УДК 548.315:517.977.56
DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.029

Согласование процессов по вероятностным критериям качества с проектной симметризацией

И.В. Кулешов✉, Г.Ф. Ахмедьянова, А.М. Пищухин

Оренбургский государственный университет, Оренбург, Российская Федерация

Резюме. В работе исследуется вопрос согласования двух процессов, посредством устремления их к проектным значениям потока, реализуемого этими процессами. Производственный процесс рассматривается случайным (поскольку связан с действиями персонала) и в первом марковском приближении описывается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова. Исследование задачи оптимального управления согласованием процессов по вероятностным критериям качества показывает, что, если один поток пойдет за другим по следящей схеме, а другой будет обеспечивать необходимый уровень готовности к встрече, оба потока будут усложнять управление друг другу. Поэтому введена проектная симметризация, при которой и выход одного процесса и вход второго устремляются к величине, заданной проектом. Анализ первого приближения, полученного методом малого параметра решения, показывает, что даже при оптимальном управлении величина управляющих воздействий возрастает пропорционально проектному значению плотности вероятности и длительности управления, возрастание управляющих воздействий во времени должно происходить по кубу экспоненты, то есть очень медленно вначале управления и очень резко в конце, аналогичный характер возрастания демонстрирует зависимость управляющих воздействий от величины интенсивности потока, но выражается она через гиперболические функции.

Ключевые слова: оптимальное управление, марковский процесс, вероятностные критерии качества, проектная симметризация, метод малого параметра.

Для цитирования: Кулешов И.В., Ахмедьянова Г.Ф., Пищухин А.М. Согласование процессов по вероятностным критериям качества с проектной симметризацией. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2024;12(1). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1533 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.029

Coordination of processes according to probabilistic quality criteria with design symmetrization

I.V. Kuleshov✉, G.F. Akhmedyanova, A.M. Pishukhin

Orenburg State University, Orenburg, the Russian Federation

Abstract. The paper examines the issue of coordinating two processes by directing them towards the design values of the flow realized by these processes. The production process is considered random (since it is associated with the actions of personnel) and, in the first Markov approximation, is described by the Fokker-Planck-Kolmogorov equation. A study of the problem of optimal control of process coordination using probabilistic quality criteria shows that if one thread follows the other according to a tracking scheme, and the other provides the necessary level of readiness for the meeting, both threads will complicate each other's management. Therefore, design symmetrization has been introduced, in which both the output of one process and the input of the second tend to the value specified by the design. Analysis of the first approximation obtained by the small decision parameter method shows that even with optimal control, the magnitude of control actions increases in proportion to the design value of the probability density and control duration; the increase in control actions over time should occur according to the cube of the exponential, that is, very slowly at the beginning of control and very sharply at the end, a similar pattern of increase is demonstrated by the dependence of control actions on the magnitude of the flow intensity, but it is expressed through hyperbolic functions.

Keywords: optimal control, Markov process, probabilistic quality criteria, design symmetrization, small parameter method.

For citation: Kuleshov I.V., Akhmedyanova G.F., Pishchukhin A.M. Coordination of processes according to probabilistic quality criteria with design symmetrization. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2024;12(1). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1533 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.44.1.029 (In Russ.).

Введение

Процессный подход в настоящее время все чаще заменяет функциональный, поскольку имеет ряд преимуществ [1-3]. С другой стороны, один процесс редко дает нужный результат, ведь любая деятельность включает множество процессов и чаще мы имеем дело с многопроцессной системой. Повышение эффективности функционирования такой системы наталкивается на определенные сложности, и первая из них связана с согласованием (соединением, стыковкой) процессов [4-6].

Основными показателями процесса являются показатели организованного им потока перерабатываемого сырья, материалов, энергии, обрабатываемой информации, изготавливаемых или собираемых изделий и так далее. В первую очередь, это конечно интенсивность потока, но она часто должна быть синхронизована (фазирована) с заданными событиями и координирована с другими потоками.

Когда речь идет о двух и более процессах, на первый план выходит координация. Координация понимается как выдерживание заданных соотношений между выходными величинами процессов. С другой стороны, координация является одной из основных функций управления. Системы координирующего управления глубоко исследовались Л. М. Бойчуком [7]. Однако в этом случае процессы были детерминированными.

