УДК 51.519.8
DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.009

Оптимальное управление боевыми действиями

Е.П. Белоусова✉

Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация

Резюме. В статье предложен метод решения задачи адаптации дискретной модели управления запасами к задаче о боевых действиях двух армий. Целью является идентификация управляющего воздействия на линейную систему разностных уравнений, позволяющего переводить ее из начального в конечное состояние в заданных параметрах при условии минимизации затрат. Дискретные управляемые процессы играют важную роль в теории и практике оптимального управления, поскольку многие задачи планирования описываются именно системами разностных уравнений. Для системы уравнений подобного вида характерен дискретный тип контроля количества боевых единиц на текущем этапе. Поставки формируются через фиксированные промежутки времени. Эффективность управления контролируется (верифицируется) квадратичным критерием качества, который характеризует затраты на проведение боевых действий. Критерий показывает суммарные расходы на поставки и содержание боевых единиц, изменение количества которых определяется тремя факторами: темпом потерь в результате боевых действий, естественными потерями и скоростью поступления подкреплений. Построение оптимального управляющего воздействия проводится методом обратной связи. Отмечается, что решение поставленной задачи усложняется тем фактом, что необходимо среди всех возможных решений найти такие, которые позволят реализовать поставленные цели с наименьшими затратами человеческих и материальных ресурсов. Эти затраты представлены как функции нескольких переменных, значения которых известны в начальный момент времени. В статье обосновано, что для решения задачи оптимального управления ресурсами применительно к случаю боевых действий двух армий метод обратной связи является наиболее предпочтительным. Разобрано несколько примеров. Реализация метода обратной связи наглядно показывает, что более длительный промежуток противостояния заметно снижает потери. Материалы статьи представляют практическую ценность для стратегического планирования в условиях военных конфликтов.

Ключевые слова: оптимальное управление, дискретная система, принцип обратной связи, боевые действия, управляющее воздействие.

Для цитирования: Белоусова Е.П. Оптимальное управление боевыми действиями. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2024;12(1). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1511 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.009

Optimal management of combat

E.P. Belousova✉

Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation

Abstract. The article proposes a method for solving the problem of adapting a discrete inventory management model to the problem of combat operations of two armies. The aim is to identify the control effect on the linear system of difference equations, which allows it to be transferred from the initial to the final state in the specified parameters provided that costs are minimized. Discrete controlled processes play an important role in the theory and practice of optimal control since many planning tasks are described precisely by systems of difference equations. A system of equations of this type is characterized by a discrete type of control of the number of combat units at the current stage. Deliveries are formed at fixed intervals. The effectiveness of management is controlled (verified) by a quadratic quality criterion, which characterizes the cost of conducting combat operations. The criterion shows the

total cost of supplies and maintenance of combat units, the change in the number of which is determined by three factors: the rate of losses as a result of hostilities, natural losses and the rate of receipt of reinforcements. The construction of an optimal control effect is carried out by the feedback method.
It is noted that the solving this task is complicated by the fact that it is necessary to find among all possible solutions those that will make it possible to achieve your goals with the least expenditure of human and material resources. These costs are presented as functions of several variables, the values of which are known at the initial time. The article proves that in order to solve the problem of optimal resource management in relation to the case of combat operations of two armies, the feedback method is the most preferable. Several examples have been analyzed. The implementation of the feedback method clearly shows that a longer period of confrontation significantly reduces losses. The materials of the article are of practical value for strategic planning in the context of military conflicts.

Keywords: optimal control, discrete system, feedback principle, combat operations, control influence.

For citation: Belousova E.P. Optimal management of combat. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2024;12(1). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1511 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.009 (In Russ.).

