ , принадлежащих  $\Phi_{\mathfrak{T}_0}$ ,  $\Phi_{\mathfrak{T}_L}$  и  $\Phi_{\mathfrak{T}}$  справедливо соотношение

$$y'(b) - h_\zeta y(b) = 0, \quad \zeta \in \partial\Gamma, \quad (6)$$

где  $h_\zeta = const$  – фиксированное число, параметр  $b$  соответствует узлу  $\zeta$ , граф  $\Gamma$  – это  $\mathfrak{T}_0$ ,  $\mathfrak{T}_L$  или  $\mathfrak{T}$ , причем

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \quad (7)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.  $\Lambda_{\mathfrak{T}_z}$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{T}_L}$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{T}}$  симметричны в  $L^2(\mathfrak{T}_0)$ ,  $L^2(\mathfrak{T}_L)$ ,  $L^2(\mathfrak{T})$ .

Доказательство. 1. Оператор  $\Lambda_{\mathfrak{T}_0}$ . Симметричность  $\Lambda_{\mathfrak{T}_0}$  доказана в работе [5] (см. также [6]).

2. Оператор  $\Lambda_{\mathfrak{T}}$  (симметричность  $\Lambda_{\mathfrak{T}_L}$  показывается аналогичными рассуждениями). Для узла  $\xi \in J(\mathfrak{T})$  введем функционал

$$(\Lambda_{\mathfrak{T}}\varphi, \psi) = \int_{\mathfrak{T}} (\Lambda_{\mathfrak{T}}\varphi)(x) \psi(x) dx = \sum_{\xi \in J(\mathfrak{T})} \sum_{i=1}^{m_\xi} \int_{\gamma_i^\xi} (\Lambda_{\mathfrak{T}}\varphi)(x) \psi(x) \gamma_i^\xi dx,$$

здесь  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x) \in \Phi_{\mathfrak{T}}$ . Осуществим следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{m_\xi} \int_{\gamma_i^\xi} (\Lambda_{\mathfrak{T}}\varphi)(x) \psi(x) \gamma_i^\xi dx = \sum_{i=1}^{m_\xi} \int_{\gamma_i^\xi} [-\varphi''(x) + q(x)\varphi(x)] \gamma_i^\xi \psi(x) \gamma_i^\xi dx = \\ & = \sum_{i=1}^{m_\xi-1} \int_{a_\zeta}^{a_\xi} [-\varphi''(x) + q(x)\varphi(x)] \gamma_i^\xi \psi(x) \gamma_i^\xi dx + \int_{a_\xi}^{a_\zeta} [-\varphi''(x) + q(x)\varphi(x)] \gamma_{m_\xi}^\xi \psi(x) \gamma_{m_\xi}^\xi dx = \\ & = \sum_{i=1}^{m_\xi-1} (-\varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)) \gamma_i^\xi \Big|_{a_\zeta}^{a_\xi} + (-\varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)) \gamma_{m_\xi}^\xi \Big|_{a_\xi}^{a_\zeta} + \\ & + \sum_{i=1}^{m_\xi} \varphi(x) \gamma_i^\xi [-\psi''(x) + q(x)\psi(x)] \gamma_i^\xi = (-\varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)) \Big|_{x=a_\zeta \in \gamma_{m_\xi}^\xi} - \\ & - \sum_{i=1}^{m_\xi-1} (-\varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x)) \Big|_{x=a_\zeta \in \gamma_i^\xi} + \sum_{i=1}^{m_\xi} \int_{\gamma_i^\xi} \varphi(x) \gamma_i^\xi (\Lambda_{\mathfrak{T}}\psi)(x) \gamma_i^\xi dx, \end{aligned}$$

числа  $a_\zeta$ ,  $a_\xi$ ,  $a_\zeta$  соответствуют узлам  $\zeta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  ( $\zeta$ ,  $\zeta$  соседние с  $\xi$ ). Если  $\zeta, \zeta \in \partial\mathfrak{T}$ , тогда  $J(\mathfrak{T}) = \xi$  и, исходя из соотношений (4) и (6), (7), в последнем компоненте полученного равенства остаются интегральные выражения, а значит,  $(\Lambda_{\mathfrak{T}}\varphi, \psi) = (\varphi, \Lambda_{\mathfrak{T}}\psi)$ .

Если же  $\zeta, \zeta \notin \partial\mathfrak{T}$ , тогда выражение  $\sum_{i=1}^{m_\xi} \int_{\gamma_i^\xi} (\Lambda_{\mathfrak{T}}\varphi)(x) \psi(x) \gamma_i^\xi dx$  имеет место и для других

узлов. Исходя из соотношения (4) и условий (6), (7), приходим к соотношению, что приводит к завершению доказательства теоремы.

Отметим, что доказанные утверждения остаются справедливыми и для других

условий на границе, например, следующего вида (условия Дирихле):

$$y(b) = 0, \quad \zeta \in \partial\mathfrak{Z}, \quad (8)$$

которые характерны для многих прикладных задач механики. Операторы и им соответствующие области определения, для которых имеет место (8), обозначим  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^0$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0$  и  $\Phi_{\mathfrak{Z}_z}^0$ ,  $\Phi_{\mathfrak{Z}_L}^0$ ,  $\Phi_{\mathfrak{Z}}^0$  соответственно.

