

УДК: 519.63

DOI: [10.26102/2310-6018/2024.45.2.003](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2024.45.2.003)

## Символьный метод решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения переноса сплошной среды на графе

М.А. Рыбаков 

*Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация*

**Резюме.** Актуальность исследования обусловлена необходимостью получения аналитических выражений приближенных решений сложных технических задач, математическое описание которых, приводит к краевым задачам для систем дифференциальных уравнений в сетеподобных областях и, в частности, на графах. В статье представлена постановка начально-краевой задачи для неоднородного уравнения переноса сплошной среды в  $n$ -мерной сетеподобной области. В случае  $n = 1$  предлагается символьный метод решения рассматриваемой начально-краевой задачи на графе-дереве. В основе алгоритма лежит аппроксимация частной производной по временной переменной разностным отношением (используется двухслойная аппроксимационная схема) и последующее применение преобразования Лапласа к полученной дифференциально-разностной системе. Представлена блок-схема алгоритма, приведено описание структуры программного комплекса на основе разработанного алгоритма. Программный комплекс разработан на языке программирования Java. Для ввода исходных данных начально-краевой задачи и вывода решения используется веб-интерфейс программного комплекса на основе фреймворка Spring. Для иллюстрации работы программного комплекса рассматривается пример решения начально-краевой задачи с пошаговой демонстрацией результатов расчетов. Материалы статьи представляют практическую ценность для специалистов в области анализа прикладных задач сетевой гидродинамики, теплотехники, а также анализе диффузионных процессов биофизики.

**Ключевые слова:** символьный метод, дифференциально-разностная система, начально-краевая задача, уравнение переноса сплошной среды, граф-дерево.

**Для цитирования:** Рыбаков М.А. Символьный метод решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения переноса сплошной среды на графе. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2024;12(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1539> DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.003

## A symbolic method for solving the initial boundary value problem for an inhomogeneous continuum transfer equation on a graph

М.А. Rybakov 

*Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation*

**Abstract.** The relevance of the study is due to the need to obtain analytical expressions of approximate solutions to complex technical problems, the mathematical description of which leads to boundary value problems for systems of differential equations in network-like domains and, in particular, on graphs. The article presents the formulation of an initial boundary value problem for an inhomogeneous continuum transfer equation in an  $n$ -dimensional network-like region. In the case of  $n = 1$ , a symbolic method for solving the initial boundary value problem under consideration on a tree graph is proposed. The algorithm is based on the approximation of the partial derivative with respect to a time variable by

a difference ratio (a two-layer approximation scheme is used) and the subsequent application of the Laplace transform to the resulting differential-difference system. A block diagram of the algorithm is presented, and a description of the structure of the software package based on the developed algorithm is given. The software package is developed in the Java programming language. To enter the initial data of the initial boundary value problem and output the solution, the web interface of the software package based on the Spring framework is used. To illustrate the operation of the software package, an example of solving an initial boundary value problem with a step-by-step demonstration of the calculation results is considered. The materials of the article are of practical value for specialists in the field of analysis of applied problems of network hydrodynamics, thermal engineering, as well as analysis of diffusion processes in biophysics.

**Keywords:** symbolic method, differential-difference system, initial boundary value problem, continuum transfer equation, graph-tree.

**For citation:** Rybakov M.A. A symbolic method for solving the initial boundary value problem for an inhomogeneous continuum transfer equation on a graph. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2024;12(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1539> DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.003 (In Russ.).

## Введение

Математическое описание некоторых технических процессов (в трубопроводных системах тепло- и водоснабжения, в системах передачи энергии, в балочных конструкциях и др. [1]) приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений на сетеподобных областях в пространстве  $R^n$ . В случае  $n = 1$  такие области моделируются графом-деревом. Дифференциальным уравнениям на сетеподобных областях и, в частности, на графах посвящены многочисленные исследования ([2-6] и приведенную в них библиографию). В связи с невозможностью точного решения большинства подобных задач актуальным является разработка методов и алгоритмов нахождения приближенных решений. Наиболее известны численные методы, получаемые с использованием разностных схем. Менее известны и разработаны символьные методы, позволяющие получать аналитическое выражение приближенных решений. Необходимо отметить, что реализация символьных методов является, как правило, более трудоемкой, что не критично при использовании современных ЭВМ (а применение параллельных вычислений значительно сокращает время нахождения решений). Но при этом именно аналитическое представление решений требуется во многих важных технических задачах. В частности, располагая формулой общего решения краевой задачи, можно оперативно реагировать на возмущения входных воздействий. Общее решение позволяет в режиме реального времени получать решение, соответствующее измеряемым параметрам, достаточно в готовую формулу просто подставить значения этих параметров. В такой ситуации численное решение приходится каждый раз вычислять полностью заново при изменении параметров системы.