В общем случае любой производственный процесс является в определенной мере случайным (например, связан с встроенным в производственную цепочку персоналом) и требует вероятностного описания и вероятностных критериев. Воспользуемся для этого описания аппаратом первого вероятностного приближения в виде марковского процесса. Можно рассмотреть схему, при которой один процесс выбирает другой процесс целью слежения и управление для него реализуется как в следящей системе. А второй, согласуемый с ним, процесс готовится к встрече (или в зависимости от задачи настраивается на избегание этой встречи). Но в этом случае оба потока будут усложнять управление друг другу. Выберем более простую схему, когда оба процесса должны выходить на согласованный заранее параметр.

Теория

В сложной многопроцессной системе реализации согласованного взаимодействия процессов всегда предшествует проект, который задает реперные точки для их стыковки. Пусть проектом задается достаточная вероятность стыковки двух процессов по заданной плотности вероятности ω_0^* обеспечения требуемой интенсивности потока, описываемой переменной x, изменяющейся во времени t.

При выполнении условия марковости этого случайного процесса плотность описанной вероятности ω_0^* должна подчиняться уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова:

$$\frac{\partial \omega_0^*}{\partial t} = -a_0 \frac{\partial \omega_0^*}{\partial x} + \frac{b_0}{2} \frac{\partial^2 \omega_0^*}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

где a_0 – коэффициент сноса, b_0 – коэффициент диффузии.

Уравнение (1) – параболическое и с помощью подстановки Тихонова-Самарского [8]

$$\omega_0^* = e^{\mu x + \lambda t} \cdot \omega^*(x,t),\ \mu = a_0/b_0 \quad \lambda = -{a_0}^2/2b_0 \qquad (2)$$

приводится к каноническому виду

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t} = b^* \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^2}. \qquad (3)$$

Заметим теперь, что дальше мы будем иметь дело с преобразованной вероятностью, описываемой этим уравнением.

Похожему уравнению должен подчиняться и первый, и второй соединяемые процессы, но коэффициенты сноса и диффузии будут другими. Тогда первый процесс в канонической форме описывается уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = b_1^* \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \qquad (4)$$

где ω – плотность вероятности того, что этот процесс достигнет заданного показателя x в заданный же момент времени t_f. Как видим из уравнения (4), возможно только мультипликативное параметрическое управление таким объектом и затруднено координатное [9]. Вводя управляющее воздействие y, преобразуем уравнение (4) к виду

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = by \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \qquad (5)$$

Аналогично выводится уравнение для второго процесса

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} = b_1 y_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2}. \qquad (6)$$

Постановка задачи оптимального управления

Задачи оптимального управления в стохастических системах обычно формулируются через уравнение Ито [10-12]. В данном случае постановка может быть сведена к минимизации различия плотностей вероятностей, подчиняющихся уравнениям (5) и (6) по отношению к проектной, точно так же, как и управленческие затраты, направленные на приближение коэффициентов диффузии к задаваемому проектом.

Здесь на помощь приходит метод аналитического конструирования регуляторов профессора Летова А.М. [13]. В соответствии с ним в минимизируемый функционал включается критерий качества управления в виде суммы квадрата потерь от недостаточности управления, описываемый разностью плотностей вероятностей, введенных выше, и квадрата затрат на управление, снижающее эти потери.

$$F = \int_0^{t_f}\int_0^{\infty} (q(\omega^* - \omega)^2 + q(\omega^* - \omega_1)^2 + (b^* - by)^2 + (b^* - b_1 y_1)^2) dxdt \to min, \qquad (7)$$

где q – постоянный коэффициент, t_f – время окончания управления.

Составим лагранжиан, в который входит как подынтегральная функция из (7), так и уравнения состояния объектов управления – (5) и (6) с использованием двух коэффициентов Лагранжа ψ и ψ_1

$$L = q(\omega^* - \omega)^2 + q(\omega^* - \omega_1)^2 + (b^* - by)^2 + (b^* - b_1 y_1)^2 + \psi\left(by\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega}{\partial t}\right) +$$
$$\psi_1\left(b_1 y_1 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial t}\right) \to min. \qquad (8)$$

Уравнения Эйлера-Остроградского-Пуассона для оптимального управления будут следующими