*Теорема 2. Пусть  $q(x) > 0$ , тогда  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^0$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0$  положительно определенные.*

*Доказательство.* Прежде всего отметим, что для спектральных задач

$$\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0 u = \lambda u, \quad u \in \Phi_{\mathfrak{Z}_z}^0,$$

$$\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^0 u = \lambda u, \quad u \in \Phi_{\mathfrak{Z}_L}^0,$$

$$\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0 u = \lambda u, \quad u \in \Phi_{\mathfrak{Z}}^0,$$

спектры дискретны и состоят только из множества положительных чисел (собственных значений), системы собственных функций образуют базисы в  $L^2(\mathfrak{Z}_0)$ ,  $L^2(\mathfrak{Z}_L)$ ,  $L^2(\mathfrak{Z})$ , соответственно [7]. Отсюда следуют соотношения

$$(\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0 \varphi, \varphi) \geq \alpha(\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0)(\varphi, \varphi), \quad \varphi \in \Phi_{\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0},$$

$$(\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^0 \varphi, \varphi) \geq \alpha(\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^0)(\varphi, \varphi), \quad \varphi \in \Phi_{\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^0},$$

$$(\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0 \varphi, \varphi) \geq \alpha(\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0)(\varphi, \varphi), \quad \varphi \in \Phi_{\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0},$$

здесь везде через  $\alpha(\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0)$ ,  $\alpha(\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^0)$ ,  $\alpha(\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0)$  обозначены минимальные собственные значения для соответствующих  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^0$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0$ . Полученные неравенства доказывают утверждения теоремы.

### Конечномерные аналоги дифференциальных операторов на пространственных сетях

Обратимся к анализу на  $\mathfrak{Z}$ . Зафиксируем ребро  $\gamma$  графа и обозначим узлы  $\zeta$  и  $\xi$ , которые соединяет  $\gamma$  (« $\zeta \rightarrow \xi$ » – ориентация на  $\gamma$ , соответствующая отрезку  $[(\nu-1)\frac{\ell}{M}, \nu\frac{\ell}{M}]$ , причем  $(\nu-1)\frac{\ell}{M}$  отвечает  $\zeta$ ,  $\nu\frac{\ell}{M}$  отвечает  $\xi$ ); числа  $\ell$ ,  $M$  заданы. Таким образом при  $1 \leq \nu \leq M+1$  сформирован максимальная простейшая цепочка  $\mathfrak{Z}_{0,M} \subset \mathfrak{Z}$ , аналогично тому, как это сделано в [7].

Далее, пусть  $\{x_k^i (k = \overline{0,n})\}$  совокупность  $x_k^i$  таких, что  $x_k^i \in \gamma^i \subset \mathfrak{Z}$  и при этом  $x_k^i$  отвечает число  $k\frac{\ell}{nM}$  ( $k = \overline{0,n}$ ); началу  $\gamma^i$  ставится в соответствие  $x_0^i$  (т. е. число 0),

концу  $\gamma^i$  ставится в соответствие  $x_n^i$  (т. е. число  $\frac{\ell}{nM}$ ). Зафиксируем число  $h = \frac{\ell}{nM}$ , тогда совокупность  $\{x_k^i (k = \overline{0,n})\}$ , где индекс  $i$ , изменяясь, не выходит за рамки множества индексов ребер  $\gamma^i \subset \mathfrak{Z}$ , является сеткой  $\mathfrak{Z}^h$ , порожденной графом  $\mathfrak{Z}$ , а число  $h$  естественно трактовать как шаг  $\mathfrak{Z}^h$ . Ясно, что совокупность  $\mathfrak{Z}^h \setminus \partial\mathfrak{Z}^h \subset \mathfrak{Z}^h$  не совпадает с  $\partial\mathfrak{Z}$ , ясно также, что  $\partial\mathfrak{Z}^h = \partial\mathfrak{Z}$ . Введем понятие сеточной функции, определенной на

сетке  $\mathfrak{Z}^h$  как функция  $y^h$  с областью определения  $\Phi^h \subset \mathfrak{Z}^h$ . Таким образом, если задана некоторая функция  $y(x)$ ,  $x \in \Phi$  ( $\Phi$  – область определения  $f$ ), то тем самым ей ставится в соответствие сеточная функция  $(y)^h$  по следующему правилу: значение  $(y)^h_k$  для фиксированной точки  $x_k^i \in \mathfrak{Z}^h$  считается равным  $y(x_k^i)$ ,  $x_k^i \in \gamma^i \subset \mathfrak{Z}$ ,  $k = \overline{0, n}$ ,  $i$  принимает все значения индексов ребер  $\gamma^i$ . Нетрудно показать, что редукция  $y(x)$ ,  $x \in \Phi$ , к  $(y)^h$ ,  $x_k^i \in \mathfrak{Z}^h$ , порождает линейный оператор, определенный на  $\Phi$  со значениями в  $\Phi^h$ , его назовем оператором проектирования  $y(x)$ ,  $x \in \Phi$ , на сетку  $\mathfrak{Z}^h$ , результат действия такого оператора – конечномерная сеточная функция  $(y)^h$ ,  $x_k^i \in \mathfrak{Z}^h$ . Обратимся к анализу конечномерного аналога некоторого фиксированного линейного дифференциального оператора  $\Lambda$ , каковым может быть оператор  $\Lambda_\Gamma y$  (5), где  $\Gamma$  – один из  $\mathfrak{Z}_z$ ,  $\mathfrak{Z}_L$ ,  $\mathfrak{Z}$ . Как сказано выше, функция  $\Lambda y$  проектируется на сетку  $\mathfrak{Z}^h$  редуцируется к сеточной функции  $(\Lambda y)^h$ , редукция  $\Lambda y$  к  $(\Lambda y)^h$  есть линейный оператор на  $(y)^h$ , осуществляющий указанную проекцию, его обозначим через  $\Lambda^h$ . Рассмотрим описанную редукцию для дифференциальных операторов  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^0$ ,  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0$ .