В работе [7] был предложен символьный метод решения начально-краевой задачи для однородного уравнения переноса сплошной среды по сетевому носителю, формализованному графом-звездой, на основе которого был разработан алгоритм нахождения решения и предложена его программная реализация. Но как отмечено выше, для технических задач, прежде всего связанных с синтезом управляющих воздействий, бóльший интерес представляют неоднородные уравнения. В данной статье дается постановка начально-краевой задачи для однородного уравнения переноса сплошной среды по сетевому носителю в  $n$ -мерной области, затем для случая  $n = 1$  с использованием идей и результатов [7] предлагается символьный метод (далее СМ) решения рассматриваемой задачи. Программная реализация предлагаемого СМ

позволяет получать аналитическое решение начально-краевой задачи для правых частей уравнений, представимых любыми элементарными функциями.

### Постановка задачи для $n$ -мерной сетеподобной области

Рассмотрим сетеподобный носитель  $\Gamma$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$ . Пусть количество внутренних узлов сетеподобного носителя равно  $m_B$ . Рассмотрим произвольный  $i$ -ый внутренний узел (Рисунок 1), имеющий  $k_i$  выходящих каналов. Обозначим через  $S_{il}$  – сечение выходящего  $l$ -го канала из внутреннего  $i$ -го узла,  $l = \overline{1, k_i}$ ,  $i = \overline{1, m_B}$ . Под сечением входящего канала внутреннего  $i$ -го узла будем понимать  $S_i = \bigcup_{l=1}^{k_i} S_{il}$ .

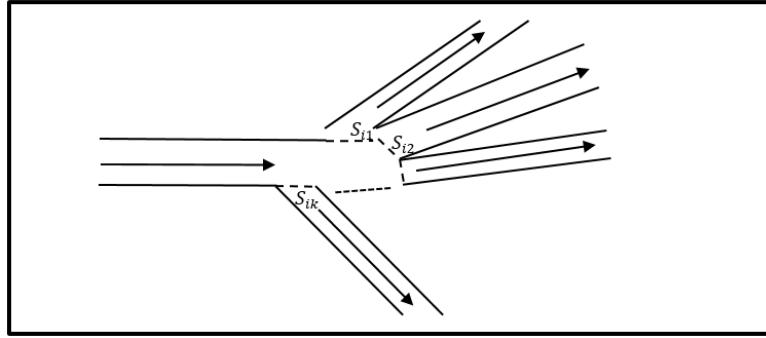


Рисунок 1 – Произвольный  $i$ -узел сетеподобного носителя в 2-мерном пространстве  
Figure 1 – An arbitrary  $i$ -node of a network-like carrier in 2-dimensional space

Начально-краевая задача для уравнения переноса сплошной среды относительно неизвестной функции  $u(\bar{x}, t)$ ,  $\bar{x} \in \Gamma$ ,  $t \in (0, T)$  содержит уравнение параболического типа с заданными постоянными коэффициентами  $a_j, b_j, c_j$ ,  $j = \overline{1, n}$  в области  $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$  вида:

$$\frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial^2 u(\bar{x}, t)}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^n c_j u(\bar{x}, t) + f(\bar{x}, t),$$

условия согласования в каждом сечении  $S_{il}$

$$u(\bar{x}, t)|_{x \in S_{il-0}} = v_{il} u(\bar{x}, t)|_{x \in S_{il+0}}, \quad i = \overline{1, m_B}, \quad l = \overline{1, k_i},$$

$$\left. \frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \right|_{x \in S_{il-0}} = \mu_{ij} \left. \frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial x_j} \right|_{x \in S_{il+0}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m_B}, \quad l = \overline{1, k_i},$$