Введение

Рассмотрим дискретную модель, описывающую боевые действия двух армий. Общую постановку задачи можно найти в [1-3]. Главной характеристикой соперников является их численность в текущий момент времени, $x_1(k) \geq 0$ и $x_2(k) \geq 0$ соответственно. Во время сражений между армиями изменение количества боевых единиц характеризуется тремя факторами:

1. Темпом потерь, обусловленных боевыми действиями противоборствующих сторон, который зависит от качества тактики и вооружений.
2. Скоростью уменьшения состава из-за причин, непосредственно не связанных с боевыми действиями (неисправность техники, болезни, травмы, дезертирство).
3. Скоростью поступления подкреплений, которая зависит от момента времени *k,* и в дальнейшем трактуется как управляющее воздействие.

С учетом этих факторов динамику изменения представим следующей системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_1(k+1) - x_1(k) = -\alpha_1 x_1(k) - \beta_2 x_2(k) + \gamma_1(k) \\ x_2(k+1) - x_2(k) = -\alpha_2 x_2(k) - \beta_1 x_1(k) + \gamma_2(k), \end{cases} \tag{1}$$

$$(k = 0,1,..., N-1),$$
$$\gamma_1(k) = \xi_1 u(k),\ \gamma_2(k) = \xi_2 u(k).$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ – коэффициенты, которые описывают темпы потерь боевых единиц из-за причин, не связанных с действиями соперника;

$\beta_1, \beta_2 \geq 0$ – скорости потерь армий во время боевых действий;

$\xi_1, \xi_2 \geq 0$ – скорости изменения численности соперника за счет поступления подкреплений.

Для решения системы разностных уравнений (1) зададим начальные условия x_0 для момента времени $k = k_0$ и конечные x_1 для момента времени $k = N$ и проведем исследование требований, обеспечивающих определение оптимальной управляющей функции u^0(k).

$$x(k_0) \equiv x_0 = \begin{bmatrix} x_1(k_0) \\ x_2(k_0) \end{bmatrix}, \quad x(N) \equiv x_1 = \begin{bmatrix} x_1(N) \\ x_2(N) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Материалы и методы

Приведем сначала общий вид системы разностных уравнений. А именно

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ k = k_0,\ k_0+1,\dots,\ N-1, \tag{3}$$

в которой x – n-мерный вектор фазовых координат, u – m-мерный вектор управляющих сил, $A_{n\times n}$ и $B_{n\times m}$ – постоянные матрицы. Система (3) будет вполне управляема, если справедливо утверждение 1.

Утверждение 1. Для того чтобы система (3) была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $[B, AB, A^2B,\dots, A^{n-1}B]$ был равен n [4-7].

При заданных $k = k_0$, $k = N$ и значениях (2) необходимо построить управляющую функцию $u^0(k)$ таким образом, чтобы система приняла интересующее нас состояние x_1. Управляющее воздействие $u^0(k)$ выстраивается таким образом, чтобы было справедливо неравенство

$$I[u^0] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^{0T}[k]u^0[k] \le I[u] = \sum_{k=k_0}^{N-1} u^T[k]u[k]. \tag{4}$$

Введем дополнительные величины:

$$c(k_0, x_0) = x_1 - A^{N-k_0}x_0,\ S(k) = A^{N-k-1}B,\ (k_0 \le k \le N-1),$$
$$H^{(k_0)} = [S(k_0), S(k_0+1),\dots, S(N-1)], \tag{5}$$

где матрица $H^{(k_0)}$ имеет размерность $n\times(m\cdot(N - k_0))$. Предположим, кроме того, что значения x_0, x_1 и момент времени k_0 таковы, что выполняются утверждения 2, 3.

Утверждение 2. Вектор $c(k_0, x_0)$ принадлежит подпространству, натянутому на линейно независимые столбцы матрицы $H^{(k_0)}$ (заметим, что данное условие равносильно требованию полной управляемости системы (3)).

