УДК 517.977.56
DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.019

Оптимальное управление организационно-технической системой с учетом интенсивности приложения управляющих воздействий

Г.Ф. Ахмедьянова

Оренбургский государственный университет, Оренбург, Российская Федерация

Резюме. Предиктивное управление при всех его погрешностях и сложностях все же является действенным средством обеспечить организационно-техническую систему временем для повышения ее готовности к изменениям ситуационной обстановки. Для постановки и решения задачи оптимального управления этим процессом использовано уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, являющегося первым приближением в вероятностном описании случайных процессов. Для постановки задачи оптимального управления модифицирован критерий Летова, применен координатно-параметрический подход, а также учтен очевидный факт возрастания управленческих расходов при уменьшении времени на повышение готовности организационно-технической системы в виде квадрата скорости изменения плотности вероятности. К итоговому лагранжиану применены уравнения Эйлера-Остроградского-Пуассона. Полученные нелинейные уравнения решены с помощью метода малого параметра. Исследование полученного решения доказывает, что даже при оптимальном управлении величина управляющих воздействий возрастает пропорционально целевому значению и длительности управления (увеличению горизонта планирования). Возрастание происходит по кубу экспоненты, то есть очень медленно вначале управления и очень резко в конце, и аналогичный характер возрастания демонстрирует зависимость управляющих воздействий от востребованности результата управления, но выражается эта зависимость через гиперболические функции.

Ключевые слова: оптимальное управление, уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, вероятностные критерии качества, интенсивность приложения управляющих воздействий, метод малого параметра.

Для цитирования: Ахмедьянова Г.Ф. Оптимальное управление организационно-технической системой с учетом интенсивности приложения управляющих воздействий. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2024;12(1). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1497 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.019

Optimal control of an organizational and technical system taking into account the intensity of control actions application

G.F. Akhmedyanova

Orenburg State University, Orenburg, the Russian Federation

Abstract. Predictive management with all its errors and difficulties is still an effective means of providing an organizational and technical system with time to increase its readiness for changes in the situation. To formulate and solve the problem of optimal control of this process, the Fokker-Planck-Kolmogorov equation was used, which is the first approximation in the probabilistic description of random processes. To formulate the optimal control problem, the Letov criterion was modified, a coordinate-parametric approach was applied, and the obvious fact of an increase in management costs with a decrease in the time to improve the readiness of the organizational and technical system was taken into account in the form of the square of change rate in the probability density. The Euler-Ostrogradsky-Poisson equations are applied to the final Lagrangian. The resulting nonlinear equations were solved using the small parameter method. The study of the resulting solution proves that even with optimal control the magnitude of control actions increases in proportion to the target value and duration of control (increasing the planning horizon), the increase occurs according to the cube of the exponential, that is, very slowly at the beginning of control and very sharply at the end, and a similar pattern of increase demonstrates the dependence of the control influences from the demand for management results, but it is expressed through hyperbolic functions.

Keywords: optimal control, Fokker-Planck-Kolmogorov equation, probabilistic quality criteria, intensity of application of control actions, small parameter method.

For citation: Akhmedyanova G.F. Optimal control of an organizational and technical system taking into account the intensity of application of control actions. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2024;12(1). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1497 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.019 (In Russ.).

Введение

Предиктивное управление при всех его погрешностях и сложностях все же является действенным средством обеспечить организационно-техническую систему временем для повышения ее готовности к изменениям ситуационной обстановки [1, 2]. Актуальность этому направлению исследований добавляет также возможность подключения вероятностного инструмента, позволяющего выявить алгоритмы оптимального управления пусть даже в первом марковском приближении [3]. При этом время опережения или горизонт планирования являются главным атрибутом предиктивного управления [4].

Если горизонт управления значителен и на его достижение за один акт управления не хватает средств, вводится горизонт управления, который меньше горизонта планирования, поскольку он определяется, исходя из материальных или финансовых запасов. На выбранном горизонте управления ставится и решается задача оптимального управления. Однако, чем меньше горизонт управления, тем выше интенсивность приложения управляющих воздействий, что требует большего быстродействия и влечет за собой повышенный расход ресурсов управления. Следовательно, целесообразно ввести интенсивность в минимизируемую целевую функцию оптимального управления.