где  $v_{il} > 0$ ,  $\sum_{l=1}^{k_i} v_{il} = 1$  при  $n = 2, 3 \dots$  и  $v_{il} = 1$  при  $n = 1$ ,  $\mu_{ij} > 0$ ; а также начальное и краевое условия

$$u(\bar{x}, t)|_{t=0} = \varphi(\bar{x}),$$

$$u(\bar{x}, t)|_{\bar{x} \in \partial \Gamma} = 0.$$

Здесь функция  $\varphi(\bar{x})$  задана и при всех  $j = \overline{1, n}$ ,  $i = \overline{1, m_B}$ ,  $l = \overline{1, k_i}$  удовлетворяет условиям:

$$\varphi(\bar{x})|_{x \in S_{il-0}} = v_{il} \varphi(\bar{x})|_{x \in S_{il+0}}, \quad \left. \frac{\partial \varphi(\bar{x})}{\partial x_j} \right|_{x \in S_{il-0}} = \mu_{ij} \left. \frac{\partial \varphi(\bar{x})}{\partial x_j} \right|_{x \in S_{il+0}}, \quad \varphi(\bar{x})|_{\bar{x} \in \partial \Gamma} = 0.$$

Отметим, что коэффициенты  $v_{il}$  отражают непрерывность потока переноса сплошной среды в узлах сетеподобной области. Для  $n = 2, 3 \dots$  сумма коэффициентов,

соответствующих каждому узлу, приравнивается к единице, и это соответствует тому, что входной в узел поток равен сумме потоков на выходе из узла. Величину коэффициентов можно при этом считать пропорциональной площади сечения соответствующего канала. Ниже будет рассмотрен случай  $n = 1$  (одномерная область), в котором, учитывая, что площади сечений «выродились» в 0, и исходя из моделей конкретных физических процессов все коэффициенты  $\nu_{il}$  будем полагать равными 1.

### Постановка задачи в случае $n = 1$

Рассмотрим произвольный ориентированный граф-дерево  $\Gamma$ , который содержит  $m$  узлов. Такой граф будет содержать  $m - 1$  ребер. Каждое ребро графа  $\Gamma$  параметризуем отрезком  $[0,1]$ . Пусть в рассматриваемом графе  $m_b$  узлов являются внутренними. Совокупность остальных  $m - m_b$  «граничных» узлов обозначим символом  $\partial\Gamma$ .

Пусть к произвольному  $i$ -му ( $i = \overline{1, m_b}$ ) внутреннему узлу графа  $\Gamma$  примыкает  $r_i = l_i + 1$  ребер, одно из которых ориентировано к этому узлу, а  $l_i$  ребер – от этого узла. Обозначим через  $\gamma_0$  единственное ребро, ориентированное к рассматриваемому узлу, через  $\gamma_j$  ( $j = \overline{1, l_i}$ ) – ребра, ориентированные от узла.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения переноса сплошной среды в области  $\Gamma_T = \Gamma \times (0, T)$ , имеющую следующий вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + b \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + cu(x,t) + f(x,t), \text{ где } (x,t) \in \Gamma_T, \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{x=1 \in \gamma_0} = u(x,t)|_{x=0 \in \gamma_j}, \quad j = \overline{1, l_i}, \quad i = \overline{1, m_b}, \text{ где } t \in (0, T), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_0} = \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_j \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_j}, \quad i = \overline{1, m_b}, \text{ где } t \in (0, T), \quad (3)$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \text{ где } x \in \Gamma, \quad (4)$$

$$u(x,t)|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \text{ где } t \in (0, T). \quad (5)$$

Будем предполагать, что в уравнении (1) коэффициенты  $a, b, c$  – постоянные (заданные числа), в условиях согласования (2), (3) для каждого  $i$ -го ( $i = \overline{1, m_b}$ ) внутреннего узла графа  $\Gamma$  коэффициенты  $\alpha_j > 0$  ( $j = \overline{1, l_i}$ ) – постоянные (заданные числа), начальная функция  $\varphi(x)$  задана и соответствующая функция  $u_0(x,t) \equiv \varphi(x)$  удовлетворяет условиям (2), (3) и (5), функция  $f(x,t)$  задана и как функция первого аргумента  $x$  является элементарной на каждом ребре графа  $\Gamma$ .

Условия разрешимости задачи (1) – (5) в различных классах функций получены в работе [3], аналогичные результаты для гиперболических систем приведены в [6].

### Краткое описание программного комплекса

Для решения в символьном виде задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю разработан программный комплекс, который включает в себя три модуля: программный модуль для символьного решения систем линейных дифференциальных уравнений, программный модуль для решения системы дифференциально-разностных уравнений и программный модуль для решения задач переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде.