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \omega} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\omega}}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega'_x}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \omega''_x}\right) = \\ -2q(\omega^* - \omega) + \dot{\psi} + by\frac{d^2\psi}{dx^2} + 2b\frac{dy}{dx}\frac{d\psi}{dx} + b\psi\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \\ -2q(\omega^* - \omega_1) + \dot{\psi}_1 + b_1y_1\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + 2b_1\frac{dy_1}{dx}\frac{d\psi_1}{dx} + b_1\psi_1\frac{d^2y_1}{dx^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} = by\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \psi_1} = b_1y_1\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2b(b^* - by) + b\psi\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y_1} = -2b_1(b^* - b_1y_1) + b_1\psi_1\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} = 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Из последних двух уравнений выделим управляющие воздействия

$$\begin{cases} y = \frac{b^*}{b} - \frac{\psi}{2b}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} \\ y_1 = \frac{b^*}{b_1} - \frac{\psi_1}{2b_1}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} \end{cases}. \quad (10)$$

Подставим полученные выражения в первые четыре уравнения системы (9)

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -b\left(\frac{b^*}{b} - \frac{\psi}{2b}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d\psi\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{2}\frac{d^2\psi\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}}{dx^2} + 2q(\omega^* - \omega) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -b_1\left(\frac{b^*}{b_1} - \frac{\psi_1}{2b_1}\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2}\right)\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{d\psi_1\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2}}{dx}\frac{d\psi_1}{dx} + \frac{\psi_1}{2}\frac{d^2\psi_1\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2}}{dx^2} + 2q(\omega^* - \omega_1) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = b^*\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \frac{\psi}{2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)^2 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} = b^*\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} - \frac{\psi_1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2}\right)^2 \end{cases}. \quad (11)$$

Производя дифференцирование и раскрывая скобки в первом уравнении, имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -b^*\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\psi}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \psi\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3}\right)\frac{d\psi}{dx} + \frac{\psi}{2}\left(\frac{d^2\psi}{dx^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + 2\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3} + \psi\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4}\right) + 2q(\omega^* - \omega) \quad (12)$$

Группируя одинаковые слагаемые, вернемся к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -b^*\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \psi\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + 2\psi\frac{\partial^3\omega}{\partial x^3}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\psi^2}{2}\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} + 2q(\omega^* - \omega) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = -b^*\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \psi_1\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} + 2\psi_1\frac{\partial^3\omega_1}{\partial x^3}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\psi_1^2}{2}\frac{\partial^4\omega_1}{\partial x^4} + 2q(\omega^* - \omega_1) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} = b^*\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} - \frac{\psi}{2}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)^2 \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial t} = b^*\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2} - \frac{\psi_1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega_1}{\partial x^2}\right)^2 \end{cases} \quad (13)$$

Применим для решения этой системы метод малого параметра, для чего разложим переменные

$$\begin{cases} \psi = \psi' + \lambda\psi'' + \lambda^2\psi''' + \cdots \\ \omega = \omega' + \lambda\omega'' + \lambda^2\omega''' + \cdots \end{cases}. \quad (14)$$

Подставляем это разложение в (13), перенося линейное первое слагаемое в левую часть, а остальные, предварительно умноженные на λ, в правую часть уравнений. Собирая все слагаемые с одинаковой степенью λ, получим первые две системы уравнений приближения

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi'}{\partial t} + b^* \frac{d^2\psi'}{dx^2} = 0 \\ \frac{\partial\psi_1{}'}{\partial t} + b^* \frac{d^2\psi_1{}'}{dx^2} = 0 \\ \frac{\partial\omega'}{\partial t} - b^* \frac{\partial^2\omega'}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial\omega_1{}'}{\partial t} - b^* \frac{\partial^2\omega_1{}'}{\partial x^2} = 0 \end{cases}, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi''}{\partial t} + b^* \frac{d^2\psi''}{dx^2} = \psi' \frac{\partial^2\omega'}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\psi'}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2\omega'}{\partial x^2} + 2\psi' \frac{\partial^3\omega'}{\partial x^3}\frac{\partial\psi'}{\partial x} + \frac{\psi'^2}{2}\frac{\partial^4\omega'}{\partial x^4} + 2q(\omega^* - \omega') \\ \frac{\partial\psi_1{}''}{\partial t} + b^* \frac{d^2\psi_1{}''}{dx^2} = \psi_1{}' \frac{\partial^2\omega_1{}'}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi_1{}'}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\psi_1{}'}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2\omega_1{}'}{\partial x^2} + 2\psi_1{}' \frac{\partial^3\omega_1{}'}{\partial x^3}\frac{\partial\psi_1{}'}{\partial x} + \frac{(\psi_1{}')^2}{2}\frac{\partial^4\omega_1{}'}{\partial x^4} + \\ \qquad 2q(\omega^* - \omega_1{}') \\ \frac{\partial\omega''}{\partial t} - b^* \frac{\partial^2\omega''}{\partial x^2} = -\frac{\psi'}{2}\left(\frac{\partial^2\omega'}{\partial x^2}\right)^2 \\ \frac{\partial\omega_1{}''}{\partial t} - b^* \frac{\partial^2\omega_1{}''}{\partial x^2} = -\frac{\psi_1{}'}{2}\left(\frac{\partial^2\omega_1{}'}{\partial x^2}\right)^2 \end{cases}. \tag{16}$$

