

УДК 519.6

DOI: [10.26102/2310-6018/2024.44.1.028](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2024.44.1.028)

Численные методы решения математических моделей распределения температуры полосы и валков при горячей прокатке с интервальными параметрами

М.Р. Дабас✉, П.В. Сараев

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Российская Федерация

Резюме. В статье рассматривается задача распределения температуры в полосе и рабочих валках в процессе горячей прокатки в условиях неопределенности входных параметров. Рассматривается зона очага деформации с образованием на поверхности полосы прокатной окалины, вследствие чего в рассматриваемой области очага деформации решается система из уравнений теплопроводности с различными начальными и краевыми условиями. Далее рассматривается зона межклетевого промежутка, где происходит теплообмен полосы с окружающей средой. Во всех зонах входные параметры представлены в виде интервальных чисел. Зона очага деформации и межклетевой промежуток были дискретизированы из непрерывной области в сеточную с помощью конечно-разностной аппроксимации выведены системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональными интервальными матрицами коэффициентов, приведен метод встречной прогонки с интервальными коэффициентами для решения полученных систем. В статье рассмотрены результаты расчетов для 7 клетей, идущих друг за другом и состоящих из очага деформации и межклетевого промежутка, для случая с вещественными входными параметрами и для случая с интервальными входными параметрами, расчеты произведены с помощью разработанного программного обеспечения для обоих случаев.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, метод встречной прогонки, интервальная арифметика, горячая прокатка, конечно-разностная аппроксимация.

Для цитирования: Дабас М.Р., Сараев П.В. Численные методы для решения математических моделей распределения температуры полосы и валков при горячей прокатке. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2024;12(1). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1528> DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.028

Numerical methods for solving mathematical models of the temperature distribution of strips and rolls during hot rolling with interval parameters

M.D. Dabas✉, P.V. Saraev

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation

Abstract. The article considers the problem of temperature distribution in the strip and working rolls during hot rolling under the conditions of uncertainty of input parameters. The zone of the deformation gap with the formation of a rolling scale strip on the surface is regarded, as a result of which a system of thermal conductivity equations with different initial and boundary conditions is solved in the area of the deformation gap being studied. Next, the zone of the interstand gap is considered, where the heat exchange of the strip with the environment occurs. In all zones, the input parameters are represented as interval numbers. The deformation gap and the interstand gap were discretized from a continuous region into a grid one, systems of linear algebraic equations with tridiagonal interval coefficient matrices were derived using finite difference approximation, and a counter-run method with interval coefficients was presented to solve the obtained systems. The article considers the calculation results for 7 stands running one after another and consisting of a deformation gap and an interstand gap for the case with real input

parameters and for the case with interval input parameters, calculations were performed using the developed software for both cases.

Keywords: equation of thermal conductivity, two-sided Thomas algorithm, interval arithmetic, hot rolling, finite difference approximation.

For citation: Dabas M.R., Saraev P.V. Numerical methods for solving mathematical models of the temperature distribution of strips and rolls during hot rolling with interval parameters. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2024;12(1). URL: <https://moitvivr.ru/ru/journal/pdf?id=1528> DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.028 (In Russ.).

Введение

Металлургия является основой для производства и использования различных металлических материалов, таких как сталь, алюминий, медь и т. д. Эти материалы являются неотъемлемой частью многих отраслей промышленности, включая строительство, автомобильную отрасль, энергетическую, аэрокосмическую, электронную и другие. Metallurgy обеспечивает производство и поставку металлических материалов, необходимых для создания различных продуктов и инфраструктуры. Множество исследований и разработок в области металлургии направлены на улучшение свойств металлов, разработку новых сплавов и материалов с определенными характеристиками, такими как прочность, стойкость к коррозии, теплопроводность и другие. Это позволяет создавать более эффективные и инновационные продукты и технологии в различных отраслях. Одним из процессов получения стали необходимой толщины является горячая прокатка. Знание температуры стали при горячей прокатке является важным для обеспечения оптимального процесса, качества продукции и экономической эффективности по нескольким причинам. Во-первых, температура играет ключевую роль в горячей прокатке стали, так как она влияет на механические свойства и структуру металла [1]. Знание температуры позволяет контролировать процесс прокатки и достичь требуемых характеристик и качества прокатываемого металла. Во-вторых, поддержка оптимальной температуры позволяет предотвратить деформации и трещины в металле при прокатке. Неправильная температура может привести к неравномерному прокатыванию, появлению внутренних напряжений и дефектов, что может снизить прочность и качество прокатываемого металла, может привести к выходу из строя оборудования, что приведет к финансовым и материальным затратам.