Описание программного модуля и результаты его использования для символьного решения некоторых систем линейных дифференциальных уравнений и расчета

динамических характеристик систем автоматического управления представлены в статьях [8-10].

Описание программного модуля и результаты его использования для решения задач переноса сплошной среды по сетевому носителю, описываемых системой (1) – (5) с функцией  $f(x, t) \equiv 0$  в символьном виде представлены в статье [7]. Здесь используется аналогичный программный комплекс, отличающийся расчетными формулами, в которых учитывается наличие правой части  $f(x, t)$  в уравнении (1).

Ниже мы проиллюстрируем работу разработанного программного модуля символьного решения начально-краевой задачи (1) – (5) для случая, когда граф-дерево  $\Gamma$  – это простейший граф-звезда с одним внутренним узлом и тремя ребрами. Идеи построения этого модуля распространяются при обобщении разработанного подхода на приведенный выше случай сетеподобного носителя  $\Gamma$  в пространстве  $R^n$ .

### Пример решения задачи

Пусть  $\Gamma$  – граф-звезда с внутренним узлом  $\xi$  и тремя ребрами  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  (см. рис.2). Каждое ребро параметризуем отрезком  $[0, 1]$ .

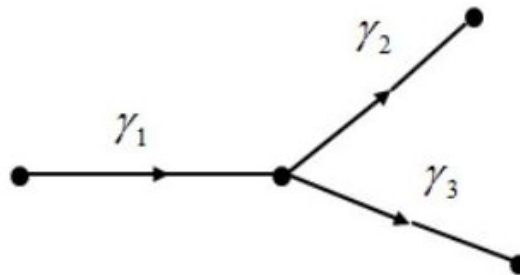


Рисунок 2 – Граф-звезда  $\Gamma$   
 Figure 2 – Star graph  $G$

Далее, пусть коэффициенты в уравнении (1) и условиях согласования (2), (3) принимают следующие значения:  $a = \frac{4}{\pi^2}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$ ,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ .

Начальную функцию определим формулой:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 + ex - e^x, & \text{если } x \in \gamma_1, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{если } x \in \gamma_2, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{если } x \in \gamma_3, \end{cases}$$

а функцию  $f(x, t)$  – формулой:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} e^x e^t, & \text{если } x \in \gamma_1 \text{ и } t \in [0, 1], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) e^t, & \text{если } x \in \gamma_2 \text{ и } t \in [0, 1], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) e^t, & \text{если } x \in \gamma_3 \text{ и } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае система (1) – (5) принимает вид:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) + f(x, t), \text{ где } (x, t) \in \Gamma_T, \quad (6)$$

$$u(x, t)|_{x=1 \in \gamma_1} = u(x, t)|_{x=0 \in \gamma_2} = u(x, t)|_{x=0 \in \gamma_3}, \text{ где } t \in (0, T), \quad (7)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0 \in \gamma_3}, \text{ где } t \in (0, T), \quad (8)$$

$$u(x,t) \Big|_{t=0} = \varphi(x), \text{ где } x \in \Gamma, \quad (9)$$

$$u(x,t) \Big|_{x=0 \in \gamma_1} = u(x,t) \Big|_{x=1 \in \gamma_2} = u(x,t) \Big|_{x=1 \in \gamma_3} = 0, \text{ где } t \in (0, T). \quad (10)$$

Отметим, что функция  $u_0(x, t) \equiv \varphi(x)$  удовлетворяет условиям (7), (8) и (10).

Приведем алгоритм решения начально-краевой задачи (6) – (10) методом СМ.

**1-й этап.** *Редукция дифференциального уравнения (6) к дифференциально-разностной системе.*

Разобьем отрезок  $[0, 1]$  на  $N = 10$  элементарных отрезков  $[(k-1)\tau, k\tau]$ ,  $k = \overline{1, 10}$ ,  $\tau = 1/10$  и запишем соответствующую уравнению (6) с начальным условием (9) дифференциально-разностную систему:

$$\begin{aligned} \frac{1}{0,1} [u(k) - u(k-1)] &= \frac{4}{\pi^2} \frac{d^2 u(k)}{dx^2} + u(k) + f(k), \text{ где } x \in \Gamma, k = \overline{1, 10}, \\ u(0) &= \varphi(x), f(0) = f(x, 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Условию (7) будет соответствовать условие

$$u(k) \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = u(k) \Big|_{x=0 \in \gamma_2} = u(k) \Big|_{x=0 \in \gamma_3}, k = \overline{1, 10}, \quad (12)$$