1.  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_z$ ,  $\Lambda y = \Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0 y$ ,  $\Phi_{\mathfrak{Z}_z}^0$  – область определения  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0$ . Соответственно обозначим через  $y^h$  сеточную функцию:  $(y^h)_k^i = y(x_k^i)$ ,  $k = \overline{0, n}$ , получим оператор проектирования  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^{0h}$  на  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{Z}_z}^h$  для  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^0$ . Введение следующих разностных отношений

$$(\nabla^h y^h)_k^i = \frac{1}{h} ((y^h)_k^i - (y^h)_{k-1}^i), \quad (\Delta^h y^h)_k^i = \frac{1}{h} ((y^h)_{k+1}^i - (y^h)_k^i), \quad (9)$$

для функции  $(y)^h$ , которым при  $i = \overline{1, M-1}$  предписаны условия

$$(y^h)_n^i = (y^h)_0^{i+1}, \quad \frac{1}{h} ((y^h)_1^{i+1} - (y^h)_0^{i+1}) - \frac{1}{h} ((y^h)_n^i - (y^h)_{n-1}^i) = \alpha_i (y^h)_0^{i+1}, \quad (10)$$

задает представление оператора  $\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^{0h}$ :

$$\begin{aligned} (\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^{0h} y^h)_k^i &= -(\Delta^h \nabla^h y^h)_k^i + (q^h)_k^i (y^h)_k^i = \\ &= -\frac{1}{h^2} ((y^h)_{k+1}^i - 2(y^h)_k^i + (y^h)_{k-1}^i) + (q^h)_k^i (y^h)_k^i. \end{aligned} \quad (11)$$

Соотношения (9) задают левую и правую аппроксимации первой производной. При этом область  $\Phi_{\mathfrak{Z}_z}^0$  есть совокупность функций  $(y)^h$  на  $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{Z}_z}^h$  с нулевыми значениями на  $\partial\Phi_{\mathfrak{Z}_z}^{0h}$  сетки  $\Phi_{\mathfrak{Z}_z}^{0h}$ , а значит, для  $y^h$  справедливы соотношения

$$(y^h)_0^1 = 0, \quad (y^h)_n^M = 0. \quad (12)$$

Соотношения (11), (12) задают аппроксимации выражения  $-\frac{d^2}{dx^2} y + q(x)y$  и краевые условия. Для  $\varphi^h$ ,  $\psi^h \in \Phi_{\mathfrak{Z}_z}^{0h}$  введем функционал следующим соотношением:

$$(\Lambda_{\mathfrak{Z}_z}^{0h} \varphi^h, \psi^h) = -h^2 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^i (\psi^h)_k^i + \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (q^h)_k^i (\varphi^h)_k^i (\psi^h)_k^i,$$

через  $(q^h)$  обозначена сеточная функция для  $\varphi(x) \in C[\mathfrak{Z}_0]$ .

Теорема 3. Пусть  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{Z}_z}^{0h}$ , тогда

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^i (\psi^h)_k^i &= -\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \psi^h)_k^i (\varphi^h)_k^i, \\ -\sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^i (\psi^h)_k^i &= \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (\nabla^h \varphi^h)_k^i (\nabla^h \psi^h)_k^i. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство. Покажем первое тождество в (13). Учитывая представление  $\nabla^h y^h$  в (9), получаем

$$-h^2 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^i (\psi^h)_k^i = h^2 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} ((\varphi^h)_{k+1}^i - 2(\varphi^h)_k^i + (\varphi^h)_{k-1}^i) (\psi^h)_{k-1}^i,$$

т. к. функции  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{Z}_z}^{0h}$ , то (как и выше  $i = \overline{1, M-1}$ )

$$\begin{aligned} (\varphi^h)_1^{i+1} - (\varphi^h)_0^{i+1} - (\varphi^h)_n^i + (\varphi^h)_{n-1}^i &= h\alpha_i (\varphi^h)_n^i, \\ (\psi^h)_1^{i+1} - (\psi^h)_0^{i+1} - (\psi^h)_n^i + (\psi^h)_{n-1}^i &= h\alpha_i (\psi^h)_n^i, \end{aligned}$$

и, применяя действие умножения на  $(\psi^h)_n^i = (\psi^h)_0^{i+1}$  и на  $(\varphi^h)_n^i = (\varphi^h)_0^{i+1}$ , после несложных преобразований приходим к соотношениям

$$(\varphi^h)_1^{i+1} (\psi^h)_0^{i+1} - (\varphi^h)_0^{i+1} (\psi^h)_1^{i+1} + (\varphi^h)_{n-1}^i (\psi^h)_n^i - (\varphi^h)_n^i (\psi^h)_{n-1}^i = 0, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (14)$$

Отсюда, учитывая соотношения (4) в узлах графа, получим

$$\begin{aligned} -h^2 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^i (\psi^h)_k^i &= (\varphi^h)_2^1 (\psi^h)_1^1 - 2(\varphi^h)_1^1 (\psi^h)_1^1 + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-2} ((\varphi^h)_{k+1}^1 (\psi^h)_k^1 - 2(\varphi^h)_k^1 (\psi^h)_k^1 + (\varphi^h)_{k-1}^1 (\psi^h)_k^1) + \\ &+ (\varphi^h)_n^1 (\psi^h)_{n-1}^1 - 2(\varphi^h)_{n-1}^1 (\psi^h)_{n-1}^1 + (\varphi^h)_{n-2}^1 (\psi^h)_{n-1}^1 + \\ &+ (\varphi^h)_2^2 (\psi^h)_1^2 - 2(\varphi^h)_1^2 (\psi^h)_1^2 + (\varphi^h)_0^2 (\psi^h)_1^2 + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-2} ((\varphi^h)_{k+1}^2 (\psi^h)_k^2 - 2(\varphi^h)_k^2 (\psi^h)_k^2 + (\varphi^h)_{k-1}^2 (\psi^h)_k^2) + \\ &+ (\varphi^h)_n^2 (\psi^h)_{n-1}^2 - 2(\varphi^h)_{n-1}^2 (\psi^h)_{n-1}^2 + (\varphi^h)_{n-2}^2 (\psi^h)_{n-1}^2 + \\ &\dots \\ &+ (\varphi^h)_2^M (\psi^h)_1^M - 2(\varphi^h)_1^M (\psi^h)_1^M + (\varphi^h)_0^M (\psi^h)_1^M + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-2} ((\varphi^h)_{k+1}^M (\psi^h)_k^M - 2(\varphi^h)_k^M (\psi^h)_k^M + (\varphi^h)_{k-1}^M (\psi^h)_k^M) - \\ &- 2(\varphi^h)_{n-1}^M (\psi^h)_{n-1}^M + (\varphi^h)_{n-2}^M (\psi^h)_{n-1}^M. \end{aligned}$$