Первое уравнение в системе (15) решаем методом разделением переменных

$$\psi' = p(x) \cdot v(t). \tag{17}$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (15) и разделяя переменные, имеем

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial t} = -b^* \frac{1}{p}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = M. \tag{18}$$

Получаем систему двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - Mv = 0 \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{M}{b^*} p = 0 \end{cases}. \tag{19}$$

Решение находим в справочнике [14]

$$\begin{cases} v = C_1^* exp(Mt) \\ p = C_2^* sin(\sqrt{\frac{M}{b^*}} x) \end{cases}. \tag{20}$$

Подставляя полученное решение в (17), получим

$$\psi' = C_1 exp(Mt) sin\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}} x\right). \tag{21}$$

Аналогично решается третье уравнение системы (15)

$$\omega' = C_2 exp(Mt) sh(\sqrt{\frac{M}{b^*}} x). \tag{22}$$

Подставляем теперь полученные решения в первое уравнение системы второго приближения (16)

$$\frac{\partial\psi''}{\partial t}+b^*\frac{d^2\psi''}{dx^2}=-C_1^2C_2exp(Mt)sin\left(\sqrt{\frac{M}{b_0^*}}x\right)\frac{M^2}{{b^*}^2}exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)\cdot$$

$$exp(Mt)sin\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)+\left(C_1exp(Mt)\cos\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)\right)^2\cdot$$

$$C_2\frac{M^2}{{b_0^*}^2}exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)+2C_1^2C_2exp(Mt)sin\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)\cdot$$

$$exp(Mt)\frac{M^2}{{b^*}^2}ch\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)exp(Mt)cos\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(C_1exp(Mt)\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)\right)^2exp(Mt)C_2\left(\frac{M}{b^*}\right)^2sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)+$$

$$2q\left(\omega^*-C_2exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)\right). \qquad (23)$$

Выделяя общие сомножители, возвращаемся к системе четырех уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial\psi''}{\partial t}+b^*\frac{d^2\psi''}{dx^2}=-{C_1}^2C_2\left(\frac{M}{b^*}\right)^2exp^3(Mt)\left[\frac{1}{2}sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)sin^2\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)-sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)cos^2\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)\right.\\ \left.\quad-2ch\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)sin\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)cos\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)\right]+2q\left(\omega^*-C_2exp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)\right)\\ \frac{\partial\psi_1''}{\partial t}+b^*\frac{d^2\psi_1''}{dx^2}=-{C_3}^2C_4\left(\frac{M_1}{b^*}\right)^2exp^3(M_1t)\left[\frac{3}{2}sh\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)sin^2\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)-sh\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)cos^2\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)\right.\\ \left.\quad-2ch\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)sin\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)cos\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)\right]+2q\left(\omega^*-C_2exp(M_1t)sh\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)\right)\\ \frac{\partial\omega''}{\partial t}-b^*\frac{\partial^2\omega''}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}C_1{C_2}^2\left(\frac{M}{b^*}\right)^2exp^3(Mt)\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)sh^2\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)\\ \frac{\partial\omega_1''}{\partial t}-b^*\frac{\partial^2\omega_1''}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}C_3{C_4}^2\left(\frac{M_1}{b^*}\right)^2exp^3(Mt)\,sin\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)sh^2\left(\sqrt{\frac{M_1}{b^*}}x\right)\end{cases} \qquad (24)$$

Общее решение этих уравнений складывается из решения соответствующих однородных (15) и частных решений, которые ищутся в виде правой части (24).