условию (8) будет соответствовать условие

$$\frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_2} + \frac{du(k)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_3}, k = \overline{1, 10}, \quad (13)$$

а условию (10) – условие

$$u(k) \Big|_{x=0 \in \gamma_1} = u(k) \Big|_{x=1 \in \gamma_2} = u(k) \Big|_{x=1 \in \gamma_3} = 0, k = \overline{1, 10}. \quad (14)$$

**2-й этап.** *Решение системы (11) – (14) при  $x \in \Gamma$ , т. е. на каждом ребре  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Уравнение (11) при  $k = 1$  на каждом ребре будет иметь следующий вид:*

$$\frac{1}{0,1} [u(1) - u(0)] = \frac{4}{\pi^2} \frac{d^2 u(1)}{dx^2} + u(1) + f(1), x \in \Gamma.$$

Для нахождения решения этого уравнения  $u(1)$  на каждом ребре  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  введем произвольные постоянные  $\alpha_j, \beta_j$  и будем полагать, что выполнены условия:

$$u(1) \Big|_{x=0 \in \gamma_j} = \alpha_j, \frac{du(1)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_j} = \beta_j, j = \overline{1, 3}.$$

Исходя из условия (14) для ребра  $\gamma_1$  получаем равенство  $u(1) \Big|_{x=0 \in \gamma_1} = 0$ , отсюда следует, что выполнено  $\alpha_1 = 0$ . Решение системы (11) определяется последовательно на каждом ребре  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  с использованием метода СМ.

Таким образом, будет построена функция  $u(1)$  с параметрами  $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ . Эти пять параметров будут определены в результате решения линейной алгебраической системы, полученной из трех уравнений (12) – (13) и двух из трех уравнений (14) (первое уравнение в (14) выполнено автоматически). В результате выполнения процедуры решения алгебраической системы будет получена функция  $u(1)$ ,  $x \in \Gamma$ .

Для каждого следующего натурального  $k = \overline{2, 10}$  определенная на предыдущем этапе функция  $u(k-1)$ ,  $x \in \Gamma$ , подставляется в уравнение (11) и для полученного уравнения повторяются все описанные выше для  $k = 1$  шаги 2-го этапа алгоритма.

Рассмотрим решение дифференциально-разностной системы (11) с условиями (12) – (14), где  $k = \overline{1, 10}$ . В результате, получим набор функций  $u(k)$ ,  $k = \overline{1, 10}$ . При этом для каждого фиксированного  $k = \overline{1, 10}$  будет работать ЭВМ-программа, состоящая из

трех блоков, реализующих три этапа работы алгоритма, в основе работы каждого из этих блоков лежат процедуры символьной математики, в совокупности формирующие метод СМ: 1) блок определения решения дифференциальной системы (11), зависящего от параметров  $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$ ; 2) блок определения параметров через решение системы линейных алгебраических уравнений и 3) блок формирования решения  $u(k)$ ,  $k = \overline{1,10}$ , дифференциально-разностной системы (11) – (14) и, как следствие, формирования приближенного решения заданной начально-краевой задачи (6) – (10), получаемого из функций  $u(k)$ ,  $k = \overline{1,10}$  интерполяцией по временной переменной.

Рассмотрим работу программного комплекса детально для  $k = 1$ .

**Работа блока № 1:**

Уравнение (11) при  $k = 1$  на каждом ребре будет иметь следующий вид:

$$10(u(1) - u(0)) = \frac{4}{\pi^2} \frac{d^2 u(1)}{dx^2} + u(1) + f(1) \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\pi^2} \frac{d^2 u(1)}{dx^2} - 9u(1) = -10u(0) - f(1). \quad (15)$$

На ребре  $\gamma_1$  функции  $u(0)$ ,  $f(1)$  задаются равенствами  $u(0) = 1 + ex - e^x$ ,  $f(1) = \frac{4}{\pi^2} e^x e^{0,1}$ . Начальные условия на  $\gamma_1$  имеют вид  $u(1)|_{x=0 \in \gamma_1} = 0$ ,  $\frac{du(1)}{dx}|_{x=0 \in \gamma_1} = \beta_1$ .