Несложные преобразования, связанные с последовательной перегруппировкой слагаемых в правой части, и учитывая соотношения (10), (14), получим

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=2}^{n-2} ((\psi^h)_{k+1}^2 (\varphi^h)_k^2 - 2(\psi^h)_k^2 (\varphi^h)_k^2 + (\psi^h)_{k-1}^2 (\varphi^h)_k^2) + \\
 & + \sum_{k=2}^{n-2} ((\psi^h)_{k+1}^1 (\varphi^h)_k^1 - 2(\psi^h)_k^1 (\varphi^h)_k^1 + (\psi^h)_{k-1}^1 (\varphi^h)_k^1) + \\
 & + (\psi^h)_n^1 (\varphi^h)_{n-1}^1 - 2(\psi^h)_{n-1}^1 (\varphi^h)_{n-1}^1 + (\psi^h)_{n-2}^1 (\varphi^h)_{n-1}^1 + \\
 & + (\psi^h)_2^2 (\varphi^h)_1^2 - 2(\psi^h)_1^2 (\varphi^h)_1^2 + (\psi^h)_0^2 (\varphi^h)_1^2 + \\
 & + \sum_{k=2}^{n-2} ((\psi^h)_{k+1}^2 (\varphi^h)_k^2 - 2(\psi^h)_k^2 (\varphi^h)_k^2 + (\psi^h)_{k-1}^2 (\varphi^h)_k^2) + \\
 & + (\psi^h)_n^2 (\varphi^h)_{n-1}^2 - 2(\psi^h)_{n-1}^2 (\varphi^h)_{n-1}^2 + (\psi^h)_{n-2}^2 (\varphi^h)_{n-1}^2 + \\
 & \dots \\
 & + (\psi^h)_2^M (\varphi^h)_1^M - 2(\psi^h)_1^M (\varphi^h)_1^M + (\psi^h)_0^M (\varphi^h)_1^M + \\
 & + \sum_{k=2}^{n-2} ((\psi^h)_{k+1}^M (\varphi^h)_k^M - 2(\psi^h)_k^M (\varphi^h)_k^M + (\psi^h)_{k-1}^M (\varphi^h)_k^M) - \\
 & - 2(\psi^h)_{n-1}^M (\varphi^h)_{n-1}^M + (\psi^h)_{n-2}^M (\varphi^h)_{n-1}^M = -h^2 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \psi^h)_k^i (\varphi^h)_k^i,
 \end{aligned}$$

т. е. первое равенство (13). Оставшееся равенство устанавливается таким же образом.

Следствие 1. Самосопряженность  $\Lambda_{\mathfrak{S}_z}^{0h}$  очевидна, т. к.  $(\Lambda_{\mathfrak{S}_z}^{0h} \varphi^h, \psi^h) = (\varphi^h, \Lambda_{\mathfrak{S}_z}^{0h} \psi^h)$  при  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{S}_z}^{0h}$ . Оператор  $\Lambda_{\mathfrak{S}_z}^{0h}$  положителен для произвольных  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{S}_z}^{0h}$ . Это следует из следующих действий. Зафиксируем  $\varphi^h \in \Phi_{\mathfrak{S}_z}^{0h}$  и получим

$$(\Lambda_{\mathfrak{S}_z}^{0h} \varphi^h, \varphi^h) = -h^2 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^i (\varphi^h)_k^i + \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (q^h)_k^i ((\varphi^h)_k^i)^2.$$

Из соотношения (13) вытекает

$$(\Lambda_{\mathfrak{S}_z}^{0h} \varphi^h, \varphi^h) = h^2 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} ((\nabla^h \varphi^h)_k^i)^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (q^h)_k^i ((\varphi^h)_k^i)^2,$$

а значит, справедливо неравенство

$$(\Lambda_{\mathfrak{S}_z}^{0h} \varphi^h, \varphi^h) > 0,$$

при очевидном предположении  $\varphi^h \neq 0$ .

2.  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_L$ ,  $\Lambda y = \Lambda_{\mathfrak{S}_L}^0 y$ ,  $\Phi_{\mathfrak{S}_L}^0$  – область определения  $\Lambda_{\mathfrak{S}_L}^0$ . Для функций  $(y^h)$  имеют место аналогичные соотношениям (10) и (12) условия:

$$\begin{aligned}
 (y^h)_n^{i1} &= (y^h)_0, \quad i = \overline{1, m_1 - 1}, \\
 \sum_{i=1}^{m_1 - 1} ((y^h)_n^{i1} - (y^h)_{n-1}^{i1}) &= (y^h)_1^{m_1 1} - (y^h)_0^{m_1 1}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} (y^h)_n^{ij} &= (y^h)_0^{m_j j}, \quad i = \overline{1, m_j - 1}, \quad j = \overline{2, L}, \\ &(y^h)_n^{m_{j-1} j - 1} - (y^h)_{n-1}^{m_{j-1} j - 1} + \\ &+ \sum_{i=1}^{m_j - 1} ((y^h)_n^{ij} - (y^h)_{n-1}^{ij}) = (y^h)_1^{m_j j} - (y^h)_0^{m_j j}, \quad i = \overline{1, m_j - 1}, \quad j = \overline{2, L}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для  $\Lambda_{\mathfrak{S}_L}^0$  на  $(y^h)$  справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} (\Lambda_{\mathfrak{S}_L}^{0h} y^h)_k^{ij} &= -(\Delta^h \nabla^h y^h)_k^{ij} + (q^h)_k^{ij} (y^h)_k^{ij} = \\ &= -\frac{1}{h^2} ((y^h)_{k+1}^{ij} - 2(y^h)_k^{ij} + (y^h)_{k-1}^{ij}) + (q^h)_k^{ij} (y^h)_k^{ij}, \end{aligned} \quad (17)$$