$$\begin{cases} \psi_1^{\text{частн}} = exp(3Mt)[Asin\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)cos\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)ch\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right) + B\sin^2\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right) \\ \qquad +Dcos^2\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)] + Fexp(Mt)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right) + 2q\omega^*t \\ \omega_1^{\text{частн}} = exp(3Mt)[G\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)sh^2\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right) + Hcos\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)sh\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)ch\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right) \\ \qquad +J\sin\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)ch^2\left(\sqrt{\frac{M}{b^*}}x\right)] \end{cases} \tag{25}$$

Эти выражения должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} 4B - 4D = 2{C_1}^2C_2\frac{M}{b^{*2}} \\ 2D + 2A + 2B = {C_1}^2C_2\frac{M}{b^{*2}} \\ 2B - 2A + 2D = -\frac{1}{2}{C_1}^2C_2\frac{M}{b^{*2}} \\ 2MF = -2qC_2 \end{cases} \text{или} \begin{cases} A = \frac{6}{16}{C_1}^2C_2\frac{M}{b^{*2}} \\ B = \frac{5}{16}{C_1}^2C_2\frac{M}{b^{*2}} \\ D = -\frac{3}{16}{C_1}^2C_2\frac{M}{b^{*2}} \\ F = -\frac{2qC_2}{M} \end{cases}. \tag{26}$$

Окончательно

$$\begin{cases} 4G - 2H + J = -\frac{1}{2}C_1{C_2}^2\left(\frac{M}{b^*}\right)^2 \\ 6H + 4G + 4J = 0 \\ 4J + 2G - 2H = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} G = \frac{1}{10}C_1{C_2}^2\left(\frac{M}{b^*}\right)^2 \\ H = \frac{1}{15}C_1{C_2}^2\left(\frac{M}{b^*}\right)^2 \\ J = -\frac{1}{90}C_1{C_2}^2\left(\frac{M}{b^*}\right)^2 \end{cases}. \tag{27}$$

Искомые решения получаем подстановкой полученных коэффициентов в выражения (10), а для управляющих воздействий затем в (25).

Заключение

Проведенное решение показало, что при оптимальном управлении величина управляющих воздействий возрастает пропорционально *проектному* значению плотности вероятности и длительности управления, причем возрастание управляющих воздействий во времени должно происходить по кубу экспоненты, то есть очень медленно вначале управления и очень резко в конце. Зависимость управляющих воздействий от величины интенсивности потока носит аналогичный характер, но выражается она через гиперболические функции.

Появление в функционале задачи проектной плотности вероятности позволило ввести в согласование процессов симметрию, за счет чего исключено попадание слагаемых, связанных с одним процессом в уравнение для другого, и нелинейность уравнений заметно снижается.

Таким образом, исследование задачи оптимального управления согласованием процессов по вероятностным критериям качества показывает важность проектной симметризации, позволяющей заметно снизить нелинейность получаемых уравнений.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Наугольнова И.А. Проектно-процессный подход к управлению организацией: модель, алгоритм внедрения, параметры оценки эффективности. *Экономика и предпринимательство.* 2022;146(9):1114–1117.
2. Фадеева Н.В. Процессный подход к управлению: дефиниции и интерпретации. *Экономика строительства.* 2022;11:30–37.
3. Кузнецов П.А. Процессный подход в управлении. *Вестник Национального Института Бизнеса*. 2018;33:47–51.
4. Репка Д.А. Координация управленческих и производственных процессов на предприятии. *Бизнес информ*. 2012;7:162–166.
5. Кузина О.Н. Модульное моделирование и координация организационно-технологических процессов в строительном переустройстве непроизводственных объектов. *Мир науки*. 2013;1:14.
6. Карх Д.А., Соколова О.Г., Аббазова В.Н. Координация и синхронизация потоковых процессов в логистической системе. *Конкурентоспособность в глобальном мире: экономика, наука, технологии.* 2022;12:419–422.
7. Бойчук Л.М. *Синтез координирующих систем автоматического управления* М.: Энергоатомиздат; 1991. 160 с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука; 1977. 736 с.
9. Ахмедьянова Г.Ф., Пищухин А.М. Исследование предиктивных схем управления функционированием организационно-технических систем. *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника».* 2024;24(1):44–51. DOI: 10.14529/ctcr240104
10. Hanson F.B. Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation. *J Stat Phys.* 2009;134:207. DOI: 10.1007/s10955-008-9669-x.
11. Oksendal B., Sulem A. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Springer, 2005. 263 p.
12. Рыбаков К.А. Оптимальное управление стохастическими системами со случайным периодом квантования *Труды МФТИ.* 2015;1(25). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/optimalnoe-upravlenie-stohasticheskimi-sistemami-so-sluchaynym-periodom-kvantovaniya (дата обращения: 09.02.2024).
13. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов I-IV. *Автоматика и телемеханика.* 1960.(5):561–568.
14. Kamke E.H. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука; 1976. 576 с.