В результате применения метода СМ к дифференциальному уравнению 2-ого порядка (15) получаем его решение на ребре  $\gamma_1$ :

$$u(1) = 1,11 - 3,02x - 1,11e^x + (0,11\beta_1 - 0,2)e^{4,71x} + (0,2 - 0,11\beta_1)e^{-4,71x}.$$

На ребре  $\gamma_2$  функции  $u(0)$ ,  $f(1)$  заданы формулами:  $u(0) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ ,  $f(1) = \cos(\frac{\pi}{2}x)e^{0,1}$ . Начальные условия на ребре  $\gamma_2$  принимают вид  $u(1)|_{x=0 \in \gamma_2} = \alpha_2$ ,  $\frac{du(1)}{dx}|_{x=0 \in \gamma_2} = \beta_2$ .

После применения метода СМ к дифференциальному уравнению 2-ого порядка (15) получаем его решение на ребре  $\gamma_2$ :

$$u(1) = (0,5\alpha_2 + 0,11\beta_2 - 0,56)e^{4,71x} + (0,5\alpha_2 - 0,11\beta_2 - 0,56)e^{-4,71x} + 1,11\cos(1,57x).$$

На ребре  $\gamma_3$  имеем:  $u(0) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ ,  $f(1) = \cos(\frac{\pi}{2}x)e^{0,1}$ . Начальные условия на ребре  $\gamma_3$ :  $u(1)|_{x=0 \in \gamma_3} = \alpha_3$ ,  $\frac{du(1)}{dx}|_{x=0 \in \gamma_3} = \beta_3$ .

После применения метода СМ к дифференциальному уравнению 2-ого порядка (15) получаем его решение на ребре  $\gamma_3$ :

$$u(1) = (0,5\alpha_3 + 0,11\beta_3 - 0,56)e^{4,71x} + (0,5\alpha_3 - 0,11\beta_3 - 0,56)e^{-4,71x} + 1,11\cos(1,57x).$$

Таким образом, построена функция  $u(1)$ ,  $x \in \Gamma$  (т. е. на всех трех ребрах  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ) с пятью параметрами:  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ . Эти параметры определяются далее в блоке 2 через решение системы линейных алгебраических уравнений.

**Работа блока № 2:**

Составим систему линейных алгебраических уравнений, исходя из условий (12) – (14), в которые подставим найденные выражения для функции  $u(1)$ ,  $x \in \Gamma$ . Таким образом, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} u(1)|_{x=1 \in \gamma_1} = u(1)|_{x=0 \in \gamma_2} \\ u(1)|_{x=0 \in \gamma_2} = u(1)|_{x=0 \in \gamma_3} \\ \frac{du(1)}{dx} \Big|_{x=1 \in \gamma_1} = \frac{du(1)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_2} + \frac{du(1)}{dx} \Big|_{x=0 \in \gamma_3} \\ u(1)|_{x=1 \in \gamma_2} = 0 \\ u(1)|_{x=1 \in \gamma_3} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a_2 + 11,79 b_1 - 21,38 = 0, \\ -a_3 + a_2 = 0, \\ -b_3 - b_2 + 55,53 b_1 - 105,93 = 0, \\ 11,79 b_2 + 55,53 a_2 - 61,67 = 0, \\ 11,79 b_3 + 55,53 a_3 - 61,67 = 0. \end{array} \right. \quad (16)$$

В результате решения системы (16) определяем следующие значения параметров:

$$\beta_1 = 1,9, \alpha_2 = 1,1, \beta_2 = 0, \alpha_3 = 1,1, \beta_3 = 0.$$

После подстановки в выражение для функции  $u(1)$ ,  $x \in \Gamma$  найденных значений параметров  $\beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3$  получаем:

$$u(1)|_{x \in \gamma_1} = 1,11 - 3,02x - 1,11e^x.$$

$$u(1)|_{x \in \gamma_2} = 1,11 \cos(1,57x).$$

$$u(1)|_{x \in \gamma_3} = 1,11 \cos(1,57x).$$

Аналогично определяются функции  $u(k)$ ,  $k = \overline{0,10}$ . Значения этих функций на ребрах  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  представлены в Таблице 1.