Постановка задачи оптимального управления

Востребованность (спрос) на результат функционирования организационно-технической системы в обществе (например, на рынке) является случайным процессом. Пусть, в первом приближении, вероятность того, что этот результат будет востребован в обществе, подчиняется требованию марковости, зависит от времени t и переменной x, характеризующей объем востребованного результата.

Тогда плотность этой вероятности ω_0^*, должна подчиняться уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [5]:

$$\frac{\partial \omega_0^*}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x} + \frac{b_0}{2} \frac{\partial^2 \omega_0^*}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где a_0 – коэффициент сноса, b_0– коэффициент диффузии.

Для упрощения дальнейших выкладок воспользуемся подстановкой Тихонова-Самарского:

$$\omega_0^* = e^{\mu x + \lambda t} \cdot \omega_1^*(x,t),\ \ \mu = a_0/b_0 \quad \lambda = -\,{a_0}^2/2b_0 \tag{2}$$

и приведем уравнение (1) к каноническому виду:

$$\frac{\partial \omega_1^*}{\partial t} = b_1 \frac{\partial^2 \omega_1^*}{\partial x^2}\,. \qquad (3)$$

Организационно-техническая система в момент возникновения спроса на результат ее функционирования скорее всего не готова воспроизвести его в заданном количестве и поведение этой готовности также является случайным процессом [6]. Принимая еще раз гипотезу марковости по отношению к этому процессу, напишем другое уравнение ФПК сразу в каноническом виде. Тогда поведение плотности вероятности готовности организационно-технической системы ω описывается уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = b_2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\,. \qquad (4)$$

Управление вероятностью может быть осуществлено только проведением мероприятий, способствующих появлению желаемого события и устранением причин его непоявления, поэтому формирование управляющих воздействий становится здесь особой задачей, связанной с выбором нужных мероприятий [7]. Поскольку в уравнении ФПК недопустимо введение точечных источников в правой части, через которые можно было бы управлять изменениями плотностей вероятности, применим концепцию координатно-параметрического управления. Эта концепция предложена Б.Н. Петровым, В.Ю. Рутковским и С.Д. Земляковым [8]. В этом подходе по выражению академика Б.Н. Петрова [9] обеспечивается встречное движение объекта управления к регулятору. Например, у самолета со складывающимися крыльями вектор скорости является управляемой координатой, а величина сложенности крыла (угол разведения крыльев) является управляющим параметром, который меняет модуль этой скорости. При большом угле самолет становится медленным, но маневренным, а при малом угле приближается к ракете.

В данной задаче координатой является плотность вероятности готовности организационно-технической системы, а изменение параметра b_2 отражает управляющее параметрическое воздействие, изменяющее эту плотность вероятности в соответствии с уравнением ФПК.

Исследуем параметрическое управление такое, что коэффициент $b_2 \to b_1$ в уравнении (3). Уравнение (4) приобретает следующий вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = by \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\,. \qquad (5)$$

Управляющее воздействие y в данной задаче имеет специфический характер. Ведь управлять вероятностью можно, только создавая благоприятные условия для появления желаемого события и устраняя причины, мешающие этому появлению, то есть в данной задаче управленческие мероприятия должны способствовать уравниванию коэффициентов в уравнениях (3) и (4), а управляющее воздействие будет измеряться затратами на эти мероприятия.

Кроме того, при координатно-параметрическом подходе координатное управление является аддитивным, а параметрическое – мультипликативным [10].

Управление организационно-технической системой в этом представлении должно сводиться к обеспечению уровня ее готовности к производству востребованного в обществе результата в размере, соответствующем спросу x. Математически это означает, что необходимо минимизировать различия плотностей вероятностей, подчиняющихся уравнениям (3) и (4).