Однако не всегда можно узнать, какая температура в том или ином месте стали, процесс получения горячего проката происходит на очень высоких температурах, и узнать распределение температур в конкретной точке или месте стана не представляется возможным. Вследствие чего становятся актуальными задачи нахождения распределения температур в полосе и валках. Кроме того, не всегда можно точно задать какие-либо входные параметры. Возникновение неопределенности в данных может быть вызвано несколькими факторами. Это могут быть измерительные ошибки, например, при измерении температуры или других параметров, что может быть связано с неточностью используемых приборов, влиянием внешних условий (например, шум, вибрации) или человеческим фактором. На процесс также влияет вариативность параметров, например, температура проката может меняться из-за колебаний температур окружающей среды. Неопределенность в данных является неизбежным фактором, поэтому важно ее учитывать при моделировании температур в различных процессах. В данной статье рассматривается моделирование температуры в части стана горячей прокатки, где происходит финальное раскатывание стали, с учетом интервальных входных параметров.

Материалы и методы

Рассматривается деформация стальной полосы в очаге деформации при горячей прокатке, схематично область можно представить, как на Рисунке 1.

Для моделирования температуры полосы и рабочего вала с учетом интервальных входных параметров в очаге деформации предложена система (1) из уравнений теплопроводности [2] в полярных координатах с начальными и краевыми условиями. Подробно эта математическая модель рассмотрена в [3].

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - a_{wr} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, r \in [0, R], \varphi \in [0, \varphi_{max}] \\ \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - a_{sc} \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} = 0, r \in [R, R + \delta_{sc}], \varphi \in [0, \varphi_{max}] \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} - a_s \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0, r \in [R + \delta_{sc}, r_{max}(\varphi)], \varphi \in [0, \varphi_{max}] \end{cases}, \quad (1)$$

где u – температура вала в интервальных значениях, a_{wr} , a_s , a_{sc} – коэффициент температуропроводности вала, полосы и окалины соответственно, R – радиус вала, φ_{max} – угол рассматриваемой области, ω – температура окалины в интервальных значениях, δ_{sc} – толщина окалины, v – температура полосы в интервальных значениях, $r_{max}(\varphi)$ – рассматриваемая длина полосы. Далее жирным шрифтом выделены интервальные параметры вида [4]

$$x = \{[\underline{x}, \bar{x}]: \underline{x} < x < \bar{x}\}.$$

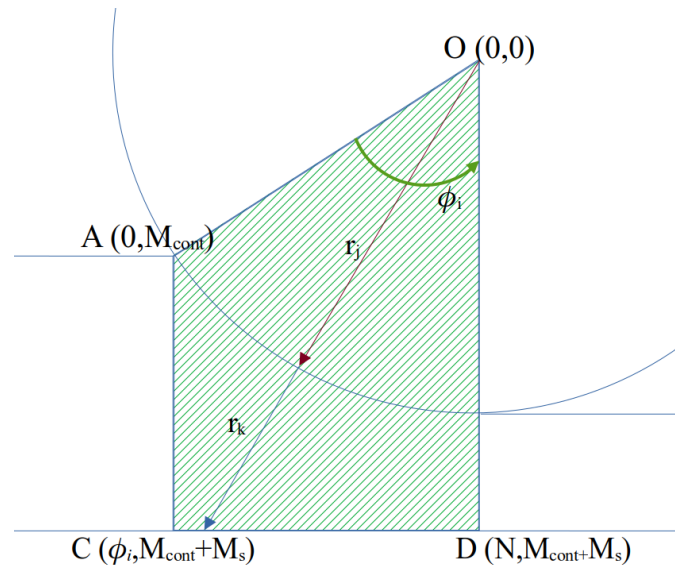


Рисунок 1 – Схема очага деформации (в полярных координатах)
Figure 1 – Diagram of the deformation gap (in polar coordinates)

Для получения численного решения, рассматривая область на Рисунке 1, была дискретизирована [5] с шагом по углу φ , по радиусу вала R , по толщине полосы. Таким образом, очаг деформации рассматривается в виде прямоугольника (Рисунок 2). Здесь слева середина вала (точка O), в точке M_{cont} валок заканчивается и соприкасается с полосой, далее до $M_{cont} + M_s$ представлена полоса. По правой границе количество точек разное, т. к. рассматриваем область AC и CD .