$m_j$  – количество ребер для  $j$ -й звезды в  $\mathfrak{S}_L$  ( $j = \overline{1, L}$ );  $\Phi_{\mathfrak{S}_L}^0$  определяется совокупностью функций  $(y^h)$ , таких, что

$$(y^h)_0^{ij} = 0, \quad (y^h)_n^{m_L L} = 0. \quad (18)$$

$(i=1, m_j-1, j=\overline{1, L})$

Соотношения (16)-(18) задают аппроксимации условий в узлах  $\mathfrak{S}_L$ , оператора  $\Lambda_{\mathfrak{S}_L}^0$  и условий на  $\partial \mathfrak{S}_L$ .

Для  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{S}_L}^{0h}$  введем функционал следующим соотношением:

$$(\Lambda_{\mathfrak{S}_L}^{0h} \varphi^h, \psi^h) = -h^2 \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^{ij} (\psi^h)_k^{ij} + \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} (q^h)_k^{ij} (\varphi^h)_k^{ij} (\psi^h)_k^{ij},$$

через  $(q^h)$  обозначена сеточная функция для  $\varphi(x) \in C[\mathfrak{S}_0]$ .

Теорема 4. Пусть  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{S}_L}^{0h}$ , тогда

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^{ij} (\psi^h)_k^{ij} &= -\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \psi^h)_k^{ij} (\varphi^h)_k^{ij}, \\ -\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^{ij} (\psi^h)_k^{ij} &= \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} (\nabla^h \varphi^h)_k^{ij} (\nabla^h \psi^h)_k^{ij}, \end{aligned} \quad (19)$$

Доказательство утверждений (19) дословно повторяет преобразования и рассуждения для теоремы 3.

Следствие 2. Самосопряженность  $\Lambda_{\mathfrak{S}_L}^{0h}$  очевидна, т. к.  $(\Lambda_{\mathfrak{S}_L}^{0h} \varphi^h, \psi^h) = (\varphi^h, \Lambda_{\mathfrak{S}_L}^{0h} \psi^h)$  при  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{S}_L}^{0h}$ . Оператор  $\Lambda_{\mathfrak{S}_L}^{0h}$  положителен для произвольных  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{S}_L}^{0h}$ . Это следует из следующих действий. Зафиксируем  $\varphi^h \in \Phi_{\mathfrak{S}_L}^{0h}$  и получим

$$\begin{aligned} (\Lambda_{\mathfrak{S}_L}^{0h} \varphi^h, \varphi^h) &= -h^2 \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} (\nabla^h \varphi^h)_k^{ij} (\nabla^h \varphi^h)_k^{ij} + \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} (q^h)_k^{ij} ((\varphi^h)_k^{ij})^2 = \\ &= h^2 \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} ((\nabla^h \varphi^h)_k^{ij})^2 + \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{m_j} \sum_{k=1}^{n-1} (q^h)_k^{ij} ((\varphi^h)_k^{ij})^2. \end{aligned}$$

Из соотношения (19) вытекает

$$(\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^{0h} \varphi^h, \varphi^h) = h^2 \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} ((\nabla^h \varphi^h)_k)^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^{n-1} (q^h)_k ((\varphi^h)_k)^2,$$

а значит,

$$(\Lambda_{\mathfrak{Z}_L}^{0h} \varphi^h, \varphi^h) > 0,$$

при очевидном предположении  $\varphi^h \neq 0$ .

3.  $\mathfrak{Z}$  – произвольное дерево,  $\Lambda u = \Lambda_{\mathfrak{Z}}^0 u$ ,  $\Phi_{\mathfrak{Z}}^{0h}$  – область определения  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0$ . Введем соответствующий дереву  $\mathfrak{Z}$  максимальный простейший граф  $\mathfrak{Z}_0$ , количество ребер его равно  $M$ , а длина равна  $\ell$ . Для любого  $\xi \in J(\mathfrak{Z})$  существует единственная звезда  $\mathfrak{Z}_\xi$ , имеющая  $m_\xi$  ребер. Для каждой такой звезды  $\mathfrak{Z}_\xi$  число  $m_\xi - 1$  определяет количество ребер  $\gamma_i^\xi$  ( $i = \overline{1, m_\xi - 1}$ ), заведомо имеющих установленную в дереве  $\mathfrak{Z}$  ориентацию «к  $\xi$ » и одно ребро  $\gamma_{m_\xi}^\xi$ , имеющее установленную ориентацию «от  $\xi$ ». Как и выше для случая  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_L$ , для каждого из  $\gamma_i^\xi$  ( $i = \overline{1, m_\xi - 1}$ ) установлен отрезок  $[(\nu - 1) \frac{\ell}{M}, \nu \frac{\ell}{M}]$  ( $\nu = \overline{1, M - 1}$ ), для ребра  $\gamma_{m_\xi}^\xi$  установлен отрезок  $[\nu \frac{\ell}{M}, (\nu + 1) \frac{\ell}{M}]$  при  $\nu = M$ . Введем следующие обозначения:  $\gamma_i^{h\xi}$  – сетка для  $\gamma_i^\xi \subset \mathfrak{Z}$ ,  $\mathfrak{Z}_\xi^h$  – сетка для  $\mathfrak{Z}_\xi \subset \mathfrak{Z}$ , это означает, что  $\mathfrak{Z}^h = \bigcup_{\xi} \mathfrak{Z}_\xi^h$  является сеткой для введенного произвольного дерева  $\mathfrak{Z}$ .