С другой стороны, для организационно-технической системы, в силу ее природной инерционности, важна длительность подготовки к предстоящим по прогнозу изменениям, обусловленная горизонтом планирования. Как видим из Рисунка 1, при уменьшении горизонта планирования ($t_3 \to t_1$) интенсивность нарастания плотности вероятности резко возрастает. Вместе с этим нарастает и интенсивность управленческих трат. Например, если готовиться к событию заранее, интенсивность подготовки можно держать на невысоком уровне, а если до события остается мало времени, подготовка превращается в «аврал». Интенсивность прилагаемых управляющих воздействий, очевидно, зависит от тангенса угла наклона линий достижения целевых величин плотности вероятности.

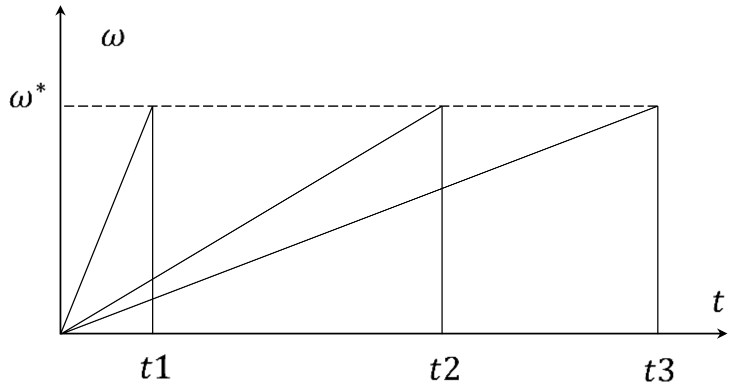

Рисунок 1 – Изменения угла наклона линии достижения целевого значения в зависимости от изменения горизонта планирования
Figure 1 – Changes in the inclination angle of the line to achieve the target value depending on changes in the planning horizon

Считаем в первом приближении эту зависимость пропорциональной и задаем ее формулой

$$y = g\frac{\partial\omega}{\partial t}\,. \tag{6}$$

Для решения поставленной задачи оптимального управления применим метод аналитического конструирования регуляторов профессора Летова А.М. [11, 12]. В соответствии с ним в функционал включаются сумма квадрата потерь от недостаточности управления (в виде разности плотностей вероятностей в нашей задаче [13, 14]), и квадрата затрат на управление. Модернизируем этот функционал в соответствии с нежелательностью больших интенсивностей приложения управляющих воздействий, обсужденной выше, добавив потери, связанные с этой интенсивностью формулой (6). Кроме того, введение переменной x превращает объект управления в объект с распределенными параметрами и требует дополнительного интегрирования по этой переменной

$$F = \int_0^{t_f}\int_0^{\infty}\left(q(\omega_1^* - \omega)^2 + g\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 + (b_1 - yb)^2\right)dxdt \to min, \tag{7}$$

где q, g – постоянные коэффициенты, t_f – время завершения управления.

Составим лагранжиан с использование выражений (5), (6) и (7) и одного множителя Лагранжа ψ

$$L = q(\omega_1^* - \omega)^2 + g\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 + (b_1 - yb)^2 + \psi\left(by\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \frac{\partial\omega}{\partial t}\right) \to min. \tag{8}$$

Исследование методом вариационного исчисления

Для объекта с распределенными параметрами необходимо составлять уравнения Эйлера-Остроградского-Пуассона [15]:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \omega} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega_x'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega_x''}\right) = \\ -2q(\omega_1^* - \omega) + \dot{\psi} - 2g\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + by\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2b\frac{dy}{dx}\frac{d\psi}{dx} + b\psi\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} = by\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2(b_1 - yb) + b\psi\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

или

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -by\frac{d^2\psi}{dx^2} - 2b\frac{dy}{dx}\frac{d\psi}{dx} - b\psi\frac{d^2 y}{dx^2} + 2g\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2q(\omega_1^* - \omega) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = by\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \\ y = \frac{b_1}{b} - \frac{1}{2}\psi\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \end{cases} \tag{10}$$