Утверждение 3. Для того чтобы управления $\{u(k_0), u(k_0+1),\dots, u(N-1)\}$ переводили систему (3) из состояния $x(k_0) = x_0$ в состояние $x(N) = x_1$, необходимо и достаточно, чтобы векторы $u(k_0), u(k_0+1),\dots, u(N-1)$ удовлетворяли соотношению

$$\sum_{k=k_0}^{N-1} S(k)u(k) = c(k_0, x_o)\cdot \tag{6}$$

Зададим вектор

$$u^{(k_0)} = \begin{bmatrix} u(k_0) \\ u(k_0+1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix} \tag{7}$$

и перепишем соотношение (6) в форме следующего уравнения:

$$H^{(k_0)}u^{(k_o)} = c(k_0, x_0)\,. \tag{8}$$

Поскольку решение задачи (3) равносильно решению уравнения (8) при выполнении условий (4), используем метод обратной связи. Для этого введем в рассмотрение псевдообратную матрицу $H^{+(k_0)}$ [2] по правилу

$$H^{+(k_0)} = H^{T(k_0)}[H^{(k_0)}H^{T(k_0)}]^{+}\,.$$

Тогда имеет место представление

$$D(k_0) = H^{(k_0)}H^{T(k_0)} = \sum_{k=k_0}^{N-1} S(k)S^{T}(k)\,, \tag{9}$$

в котором $D(k_0)$ – симметрическая, неотрицательно определенная матрица размерности *(n × n)*. В таком случае, согласно [7], можно определить еще одну вспомогательную матрицу

$$D^{+}(k_0) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} \upsilon_i \upsilon_i^{T}\,,$$

в которой $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ – собственные значения матрицы D(k_0), а υ_1, υ_2,..., υ_r – ее собственные векторы. Тогда имеет место равенство

$$H^{+(k_0)} = H^{T(k_0)}D^{+}(k_0). \tag{10}$$

В указанных обозначениях нормальное псевдорешение уравнения (8) представимо в виде

$$u^{0(k_0)} = H^{+(k_0)}c(k_0, x_0)$$

или

$$u^{0(k_0)} = H^{T(k_0)}D^{+}(k_0)c(k_0, x_0)\,. \tag{11}$$

Заметим, что относительно неизвестных $u_1(k_0), u_2(k_0), \ldots, u_m(k_0)$, $u_1(k_0+1)$, $u_2(k_0+1), \ldots$, $u_m(k_0+1)$, $u_1(N-1)$, $u_2(N-1), \ldots$, $u_m(N-1)$ выражение (8) представляет собой систему из n уравнений. При этом функция $u^{0(k_0)}$, определяемая равенством (11), совпадает с решением системы (8) с минимальной нормой разности в случае, если система совместна и с нормальным псевдорешением, если система несовместна. Взяв *k*-ю компоненту вектора $u^{0(k_0)}$, построим оптимальное управление на *k*-м шаге $(k_0 \leq k \leq N-1)$ в виде

$$u^{0}(k) = S^{T}(k)D^{+}(k_0)c(k_0, x_0)\,,$$
$$(k = k_0, k_0+1, \ldots, N-1)\,. \tag{12}$$

Будем записывать его как $u^{0}(k) = u^{0}(k; k_0, x_0)$. Введем еще некоторые полезные обозначения. А именно:

$$c(k) = c(k, x(k)) = x_1 - A^{N-k} x(k) \tag{13}$$

и

$$D(k) = \sum_{i=k}^{N-1} S(i) S^T(i). \tag{14}$$

Правую часть равенства (12) рассмотрим как функцию переменных $k_0 = k$ и $x_0 = x(k)$. С использованием принципа обратной связи [8-10] определим оптимальную управляющую функцию

$$u^0[k, x(k)] = u^0[k; k, x(k)] = S^T(k) D^+(k) c(k)$$
$$k = k_0, k_0 + 1, ..., N-1. \tag{15}$$

Определение управляющей функции, в соответствии с (15), является решением поставленной задачи.

Результаты

Проиллюстрируем решение задачи на конкретных примерах.

Пример 1. Пусть количество противоборствующих сторон *n=2*, количество источников подкрепления для каждой из сторон *m=1*, количество рассматриваемых периодов времени (месяцев) *N=10*. Исходное состояние системы $x(k_0) = x_0 = (5000, 5000)$, конечное состояние системы $x(N) = x_1 = (5000, 1000)$. Коэффициенты, формирующие матрицу *A*: α_1 = 0,1, α_2 = 0,05, β_1 = 0,2, β_2 = 0,3.