Обозначим, как это сделано выше, через  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^{0h}$  конечномерный аналог для  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0$  на  $\mathfrak{Z}^h$  (редукция  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0$  к  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^{0h}$ ) и введем совокупность  $\mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}^h$  сеточных функций  $(y^h)$ , значения которых определяются в соответствии с элементами сетки  $\mathfrak{Z}^h$ ; следующие условия на  $(y^h)$  для любых  $\xi \in J(\mathfrak{Z})$  аналогичны соотношениям (15):

$$(y^h)_n^{i\xi} = (y^h)_0^{m_\xi^\xi}, \quad i = \overline{1, m_\xi - 1},$$

$$\sum_{i=1}^{m_\xi-1} ((y^h)_n^{i\xi} - (y^h)_{n-1}^{i\xi}) = (y^h)_1^{m_\xi^\xi} - (y^h)_0^{m_\xi^\xi}.$$

Для  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^{0h}$  на  $(y^h) \in \mathfrak{R}_{\mathfrak{Z}}^h$  справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} (\Lambda_{\mathfrak{Z}}^{0h} y^h)_k^{i\xi} &= -(\Delta^h \nabla^h y^h)_k^{i\xi} + (q^h)_k^{i\xi} (y^h)_k^{i\xi} = \\ &= -\frac{1}{h^2} ((y^h)_{k+1}^{i\xi} - 2(y^h)_k^{i\xi} + (y^h)_{k-1}^{i\xi}) + (q^h)_k^{i\xi} (y^h)_k^{i\xi} \quad \forall \xi \in J(\mathfrak{Z}), \end{aligned}$$

$(q^h)$  соответствует  $q(x) \in C[\mathfrak{Z}]$ ,  $\Phi_{\mathfrak{Z}}^{0h}$  определяется совокупностью функций  $(y^h)$  таких, что

$$(y^h)_0^\zeta = 0, \quad (y^h)_n^\eta = 0, \quad \eta, \zeta \in \partial \mathfrak{Z}.$$

Для  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{Z}}^{0h}$  введем функционал следующим соотношением:

$$(\Lambda_{\mathfrak{Z}}^{0h} \varphi^h, \psi^h) = -h^2 \sum_{\xi \in J(\mathfrak{Z})} \sum_{i=1}^{m_\xi} \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^{i\xi} (\psi^h)_k^{i\xi} +$$

$$+ \sum_{\xi \in J(\mathfrak{Z})} \sum_{i=1}^{m_\xi} \sum_{k=1}^{n-1} (q^h)_k^{i\xi} (\varphi^h)_k^{i\xi} (\psi^h)_k^{i\xi}.$$

Сформируем для графа  $\mathfrak{Z}$  максимальный простейший подграф  $\mathfrak{Z}_0 \subset \mathfrak{Z}$ . Структурируем узлы  $\xi \in J(\mathfrak{Z}_0)$  подграфа  $\mathfrak{Z}_0$ , формируя две группы следующим образом: 1-я группа содержит  $\xi^1$ , которые принадлежат к ребрам-входам; нетрудно проверить, что звезды, порожденные узлами 1-й группы, имеют ребра с ориентацией «к  $\xi^1$ », 2-я группа содержит остальные узлы  $\xi^2 \in J(\mathfrak{Z}_0)$ . Пусть  $\xi^2$  – некоторый фиксированный узел и пусть подграф  $\mathfrak{Z}^{\xi^2} \subset \mathfrak{Z}$  такой, что оно содержит звезду  $\xi^1$  и только одно ребро-выход из сети  $\mathfrak{Z}^{\xi^2}$ . Обозначим через  $\mathfrak{Z}_0^{\xi^2}$  максимальный простейший для  $\mathfrak{Z}^{\xi^2}$  и формируем из его узлов две группы, как это сделано выше и т. д. В результате повторения такой процедуры получим представление  $\mathfrak{Z}$  в виде конечного числа звезд и цепочек звезд.

В силу утверждения теорем 3 и 4, приходим к следующему результату.

Теорема 5. Пусть  $\varphi^h, \psi^h \in \Phi_{\mathfrak{Z}}^{0h}$ , тогда

$$-\sum_{\xi \in J(\mathfrak{Z})} \sum_{i=1}^{m_\xi} \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^{i\xi} (\psi^h)_k^{i\xi} = -\sum_{\xi \in J(\mathfrak{Z})} \sum_{i=1}^{m_\xi} \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \psi^h)_k^{i\xi} (\varphi^h)_k^{i\xi},$$

$$-\sum_{\xi \in J(\mathfrak{Z})} \sum_{i=1}^{m_\xi} \sum_{k=1}^{n-1} (\Delta^h \nabla^h \varphi^h)_k^{i\xi} (\psi^h)_k^{i\xi} = \sum_{\xi \in J(\mathfrak{Z})} \sum_{i=1}^{m_\xi} \sum_{k=1}^{n-1} (\nabla^h \varphi^h)_k^{i\xi} (\nabla^h \psi^h)_k^{i\xi}.$$
(20)

Следствие 3. Как и выше для следствий 1 и 2, первое соотношение (20) гарантирует самосопряженность  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^0$ , второе – положительность  $\Lambda_{\mathfrak{Z}}^{0h}$  на  $\Phi_{\mathfrak{Z}}^{0h}$ .