Набор значений по толщине в рассматриваемой области $r_j + r_k$ при разных значениях угла φ имеет разные значения вследствие деформации полосы.

$$\begin{aligned} \phi_i &= i \cdot \theta, i = 0, \dots, N, \\ r_j &= j \cdot h, j = 0, \dots, M_{cont}, \\ r_k &= k \cdot h_s, k = 0, \dots, M_s - 1, \end{aligned}$$

где θ – шаг по углу, h – шаг по радиусу валка, h_s – шаг по полосе, N – количество точек по углу, M_{cont} – последняя точка валка, M_s – максимальное количество точек по полосе.

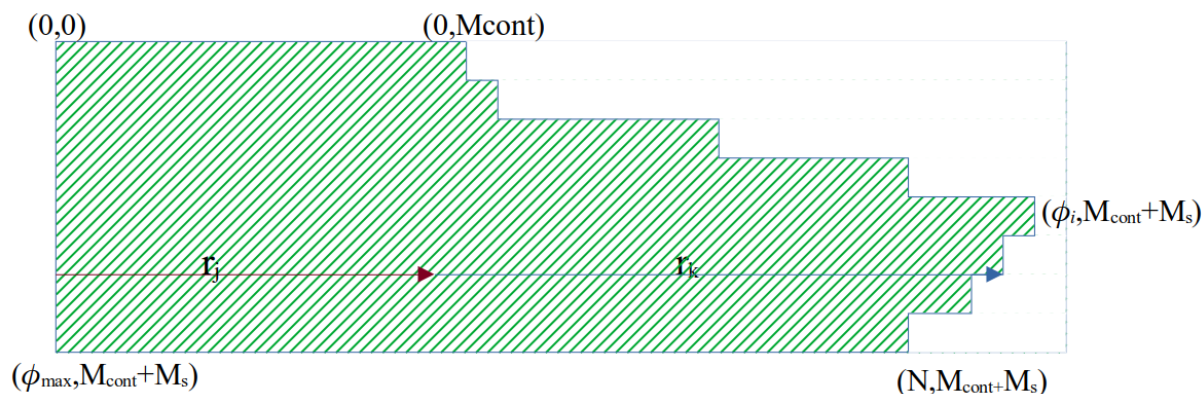


Рисунок 2 – Схема очага деформации в прямоугольной системе координат для численного решения задачи (1)

Figure 2 – Scheme of the deformation gap in a rectangular coordinate system for the numerical solution of the problem (1)

Для уравнения (1) с помощью конечно-разностной аппроксимации были выведены системы линейных алгебраических уравнений с интервальными параметрами для вычисления температур в $(i+1)$ -го слое

$$Ax = b. \quad (2)$$

Здесь A – матрица коэффициентов перед неизвестными в правой части, x – искомые значения температур в $(i + 1)$ слое, b – вектор правых частей уравнения. Подробнее эти матрицы представлены в работе [3].

После очага деформации моделируется межклетевой промежуток, на котором полоса охлаждается вследствие взаимодействия с окружающей средой (воздухом, водой). Для этого промежутка также была предложена математическая модель на основе уравнения теплопроводности с начальными и краевыми условиями, учитывающая входные интервальные параметры. Задача является симметричной, полоса будет рассматриваться до середины по толщине d . Таким образом, уравнение примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a_s \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, y \in \left[0, \frac{d}{2}\right], t \in [0, t_{max}]. \quad (3)$$

Краевые и начальные условия для вещественных и интервальных входных параметров более подробно рассмотрены в [6, 7]. Дискретизированная область с шагом τ по времени (N_t – количество точек по времени) и с шагом h_y по толщине полосы (M_y – количество точек по толщине полосы) представлена на Рисунке 3.