Матрица *A*, которая хранит в себе информацию о скорости снижения численностей армий, в данном случае имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,3 \\ -0,2 & 0,95 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, определим матрицу *B,* отвечающую за скорость поступления подкреплений:

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить:

1) оптимальное управление $u(k)$, доставляющее минимум критерию качества;

2) величины подкреплений в каждый из рассматриваемых периодов, такие, чтобы система перешла из начального состояния x_0 в конечное x_1.

Получили:

```
x1[k0] = 5000
x2[k0] = 5000
u[k0] = {2425}

x1[k1] = {5425}
x2[k1] = {4962}
u[k1] = {2083}

x1[k2] = {5476}
x2[k2] = {4671}
u[k2] = {1797}

x1[k3] = {5325}
x2[k3] = {4240}
u[k3] = {1562}

x1[k4] = {5082}
x2[k4] = {3745}
u[k4] = {1375}

x1[k5] = {4825}
x2[k5] = {3228}
u[k5] = {1234}

x1[k6] = {4608}
x2[k6] = {2719}
u[k6] = {1142}

x1[k7] = {4473}
x2[k7] = {2232}
u[k7] = {1105}

x1[k8] = {4462}
x2[k8] = {1779}
u[k8] = {1136}

x1[k9] = {4618}
x2[k9] = {1365}
u[k9] = {1253}

x1[k10] = {5000}
x2[k10] = {1000}

Критерий качества: {2.46855×10^7}
```

Рисунок 1 – Результаты численного эксперимента
Figure 1 – Numerical experiment results

Пример 2. Количество противоборствующих сторон *n=2*, количество источников подкрепления для каждой из сторон *m=1*, количество рассматриваемых периодов времени (месяцев) *N=5*. Исходное состояние системы $x(k_0) = x_0 = (10653, 9134)$, конечное состояние системы $x(N) = x_1 = (5000, 2000)$. Коэффициенты, образующие матрицу А: $\alpha_1 = 0{,}125$, $\alpha_2 = 0{,}51$, $\beta_1 = 0{,}1$, $\beta_2 = 0{,}31$.

Матрица А имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}875 & -0{,}31 \\ -0{,}1 & 0{,}49 \end{bmatrix}.$$

Матрица В, отвечающая за скорость поступления подкреплений, представляет собой следующий вектор:

$$B = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}25 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить:

1) оптимальное управление $u(k)$, доставляющее минимум критерию качества;

2) величины подкреплений в каждый из рассматриваемых периодов, такие, чтобы система перешла из начального состояния x_0 в конечное x_1.

Получили:

```
x1[k0] = 5000
x2[k0] = 5000
u[k0] = {2425}

x1[k1] = {5425}
x2[k1] = {4962}
u[k1] = {2083}

x1[k2] = {5476}
x2[k2] = {4671}
u[k2] = {1797}

x1[k3] = {5325}
x2[k3] = {4240}
u[k3] = {1562}

x1[k4] = {5082}
x2[k4] = {3745}
u[k4] = {1375}

x1[k5] = {4825}
x2[k5] = {3228}
u[k5] = {1234}

x1[k6] = {4608}
x2[k6] = {2719}
u[k6] = {1142}

x1[k7] = {4473}
x2[k7] = {2232}
u[k7] = {1105}

x1[k8] = {4462}
x2[k8] = {1779}
u[k8] = {1136}

x1[k9] = {4618}
x2[k9] = {1365}
u[k9] = {1253}

x1[k10] = {5000}
x2[k10] = {1000}
```

Критерий качества: $\{2.46855\times10^{7}\}$

Рисунок 2 – Результаты численного эксперимента
Figure 2 – Numerical experiment results

Отметим, что решения в точности не совпадают с конечным вектором и являются лишь приближением к состоянию x_1. Очевидно, что в реальных задачах придется пожертвовать минимальным значением критерия качества при найденных $u(k)$ в пользу целочисленных элементов векторов $x(k)$.