### Вычислительные аспекты в многомерных областях

Представленные результаты являются обоснованием применимости численных методов анализа начально-краевых задач для эволюционных дифференциальных уравнений с пространственной переменной, изменяющейся на сети (графе). Аналогичные результаты для  $n$ -мерной пространственной переменной ( $n = 2, 3$ ), изменяющейся на сетеподобной области  $\mathfrak{Z} \subset R^n$ , находятся еще в стадии формирования из-за несравненно высокого уровня технических сложностей, естественным образом возникающих при увеличении размерности пространственной переменной [8, 9]. Сетеподобная область  $\mathfrak{Z}$  представляет собой совокупность подобластей, структурно связанных между собой частями своих границ, как это определяется естественной топологией геометрического графа [9, 10].

Как показывает приводимый ниже пример численного анализа, допускается распространение полученных результатов и на дифференциальные операторы, определенных на функциях с  $n$ -мерным носителем (например, при  $n = 2, 3$ ). Для подтверждения возможности обоснования численных методов анализа начально-краевых задач для случая  $n = 2$ , приводятся результаты применения вычислительных методов к решению тестовых задач с пространственной переменной, изменяющейся на

двухмерной сложноструктурированной области. При этом, для упрощения представлений разностных схем используется метод полу-дискретизации по временной переменной (в некотором смысле нивелируются многочисленные рутинные издержки, необходимо возникающие как прямое следствие многомерности пространственной переменной).

Пример. Пусть  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2 \cup \mathfrak{S}_3 \subset \mathbb{R}^2$  с двумя поверхностями разграничений  $S_1, S_2$  для областей  $\mathfrak{S}_1 = \{x_1, x_2 \in (0, \frac{1}{3}) \times (0, 1)\}$ ,  $\mathfrak{S}_2 = \{x_1, x_2 \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (0, 1)\}$ ,  
 $\mathfrak{S}_3 = \{x_1, x_2 \in (\frac{2}{3}, 1) \times (0, 1)\}$ .

Для функции  $u(x_1, x_2, t)$  задана начально-краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x_1, x_2, t), \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{S}, \quad t \in (0, T), \quad (21)$$

$$u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} = u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \quad (22)$$

$$u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} = u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \quad (23)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2), \quad (24)$$

$$u|_{x_1 \in \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u|_{x_2=1} = 0, \quad (25)$$

где  $Lu = -\sum_{\kappa=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_\kappa}$ . Система (21)-(25) редуцируется к дифференциально-разностной

$$\frac{1}{\tau}(u(k) - u(k-1)) + Lu(k) = f(k), \quad (26)$$

$$u(k) := u(x_1, x_2; k), \quad f(k) := f(x_1, x_2; k) = \frac{1}{\tau} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} f(x_1, x_2, t) dt, \quad \tau = T/K, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

$$u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} = u|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{1}{3} \in \mathfrak{S}_2}, \quad (27)$$

$$u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} = u|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\frac{2}{3} \in \mathfrak{S}_3}, \quad (28)$$

$$u(0) = \varphi(x_1, x_2), \quad (29)$$

$$u|_{x_1=0} = u|_{x_1=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u|_{x_2=1} = 0, \quad (30)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ x_1 \cos \frac{\pi}{2} x_2, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ (-9x_1^2 + 13x_1 - 4) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3. \end{cases}$$

Выражение  $-\sum_{\kappa=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_\kappa}$  для  $u(k)$  системы (26)-(30) задает спектральную задачу

$$-\left( \frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(k)}{\partial x_2^2} \right) = \lambda u(k), \quad u(k) \in W^1(\mathfrak{I}),$$

$$u(k)|_{x_1=0} = u(k)|_{x_1=1} = 0, \quad \frac{\partial u(k)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0, \quad u(k)|_{x_2=1} = 0,$$

совокупности  $\{\lambda_i\}$  и  $\{u_i(x_1, x_2)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , которой имеют ниже представленный вид.

При  $i = 5n - 4$ ,

$$\lambda_{5n-4} = 9\pi^2 n^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{5n-4}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 \sin(3\pi n(x_1 - \frac{1}{3})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2 \sin(3\pi n(x_1 - \frac{1}{3})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ 2 \sin(3\pi n(x_1 - \frac{1}{3})) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases}$$

коэффициенты Фурье  $\varphi(x_1, x_2)$ :  $\varphi_{5n-4} = \frac{2}{3\pi^3 n^3} (\cos(\pi n) - 1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

При  $i = 5n - 3$ ,

$$\lambda_{5n-3} = s_1^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad s_1 = \pi(6n - 5), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$u_{5n-3}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 \sin(s_1(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2 \sin(s_1 x_1 + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ 2 \sin(s_1(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases}$$

коэффициенты Фурье  $\varphi(x_1, x_2)$ :  $\varphi_{5n-3} = \frac{9}{s_1^3}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

При  $i = 5n - 2$ ,

$$\lambda_{5n-2} = s_2^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad s_2 = \pi(6n-1), \quad n=1,2,\dots,$$

$$\phi_{5n-2}(x_1, x_2) = \begin{cases} -2 \sin(s_2(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ -2 \sin(s_2 x_1 + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ -2 \sin(s_2(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases}$$

коэффициенты Фурье  $\varphi(x_1, x_2)$ :  $\varphi_{5n-2} = \frac{9}{s_2^3}, \quad n=1,2,\dots$

При  $i = 5n-1$ ,

$$\lambda_{5n-1} = s_3^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad s_3 = \pi(6n-4), \quad n=1,2,\dots,$$

$$u_{5n-1}(x_1, x_2) = \begin{cases} -2 \sin(s_3(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ -2 \sin(s_3 x_1 + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ -2 \sin(s_3(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{2\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases}$$

коэффициенты Фурье  $\varphi(x_1, x_2)$ :  $\varphi_{5n-1} = \frac{27}{s_3^3}, \quad n=1,2,\dots$