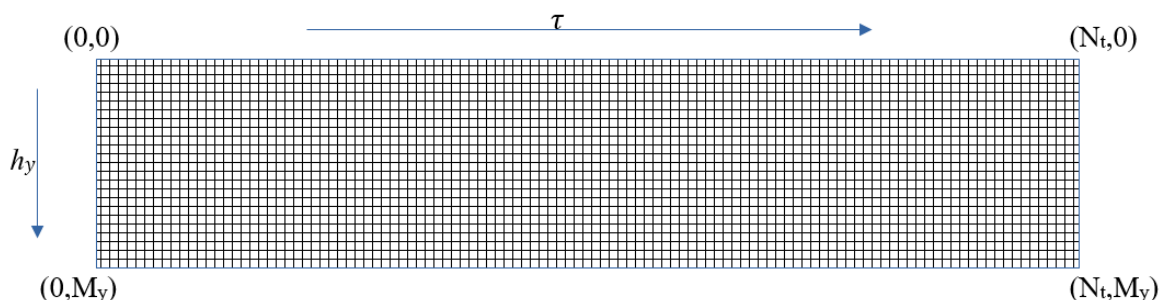


Рисунок 3 – Схема межклеточного промежутка для численного решения распределения температуры в полосе

Figure 3 – Scheme of the interstand gap for the numerical solution of the temperature distribution in the strip

Для перехода от непрерывной задачи к дискретной был применен (аналогично задаче (1)) шаблон для неявной конечно-разностной схемы для уравнения (3) и его начальных и краевых условий. В результате была получена система линейных алгебраических уравнений относительно v_j^{i+1} , где $j = 0, \dots, M_y, i = 0, \dots, N_t$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\tau a_s}{h_y^2} & \frac{-\lambda_s}{\lambda_s + h_y \alpha_{conv} + h_y \alpha_{rad}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\tau a_s}{h_y^2} & -\frac{\tau a_s}{h_y^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\tau a_s}{h_y^2} & 1 + \frac{2\tau a_s}{h_y^2} & -\frac{\tau a_s}{h_y^2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$$b = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{conv} h_y T_c + \alpha_{rad} h_y T_{eq0}}{\lambda_s + h_y \alpha_{conv} + h_y \alpha_{rad}}, j = 0 \\ v_j^i, j = 1, \dots, M_y - 1 \\ 0, j = M_y \end{pmatrix}.$$

Здесь A – матрица коэффициентов перед неизвестными в правой части, x – искомые значения температуры полосы v на $(i + 1)$ слое, b – вектор правых частей уравнения, λ_s – коэффициент теплопроводности стали, α_{conv} – коэффициент конвективного теплообмена, α_{rad} – коэффициент теплообмена излучением, h_y – шаг по толщине, τ – шаг по времени, T_c – температура окружающей среды, T_{eq0} – температура крыши, M_y – количество точек по толщине.

Матрица коэффициентов для численного решения задачи (1) и матрица (4) являются трехдиагональными матрицами т. е. матрицами, все элементы которых, не лежащие на главной и двух побочных диагоналях, равны 0. Пусть элементы вектора b обозначаются как (r_0, \dots, r_n) , а матрицы A представляются в виде

$$A = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 \\ -d_1 & c_1 & -b_1 & \dots & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & c_2 & & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & 0 & 0 & 0 & & c_{n-2} & -b_{n-2} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & -d_{n-1} & c_{n-1} & -b_{n-1} \\ & 0 & 0 & 0 & & 0 & -d_n & c_n \end{pmatrix}.$$

Тогда коэффициенты для встречного метода прогонки с интервальными значениями запишутся в виде

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - d_i \alpha_i}, i = 1, 2, \dots, m-1, \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0},$$

$$\beta_{i+1} = \frac{r_i + d_i \beta_i}{c_i - d_i \alpha_i}, i = 1, 2, \dots, m-1, \alpha_1 = \frac{r_0}{c_0},$$

$$\gamma_i = \frac{d_i}{c_i - b_i \gamma_{i+1}}, i = n-1, n-2, \dots, m, \gamma_n = \frac{d_n}{c_n},$$

$$\eta_i = \frac{r_i + b_i \eta_{i+1}}{c_i - b_i \gamma_{i+1}}, i = n-1, n-2, \dots, m, \eta_1 = \frac{r_n}{c_n}.$$