REFERENCES

1. Naugolnova I.A. Project-process approach to organization management: model, implementation algorithm, performance assessment parameters. *Economics and Entrepreneurship.* 2022;146(9):1114–1117. (In Russ.).
2. Fadeeva N.V. Process approach to management: definitions and interpretations. *Construction Economics.* 2022;11:30–37. (In Russ.).
3. Kuznetsov P.A. Process approach to management. *Bulletin of the National Institute of Business.* 2018;33:47–51. (In Russ.).

4. Repka D.A. Coordination of management and production processes at the enterprise. *Business information*. 2012;7:162–166. (In Russ.).
5. Kuzina O.N. Modular modeling and coordination of organizational and technological processes in the construction reorganization of non-production facilities. *World of Science.* 2013;1:14. (In Russ.).
6. Karkh D.A., Sokolova O.G., Abbazova V.N. Coordination and synchronization of flow processes in the logistics system. *Competitiveness in the global world: economics, science, technology.* 2022;12:419–422. (In Russ.).
7. Boychuk L.M. *Synthesis of coordinating automatic control systems.* Moscow, Energoatomizdat; 1991. 160 p. (In Russ.).
8. Tikhonov A.N., Samarsky A.A. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Nauka; 1977. 736 p. (In Russ.).
9. Akhmedyanova G.F., Pishchukhin A.M. Study of predictive schemes for managing the functioning of organizational and technical systems. *Bulletin of SUSU. Series "Computer technologies, control, radio electronics"*. 2024;24(1):44–51. DOI: 10.14529/ctcr240104 (In Russ.).
10. Hanson F.B. Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions: Modeling, Analysis, and Computation. *J Stat Phys.* 2009;134:207. DOI: 10.1007/s10955-008-9669-x.
11. Oksendal B., Sulem A. Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. Springer, 2005. 263 p.
12. Rybakov K.A. Optimal control of stochastic systems with a random quantization period. *Proceedings of MIPT.* 2015;1(25). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/optimalnoe-upravlenie-stohasticheskimi-sistemami-so-sluchaynym-periodom-kvantovaniya (accessed on 02.09.2024). (In Russ.).
13. Letov A.M. Analytical design of regulators I-IV. *Automation and telemechanics*. 1960;5:561–568 (In Russ.).
14. Kamke E. *Handbook of Ordinary Differential Equations*. Moscow, Science; 1976. 576 p. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Кулешов Игорь Валерьевич, старший преподаватель кафедры технологии строительного производства, Оренбургского государственного университета, Оренбург, Российская Федерация.
e-mail: kuleshovigor1985@mail.ru
ORCID: 0000-0004-8884-1302

Igor V. Kuleshov, Senior Lecturer at the Department of Construction Technology, Orenburg State University, Orenburg, the Russian Federation.

Ахмедьянова Гульнара Фазульяновна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры управления и информатики в технических системах, Оренбургского государственного университета, Оренбург, Российская Федерация.
e-mail: ahmedyanova@bk.ru
ORCID: 0000-0003-3284-7794

Gulnara F. Akhmedyanova, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at the Department of Management and Informatics in Technical Systems, Orenburg State University, Orenburg, the Russian Federation.

Пищухин Александр Михайлович, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры управления и информатики в

Aleksandr M. Pishchukhin, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Professor at the Department of Management and Informatics in

технических системах, Оренбургского государственного университета, Оренбург, Российская Федерация
e-mail: pishchukhin55@mail.ru
ORCID: 0000-0003-4655-6824

Technical Systems, Orenburg State University, Orenburg, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 06.03.2024; одобрена после рецензирования 20.03.2024; принята к публикации 26.03.2024.

The article was submitted 06.03.2024; approved after reviewing 20.03.2024; accepted for publication 26.03.2024.