Проводим подстановку из третьего уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\left(b_1 - \frac{b}{2}\psi\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)\frac{d^2\psi}{dx^2} + b\frac{d\psi\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \frac{b}{2}\psi\frac{d^2\psi\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}}{dx^2} + 2g\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2q(\omega_1^* - \omega) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = b_1\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{b}{2}\psi\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2. \end{cases} \tag{11}$$

Заканчивая преобразования в первом уравнении, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -b_1\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{b\psi}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\frac{d^2\psi}{dx^2} + b\left(\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \psi\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3}\right)\frac{d\psi}{dx} + \frac{b\psi}{2}\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \psi\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}\right) + 2g\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2q(\omega_1^* - \omega). \tag{12}$$

Группируем одинаковые слагаемые и подставляем в систему (11)

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -b_1\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \psi b\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + b\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + 2b\psi\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{b\psi^2}{2}\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2g\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + 2q(\omega_1^* - \omega) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = b_1\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{b}{2}\psi\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2. \end{cases} \tag{13}$$

Полученные нелинейные уравнения решаем методом малого параметра, для чего разложим переменные

$$\begin{cases} \psi = \psi_0 + \lambda\psi_1 + \lambda^2\psi_2 + \cdots \\ \omega = \omega_0 + \lambda\omega_1 + \lambda^2\omega_2 + \cdots \end{cases}. \tag{14}$$

Подставляем это разложение в (13), выделяя линейную часть, а нелинейную умножаем на λ и оставляем в правой части уравнений. Теперь можно собирать слагаемые с одинаковой степенью λ и получать уравнения все более точного приближения, первые два из которых следующие

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_0}{\partial t} + b_1\frac{d^2\psi_0}{dx^2} = 0 \\ \frac{\partial \omega_0}{\partial t} - b_1\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x^2} = 0 \end{cases}. \tag{15}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + b_1\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = b\psi_0\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x^2}\frac{d^2\psi_0}{dx^2} + b\left(\frac{d\psi_0}{dx}\right)^2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x^2} + 2b\psi_0\frac{\partial^3\omega_0}{\partial x^3}\frac{d\psi_0}{dx} + \frac{b\psi_0^2}{2}\frac{\partial^4\omega_0}{\partial x^4} + 2g\frac{\partial^2\omega_0}{\partial t^2} \\ +2q(\omega_1^* - \omega_0) \\ \frac{\partial\omega_1}{\partial t} - b_1\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} = -\frac{b}{2}\psi_0\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial x^2}\right)^2. \end{cases} \quad (16)$$

Первое уравнение в системе (15) решаем методом разделения переменных

$$\psi_0 = p(x)\cdot v(t). \quad (17)$$

Тогда первое уравнение (15) преобразуется

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} = -b_1\frac{1}{p}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = M. \quad (18)$$

Имеем систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - Mv = 0 \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{M}{b_1}p = 0 \end{cases}. \quad (19)$$

Из справочника [16] следует

$$\begin{cases} v = C_1^* exp(Mt) \\ p = C_2^* sin(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x) \end{cases}. \quad (20)$$

Возвращаясь к (17), получим

$$\psi_0 = C_1 exp(Mt) sin(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x). \quad (21)$$

Аналогичное решение проводим для второго уравнения (15)

$$\omega_0 = C_2 exp(Mt) sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right). \quad (22)$$

Решаем теперь первое уравнение системы второго приближения (16), подставляя полученные результаты:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + b_1\frac{d^2\psi_1}{dx^2} =$$
$$-bC_1^2C_2\left(\frac{M}{4b_1}\right)^2 exp(Mt)sin\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right)exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right)exp(Mt)sin\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) +$$
$$b\left(C_1\sqrt{\frac{M}{4b_1}}exp(Mt)\cos(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x)\right)^2 C_2\frac{M}{4b_1}exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) +$$
$$2bC_1^2C_2 exp(Mt)sin\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right)exp(Mt)\left(\frac{M}{4b_1}\right)^2 ch\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right)exp(Mt)cos\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) +$$
$$\frac{b}{2}\left(C_1 exp(Mt)\sin(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x)\right)^2 exp(Mt)C_2\left(\frac{M}{4b_1}\right)^2 sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) +$$
$$2gC_2M^2 exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) + 2q\left(\omega_1^* - C_2 exp(Mt)sh(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x)\right). \quad (23)$$