При  $i = 5n$ ,

$$\lambda_{5n} = s_4^2 + \frac{\pi^2}{4}, \quad s_4 = \pi(6n-2), \quad n=1,2,\dots,$$

$$\phi_{5n}(x_1, x_2) = \begin{cases} 2 \sin(s_4(x_1 - \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_1, \\ 2 \sin(s_4 x_1 + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_2, \\ 2 \sin(s_4(x_1 + \frac{1}{3}) + \frac{\pi}{3}) \cos \frac{\pi x_2}{2}, & x_1, x_2 \in \mathfrak{I}_3, \end{cases}$$

коэффициенты Фурье  $\varphi(x_1, x_2)$ :  $\varphi_{5n} = \frac{27}{s_4^3}, \quad n=1,2,\dots$

Приближение решения для (21)-(25) определяется отрезками ряда

$$u^N(k) = \sum_{j=1}^N C_j^k u_j(x_1, x_2), \quad C_j^k = \frac{\varphi_j}{(1 + \tau \lambda_j)^k}, \quad k=1,\dots,K,$$

по базису  $\{u_i(x_1, x_2)\}$ , ошибка вычислений не превышает 5 % при  $N \geq 10$ .

### Заключение

Представленные в примере рассуждения достаточно просто переносятся на случай  $n = 3$ , при этом основные сложности технического характера возникают только

при формировании множеств собственных значений  $\{\lambda_i\}$  и собственных функций  $\{u_i(x_1, x_2)\}$ . Следует отметить также, что используемый при исследовании подход эффективен при алгоритмизации математических моделей прикладных задач в области транспортирования сплошных сред (гидросети, теплосети, транспортные сети нефтегазовых продуктов). Результаты работы могут быть перенесены и на аналогичные задачи анализа динамики вязкоупругих сред, в том числе сред с памятью.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Хоанг В.Н., Парт А.А., Перова И.В. Численный анализ математической модели динамики турбулентного течения многофазной среды в сетеподобных объектах. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2023;11(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1326>. DOI: 10.26102/2310-6018/2023.41.2.006.
2. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач*. М.: Физматлит. 2007; 384 с.
3. Sergeev S.M., Raijhelgauz L.B., Hoang V.N., Panteleev I.N. Modeling unbalanced systems in network-like oil and gas processes. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1679(2):022015. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1679/2/022015>.
4. Провоторов В.В. *Собственные функции краевых задач на графах и приложения*. Воронеж: Научная книга; 2008. 247 с.
5. Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля*. М.: Наука; 1984. 239 с.
6. Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2019;15(3):323–336. URL: <http://hdl.handle.net/11701/16384>.
7. Yurko V.A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series*. Utrecht, VSP; 2002. 303 p.
8. Artemov M.A., Baranovskii E.S. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions. *Mathematics*. 2019;7(7). URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/7/7/611>.
9. Baranovskii E.S. Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2019;18(2):735–750. DOI: 10.3934/cpaa.2019036.
10. Baranovskii E.S. Existence results for regularized equations of second-grade fluids with wall slip. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2015;(91):1–12. URL: <http://real.mtak.hu/32263/>.

### REFERENCES

1. Hoang V.N., Part A.A., Perova I.V. Numerical analysis of the mathematical model of the turbulent flow dynamics of a multiphase medium in network-like objects. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2023;11(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1326>. DOI: 10.26102/2310-6018/2023.41.2.006. (In Russ.).
2. Yurko V.A. *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral'nykh zadach*. М.: Fizmatlit, 1984. 384 p. (In Russ.).
3. Sergeev S.M., Raijhelgauz L.B., Hoang V.N., Panteleev I.N. Modeling unbalanced systems in network-like oil and gas processes. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1679(2):022015. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1679/2/022015>.

4. Provotorov V.V. *Sobstvennyye funktsii krayevykh zadach na grafakh i prilozheniya*. Voronezh, Nauchnaya kniga; 2008. 247 p. (In Russ.).
5. Levitan B.M. *Obratnye zadachi Shturma-Liuvillia*. M.: Nauka; 1984. 239 p. (In Russ.).
6. Zhabko A.P., Nurtazina K.B., Provotorov V.V. About one approach to solving the inverse problem for parabolic equation. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2019;15(3):323–336. URL: <http://hdl.handle.net/11701/16384>.
7. Yurko V. A. *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory, Inverse and Ill-posed Problems Series*. Utrecht, VSP; 2002. 303 p.
8. Artemov M.A., Baranovskii E. S. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions. *Mathematics*. 2019;7(7). URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/7/7/611>.
9. Baranovskii E.S. Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2019;18(2):735–750. DOI: 10.3934/cpaa.2019036.
10. Baranovskii E.S. Existence results for regularized equations of second-grade fluids with wall slip. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*. 2015;(91):1–12. URL: <http://real.mtak.hu/32263/>.

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Хоанг Ван Нгуен**, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.

*e-mail*: [fadded9x@gmail.com](mailto:fadded9x@gmail.com)  
ORCID: [0000-0001-6970-2770](https://orcid.org/0000-0001-6970-2770)

**Hoang Van Nguyen**, Postgraduate Student, the Department of Equations in Partial Derivatives and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

**Махинова Ольга Алексеевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, Учебно-научный центр Военно-воздушных сил, Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация.

*e-mail*: [olga.maxinova@list.ru](mailto:olga.maxinova@list.ru)

**Olga Alekseevna Makhinova**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Mathematics, Educational and Scientific Center of the Air Force, The Air Force Academy named after N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, the Russian Federation.

**Тимошенко Виктор Владимирович**, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.

*e-mail*: [wwprov@mail.ru](mailto:wwprov@mail.ru)

**Victor Vladimirovich Timoshenko**, Postgraduate Student, Department of Equations in Partial Derivatives and Probability Theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

*Статья поступила в редакцию 06.05.2023; одобрена после рецензирования 08.06.2023; принята к публикации 27.06.2023.*

*The article was submitted 06.05.2023; approved after reviewing 08.06.2023; accepted for publication 27.06.2023.*