Обсуждение

Результаты численного эксперимента дают основание полагать, что метод обратной связи, выбранный для решения данной оптимизационной задачи, является весьма эффективным. Он применим только для систем, в которых пополнение и расход ресурсов происходит через определенные фиксированные промежутки времени, и позволяет сконструировать управляющее воздействие, сводящее все возможные затраты к минимуму.

Заключение

Изложенный в статье способ управления боевыми действиями может быть рекомендован в качестве рабочего инструмента специалистам, которые занимаются стратегическим планированием в условиях военного противостояния.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Сазанова Л.А. Дискретная модель управления запасами как задача оптимального управления. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Экономика и управление.* 2017;3:184–187.

2. Альбрехт Э.Г., Сазанова Л.А. Синтез оптимального управления в линейных дискретных системах. *Труды института математики и механики УрО РАН*. 2000;6(1-2):477–296.
3. Калман Р.Е. Об общей теории управления. *Тр. I Междунар. Конгр. по автомат, упр.* 1961;2:56–62.
4. Надеждин П.В. О свойствах оптимальных и линейных импульсных систем. *Изв. АН СССР, Техн. Кибернетика.* 1964;4:104–112.
5. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М.: Гостехтеоретиздат; 1953. 581 с.
6. Лоусон Ч., Хенсон Р. *Численное решение задач метода наименьших квадратов.* М.: Наука; 1986. 232 с.
7. Воеводин В.В. *Линейная алгебра.* М.: Наука; 1980. 400 с.
8. Пропой А.И. *Элементы теории оптимальных дискретных процессов.* М.: Наука; 1973. 256 с.
9. Просветов Г.И. *Управление запасами: задачи и решения: учеб.-практ. пособие*. М.: Альфа-Пресс; 2009. 192 с.
10. La Salle J.P. *The stability and control of discrete processes*. *Applied Mathematical Sciences*. 1986;62:150.

REFERENCES

1. Sazanova, L.A. A discrete model of inventory management as an optimal management problem. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika i upravlenie=Bulletin of the Voronezh State University. Series: Economics and Management*. 2017;3:184–187. (In Russ.).
2. Albrecht E.G., Sazanova L.A. Synthesis of optimal control in linear discrete systems. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN=Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*. 2000;6(1-2):477–296. (In Russ.).
3. Kalman P.E. On the general theory of control. *Tr. I Mezhdunar. Kongr. po avtomat, upr.* Moscow, Publishing House of the USSR Academy of Sciences. 1961;2:56–62. (In Russ.).
4. Nadezhdin P.V. On the properties of optimal and linear pulse systems. *Izv. of the USSR Academy of Sciences, Tech. Cybernetics.* 1964;4:104–112. (In Russ.).
5. Gantmacher F.R. *Theory of matrices.* Moscow, Gostechteoretizdat; 1953. 581 p. (In Russ.).
6. Lawson Ch., Anson P. *Numerical comparison of the results of the method of nominal graphs*. Moscow, Nauka; 1986. 232 p. (In Russ.).
7. Voevodin V.V. *Linear algebra.* Moscow, Nauka; 1980. 400 p. (In Russ.).
8. Propoy A.I. *Elements of the theory of optimal discrete processes.* Moscow, Nauka; 1973. 256 p. (In Russ.).
9. Prosvetov G.I. *Inventory management: tasks and solutions: a textbook-practice*. Moscow, Alfa-Press; 2009. 192 p. (In Russ.).
10. La Salle J.P. The stability and control of discrete processes. *Applied Mathematical Sciences*. 1986;62:150.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Белоусова Елена Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры системного анализа и управления, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: e.p.belousova@gmail.com

Elena P. Belousova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of System Analysis and Management, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 24.01.2024; одобрена после рецензирования 08.02.2024; принята к публикации 13.02.2024.

The article was submitted 24.01.2024; approved after reviewing 08.02.2024; accepted for publication 13.02.2024.