Группируем подобные члены и преобразуем систему уравнений (17) к следующему виду

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} - b_1\frac{d^2\psi_1}{dx^2} = - \\ \frac{bC_1{}^2C_2}{2}\left(\frac{M}{4b_1}\right)^2 exp^3(Mt)[2sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right)cos^2\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) - sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right)sin^2\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) + \\ 2ch\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right)sin\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) + cos\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right)] + 2C_2exp(Mt)sh(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x)[gM^2 - q\ ] + 2q\omega_1^* \\ \frac{\partial\omega_1}{\partial t} - b_1\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} = -\frac{b}{2}C_1C_2{}^2\left(\frac{M}{4b_1}\right)^2 exp^3(Mt)\sin\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right)sh^2\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right). \end{cases} \quad (24)$$

Как известно из теории, общее решение неоднородного дифференциального уравнения складывается из решения соответствующего однородного и частного решения. Частное решение обычно ищется в виде правой части.

$$\begin{cases} \psi_1^{\text{частн}} = exp(3Mt)[Asin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)cos\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - B\sin^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)] \\ -Dexp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + 2q\omega_1^*t \\ \omega_1^{\text{частн}} = Gexp(3Mt)\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + Hexp(3Mt)cos\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \\ +Jexp(3Mt)\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) \end{cases} \quad (25)$$

Для того чтобы это выражение было решением первого уравнения, в (24) необходимо выбрать введенные коэффициенты в виде

$$\begin{cases} A = -\frac{7bC_1^2C_2M}{8b_1^2} \\ B = -\frac{bC_1^2C_2M}{64}, \\ D = \frac{8C_2(gM^2-q)}{3} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} G = 0{,}00956\frac{bC_1C_2^2M}{b_1^2} \\ J = -0{,}0198\frac{bC_1C_2^2M}{b_1^2}. \\ H = -0{,}0397\frac{bC_1C_2^2M}{b_1^2} \end{cases} \quad (27)$$

Тогда общее решение выражается следующим образом

$$\psi_1(x,t) = C_1exp(Mt)sin\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) - \\ exp(3Mt)[\frac{7bC_1^2C_2M}{8b_1^2}sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)cos\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - \frac{bC_1^2C_2M}{64}\sin^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)] - \\ \frac{8C_2(gM^2-q)}{3}exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + 2q\omega_1^*t, \quad (28)$$

$$\omega_1(x,t) = C_2 exp(Mt) sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) + 0{,}00956\frac{bC_1C_2^2M}{b_1^2}exp(3Mt)\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - 0{,}0397\frac{bC_1C_2^2M}{b_1^2}exp(3Mt)cos\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - 0{,}0198\frac{bC_1C_2^2M}{b_1^2}exp(3Mt)\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right). \quad (29)$$

Находим вторую производную от плотности вероятности

$$\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} = C_2 exp(Mt) sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) - \frac{bC_1C_2^2M}{b_1^2}exp(3Mt)\left[0{,}08896\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - 0{,}16\cdot cos\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + 0{,}0787\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)\right]. \quad (30)$$

Выберем из (28) только компоненты, явно связанные с временем и компоненты, связанные с интенсивностью по формуле (6). Подставляем теперь полученные компоненты в третье уравнение в (10)

$$y = \frac{b_1}{b} + \frac{1}{2}\left\{\frac{8C_2(gM^2-q)}{3}exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + 2q\omega_1^*t\right\}\{C_2exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{4b_1}}x\right) + \frac{bC_1C_2^2M}{b_1^2}exp(3Mt)[0{,}00956\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) - 0{,}0397cos\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right) + 0{,}0198\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)ch^2\left(\sqrt{\frac{M}{b_1}}x\right)]\}. \quad (31)$$