Решения x для нахождения температур полосы, окарины, валка в задачах (1) и (3) находятся по формулам

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i, i = m-1, m-2, \dots, 0,$$

$$x_{i+1} = \gamma_{i+1} x_i + \eta_{i+1}, i = m, m+1, \dots, n-1,$$

$$x_m = \frac{\eta_m + \gamma_m \beta_m}{1 - \gamma_m \alpha_m}.$$

Результаты

Для получения численного решения используется программное обеспечение, структура которого рассмотрена в работе [8, 9]. Интервальными входными параметрами для текущих исследований были выбраны:

- начальная температура полосы,
- начальная температура валка,
- температура крыши (для теплового потока на межклетевом промежутке),
- температура окружающей среды (для теплового потока на межклетевом промежутке),
- степень черноты окружающей среды (в межклетевом промежутке присутствует пар, что влияет на данный параметр).

Результаты сравнения численных решений в интервальных и вещественных числах представлены в работе [9], адаптация модели в вещественных числах – в работе [10]. Поскольку интервальные решения включают в себя вещественные значения, это показывает, что получившиеся интервальные модели подходят для моделирования данного процесса. Благодаря данной модели можно узнать диапазон температур полосы в чистовой группе клеток, проследить зависимость модели от конкретного параметра. Одним из критериев эффективности численного интервального решения по сравнению с вещественным является время расчетов. Несомненно, для выполнения операций интервальной арифметики требуется больше времени, чем на операции в вещественных значениях, однако разница не столь существенна, а численное интервальное решение дает нам сразу учет всех возможных параметров. Чтобы учесть неопределенность во входных параметрах при использовании численного решения в вещественных значениях необходимо произвести расчеты для нижних и верхних границ всех таких параметров. Соответственно, затраченное на расчет время возрастает пропорционально количеству параметров. С учетом этого были проведены расчеты с вещественными и интервальными входными параметрами. Для небольшого количества точек ($N = 500, M_{cont} = 500, M_s = 500, N_t = 500$) с учетом интервальных входных параметров было затрачено в среднем 10,1 секунды, а с учетом вещественных входных данных для 1 расчета затрачено 5,1 секунды. Соответственно в этом случае для перебора всех вариантов понадобилась

бы 51 секунда. При увеличении количества точек, например, ($N = 1000$, $M_{cont} = 2000$, $M_s = 2000$, $N_t = 1000$) временная разница между 1 расчетом уже была меньше, чем в два раза. Численное решение с интервальными параметрами было посчитано в среднем за 17,1 секунды, а с вещественными параметрами – в среднем за 12,3 секунды (соответственно для учета всей неопределенности понадобилось бы 123 секунды). Эти расчеты производились для 1 полосы, однако зачастую требуется рассчитывать несколько различных или однотипных полос, следующих друг за другом, что еще больше увеличивает время расчетов.

Заключение

Рассмотрена задача распределения температуры в полосе и рабочих валках в процессе горячей прокатки в очаге деформации и межклетевом промежутке с учетом неопределенности входных параметров. Представлено численное решение полученных моделей в виде систем линейных алгебраических уравнений, которые решаются методом встречной прогонки с интервальными коэффициентами. Рассмотрены интервальные входные параметры и приведено описание эффективности интервального решения за счет одновременного учета всех возможных значений входных параметров.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Пименов В.А., Погодаев А.К., Ковалев Д.А. Влияние тепловых режимов горячей прокатки на образование дефектов поверхности холоднокатаного листа. *Производство проката*. 2018;12;8–14.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Главиздат; 1953. 660 с.
3. Дабас М.Р., Сараев П.В. Моделирование температурного режима полосы и вала в клетях стана горячей прокатки с интервальными параметрами. *Управление большими системами*. Выпуск 107. М.: ИПУ РАН, 2024. с. 107–120. DOI: 10.25728/ubs.2024.107.6
4. Шарый С.П. *Конечномерный интервальный анализ*. Новосибирск: XYZ; 2021. 650 с.
5. Вержбицкий В.М. *Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: Изд-во «Высшая школа»; 2001. 382 с.
6. Dabas M., Saraev P. Modeling of temperature strip with interval parameters in interstand gap in hot rolling. *2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. 2021;3;749–751.
7. Дабас М.Р. Математическое моделирование теплового режима полосы на межклетевом промежутке при горячей прокатке. *Сборник материалов Шестнадцатой Всероссийской научно-практической конференции студентов и аспирантов*. 2019;258–260.
8. Oreshina M, Pimenov P., Dabas M. Interactive training model of the thermal mode for a hot rolling mill. *2021 1st International Conference on Technology Enhanced Learning in Higher Education, TELE*. 2021;3;333–335.
9. Дабас М.Р. Сараев П.В. Функциональное наполнение и структура комплекса программ для моделирования температуры горячекатанной полосы с интервальными параметрами. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2023;11(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1490>. DOI: 10.26102/2310-6018/2023.43.4.032.
10. Дабас М.Р., Зубкова Н.С., Кобзев А.А. Адаптация математической модели теплового режима полосы в чистой группе клетей стана горячей прокатки. *XVII*

Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами». 2021;515–521.

REFERENCES

1. Pimenov V.A., Pogodaev A.K., Kovalev D.A. Influence of thermal conditions of hot rolling on defect formation of cold-rolled sheet surface. *Proizvodstvo prokata = Rolled Products Manufacturing*. 2018;12;8–14. (In Russ.).
2. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki*. Moscow, Glavizdat; 1953. 660 p. (In Russ.).
3. Dabas M.R., Saraev P.V. Modelirovanie temperaturnogo rezhima polosity i valka v kletyakh stana goryachei prokatki s interval'nymi parametrami. *Upravlenie bol'shimi sistemami*. Issue 107. Moscow, IPU RAN, 2024. p. 107–120. DOI: 10.25728/ubs.2024.107.6. (In Russ.).
4. Sharyi S.P. *Konechnomernyi interval'nyi analiz*. Novosibirsk, XYZ; 2021. 650 p. (In Russ.).
5. Verzhbitskii V.M. *Chislennye metody. Matematicheskii analiz i obyknovennye differentsial'nye uravneniya*. Moscow, Izd-vo “Vysshaya shkola”; 2001. 382 p. (In Russ.).
6. Dabas M., Saraev P. Modeling of temperature strip with interval parameters in interstand gap in hot rolling. *2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA)*. 2021;3;749–751.
7. Dabas M.R. Matematicheskoe modelirovanie teplovogo rezhima polosity na mezhkletevom promezhutke pri goryachei prokatke. *Sbornik materialov Shestnadtsatoi Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii studentov i aspirantov*. 2019;258–260. (In Russ.).
8. Oreshina M, Pimenov P., Dabas M. Interactive training model of the thermal mode for a hot rolling mill. *2021 1st International Conference on Technology Enhanced Learning in Higher Education, TELE*. 2021;3;333–335. (In Russ.).
9. Dabas M.R. Saraev P.V. Functional content and structure of a software package for modeling the temperature of a hot-rolled strip with interval parameters. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology*. 2023;11(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1490>. DOI: 10.26102/2310-6018/2023.43.4.032. (In Russ.).
10. Dabas M.R., Zubkova N.S., Kobzev A.A. Adaptatsiya matematicheskoi modeli teplovogo rezhima polosity v chistovoi gruppe kletei stana goryachei prokatki. XVII Vserossiiskaya shkola-konferentsiya molodykh uchenykh “Upravlenie bol'shimi sistemami”. 2021;515–521. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Дабас Моника Раджешевна, аспирант, Липецкий государственный технический университет, Липецк, Российская Федерация.
e-mail: monique.dabas@gmail.com
ORCID: [0009-0000-1336-3394](https://orcid.org/0009-0000-1336-3394)

Monika R. Dabas, Postgraduate Student, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation.

Сараев Павел Викторович, доктор технических наук, доцент, профессор, Липецкий государственный технический университет, Липецк, Российская Федерация.

Pavel V. Saraev, Doctor of Engineering Sciences, Associate Professor, Professor, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation.

e-mail: psaraev@yandex.ru
ORCID: [0000-0002-1373-2521](https://orcid.org/0000-0002-1373-2521)

*Статья поступила в редакцию 01.03.2024; одобрена после рецензирования 20.03.2024;
принята к публикации 26.03.2024.*

*The article was submitted 01.03.2024; approved after reviewing 20.03.2024;
accepted for publication 26.03.2024.*