Заключение

Таким образом, оптимальное управление организационно-технической системой с учетом интенсивности приложения управляющих воздействий требует их возрастания пропорционально целевому значению и длительности управления (увеличению горизонта планирования). Возрастание во времени происходит по кубу экспоненты, то есть очень медленно вначале управления и очень резко в конце. Аналогичный характер возрастания демонстрирует зависимость управляющих воздействий от востребованности результата управления, но выражается она через гиперболические функции. Введение в функционал слагаемого пропорционального интенсивности приложения управляющих воздействий накладывает более жесткие ограничительные требования на расход управляющих ресурсов по сравнению с известными исследованиями. Это означает, что исследование задачи оптимального предиктивного управления организационно-технической системой по вероятностным критериям качества доказывает важность учета не только управленческих затрат, но и интенсивности их приложения.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Дьяконов Н.А., Логунова О.С. Системы управления технологическим процессом на основе предиктивной аналитики: проектирование. *Электротехнические системы и комплексы.* 2021;50(1):58–64.
2. Новиков Д.А. *Теория управления организационными системами.* 4-е изд., испр. и дополн. М.: ЛЕНАНД; 2022. 500 с.

3. Бурков В.Н., Ириков В.А. *Модели и методы управления организационными системами.* М.: Наука; 1994. 270 с.
4. Львович А.И., Преображенский А.П. Оптимизация ресурсного обеспечения при заданном горизонте планирования процесса развития организационной системы с использованием визуально-экспертного моделирования. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2022;10(3). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1231. DOI: 10.26102/2310-6018/2022.38.3.015.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука; 1977. 736 с.
6. Ахмедьянова Г.Ф., Пищухин А.М. *Основы многоуровневого управления в организационно-технических системах*. Оренбург: Оренбургский государственный университет; 2020. 162 с.
7. Pishchukhin A.M., Akhmedyanova G.F. Algorithms for synthesizing management solutions based on OLAP-technologies В сборнике: *International Conference Information Technologies in Business and Industry 2018 – Enterprise Information Systems, 17–20 January 2018, Tomsk, Russia.* Institute of Physics Publishing; 2018. p. 042001.
8. Земляков С.Д., Рутковский В.Ю. Функциональная управляемость и настраиваемость систем координатно-параметрического управления. *Автоматика и телемеханика.* 1986;(2):21–30.
9. Глумов В.М., Земляков С.Д., Рутковский В.Ю. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами: некоторые результаты и направления развития. *Автоматика и телемеханика.* 1999;(6):100–116.
10. Рутковский В.Ю., Земляков С.Д., Суханов В.М., Глумов В.М. Некоторые новые направления развития теории и применения адаптивного координатно-параметрического управления. *Проблемы управления.* 2003;(2):2–10.
11. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов. I. *Автоматика и телемеханика.* 1960;21(4):436–441.
12. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов. II. *Автоматика и телемеханика.* 1960;21(5):561–568.
13. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. III. *Автоматика и телемеханика.* 1960;21(6):661–665.
14. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов. IV. *Автоматика и телемеханика.* 1961;22(4):425–435.
15. Александров А.Г. *Оптимальные и адаптивные системы*. М.: Высшая школа; 1989. 263 с.
16. Ахмедьянова Г.Ф., Пищухин А.М. Оптимальное управление производственной системой на основе вероятностного критерия. *Вестник Череповецкого государственного университета.* 2022;110(5):7–19.
17. Пищухин А.М. Вероятностная модель согласования производственного процесса с региональным рынком. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки*. 2019;61(1):20–33.
18. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М.: Наука; 1969. 426 с.

19. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука; 1976. 576 с.

REFERENCES

1. Dyakonov N.A., Logunova O.S. Process control systems based on predictive analytics: design. *Elektrotekhnicheskie sistemy i kompleksy = Electrotechnical Systems and Complexes.* 2021;50(1):58–64. (In Russ.).
2. Novikov D.A. *Theory of management of organizational systems*. 4th ed., rev. and additional. Moscow, LENAND; 2022. 500 p. (In Russ.).
3. Burkov V.N., Irikov V.A. *Models and methods of organizational management systems*. Moscow, Science; 1994. 270 p. (In Russ.).
4. Lvovich A.I., Preobrazhensky A.P. Optimization of resource support at a given planning horizon of the organizational system development process using visual expert modeling. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology*. 2022;10(3). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1231 DOI: 10.26102/2310-6018/2022.38.3.015. (In Russ.).
5. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Science; 1977. 736 p. (In Russ.).
6. Akhmedyanova G.F., Pishchukhin A.M. *Fundamentals of multi-level management in organizational and technical systems*. Orenburg, Orenburg State University; 2020. 162 p. (In Russ.).
7. Pishchukhin A.M., Akhmedyanova G.F. Algorithms for synthesizing management solutions based on OLAP-technologies In: *International Conference Information Technologies in Business and Industry 2018 – Enterprise Information Systems, 17–20 January 2018, Tomsk, Russia*. Institute of Physics Publishing; 2018. p. 042001.
8. Zemlyakov S.D., Rutkovsky V.Yu. Functional controllability in adjustibility of coordinate-parametric control systems. *Avtomatika i Telemekhanika.* 1986;(2):21–30. (In Russ.).
9. Glumov V.M., Zemlyakov S.D., Rutkovsky V.Yu. Adaptive coordinate-parametric control for nonstationary plants: Certain results and development trends. *Avtomatika i Telemekhanika.* 1999;(6):100–116. (In Russ.).
10. Rutkovsky V.Yu., Zemlyakov S.D., Sukhanov V.M., Glumov V.M. New directions of adaptive coordinate-parametric control theory and applications. *Problemy upravleniya = Control Sciences.* 2003;(2):2–10. (In Russ.).
11. Letov A.M. Analytical design of controllers. I. *Avtomatika i Telemekhanika.* 1960;21(4):436–441. (In Russ.).
12. Letov A.M. Analytical design of controllers. II. *Avtomatika i Telemekhanika.* 1960;21(5):561–568. (In Russ.).
13. Letov A.M. Analytical design of controllers. III. *Avtomatika i Telemekhanika.* 1960;21(6):661–665. (In Russ.).
14. Letov A.M. Analytical design of controllers. IV. *Avtomatika i Telemekhanika.* 1961;22(4):425–435. (In Russ.).
15. Aleksandrov A.G. *Optimal and adaptive systems*. Moscow, Higher School; 1989. 263 p. (In Russ.).
16. Akhmedyanova G.F., Pishchukhin A.M. Optimal control of the production system based on a probabilistic criterion. *Vestnik Cherepovetskogo gosudarstvennogo universiteta = Cherepovets State University Bulletin.* 2022;110(5):7–19. (In Russ.).
17. Pishchukhin A.M. Probabilistic model of harmonization of the production process with the regional market. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta.*

Seriya: Tekhnicheskie nauki = Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series. 2019;61(1):20–33. (In Russ.).
18. Elsgolts L.E. *Differential equations and calculus of variations*. Moscow, Science; 1969. 426 p. (In Russ.).
19. Kamke E. *Handbook of Ordinary Differential Equations.* Moscow, Science; 1976. 576 p. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Ахмедьянова Гульнара Фазульяновна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры управления и информатики в технических системах, Оренбургского государственного университета, Оренбург, Российская Федерация.
e-mail: ahmedyanova@bk.ru
ORCID: 0000-0003-3284-7794

Gulnara F. Akhmedyanova, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Management and Informatics in Technical Systems, Orenburg State University, Orenburg, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 26.12.2023; одобрена после рецензирования 08.02.2024; принята к публикации 05.03.2024.

The article was submitted 26.12.2023; approved after reviewing 08.02.2024; accepted for publication 05.03.2024.