Таблица 1 – Значения функций  $u(k)$

Table 1 – Function values  $u(k)$

k	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$
0	$1 - 2,71x - e^x$	$\cos(1,57x)$	$\cos(1,57x)$
1	$1,11 - 3,02x - 1,11e^x$	$1,11 \cos(1,57x)$	$1,11 \cos(1,57x)$
2	$1,23 - 3,36x - 1,23e^x$	$1,23 \cos(1,57x)$	$1,23 \cos(1,57x)$
3	$1,37 - 3,73x - 1,37e^x$	$1,37 \cos(1,57x)$	$1,37 \cos(1,57x)$
4	$1,52 - 4,15x - 1,52e^x$	$1,52 \cos(1,57x)$	$1,52 \cos(1,57x)$
5	$1,69 - 4,61x - 1,69e^x$	$1,68 \cos(1,57x)$	$1,68 \cos(1,57x)$
6	$1,89 - 5,12x - 1,89e^x$	$1,86 \cos(1,57x)$	$1,86 \cos(1,57x)$
7	$2,1 - 5,69x - 2,1e^x$	$2,1 \cos(1,57x)$	$2,1 \cos(1,57x)$
8	$2,32 - 6,32x - 2,32e^x$	$2,28 \cos(1,57x)$	$2,28 \cos(1,57x)$
9	$2,58 - 7,02x - 2,58e^x$	$2,52 \cos(1,57x)$	$2,52 \cos(1,57x)$
10	$2,87 - 7,8x - 2,87e^x$	$2,79 \cos(1,57x)$	$2,79 \cos(1,57x)$

**3-й этап.** Представление решения системы (6) – (10) при  $x \in \Gamma$ .

**Работа блока № 3:**

Найденные с помощью программного комплекса функции  $u(k)$  являются приближенными значениями решения  $u(x, t)$  начально-краевой задачи (6) – (10) в точках  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, 10$ . Интерполяцией по временной переменной через эти функции получено аналитическое представление приближенного решения начально-краевой задачи (6) – (10).

Точным аналитическим решением рассматриваемой начально-краевой задачи (6) – (10) является функция



$$u(x, t) = \begin{cases} (1 + ex - e^x)e^t, & \text{если } x \in \gamma_1, t \in [0, 1], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^t, & \text{если } x \in \gamma_2, t \in [0, 1], \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)e^t, & \text{если } x \in \gamma_3, t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Сравнительный анализ приближенного и точного решений позволяет сделать вывод о том, что величина погрешности не превышает шаг  $\tau = 0.1$ , который использовался в конечной разности для составления дифференциально-разностной системы (11).

### Заключение

В данной работе:

1. Сформулирована постановка начально-краевой задачи для неоднородного уравнения переноса сплошной среды по сетевому носителю в  $n$ -мерной сетеподобной области при любом  $n$  и, в частном случае, при  $n = 1$  на графе-дереве.

2. Приведен алгоритм решения символьным методом начально-краевой задачи на графе-дереве.

3. Дано краткое описание разработанного программного комплекса для решения поставленной задачи.

4. Приведен пример решения задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю на графе-звезде в символьном виде.

В перспективе возможности представленного программного комплекса будут расширены в направлении увеличения размерности пространственной переменной.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л. и др. *Дифференциальные уравнения на геометрических графах*. Москва: ФИЗМАТЛИТ; 2004. 272 с.
2. Подвальный С.Л., Провоторов В.В., Хоанг В.Н., Гран З. Точечная оптимизация ламинарного течения вязкой жидкости в сетевом носителе. *Вестник Воронежского государственного технического университета*. 2022;18(5):7–16.
3. Провоторов В.В. К вопросу построения граничных управлений в задаче о гашении колебаний системы «мачта-растяжки». *Системы управления и информационные технологии*. 2008;(2-2):293–297.
4. Провоторов В.В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2014;(3):154–163.
5. Провоторов В.В., Провоторова Е.Н. Оптимальное управление линеаризованной системой Навье-Стокса в сетеподобной области. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2017;13(4):431–443.
6. Жабко А.П., Шиндяпин А.И., Провоторов В.В. Устойчивость слабого решения параболической системы с распределенными параметрами на графе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2019;15(4):457–471. DOI: 10.21638/11702/spbu10.2019.404.
7. Рыбаков М.А. Решение задачи переноса сплошной среды по сетевому носителю в символьном виде. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2023;11(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1451>. DOI: 10.26102/2310-6018/2023.43.4.010 (дата обращения: 15.02.2024).

8. Малашонок Н.А., Рыбаков М.А. Символьно-численное решение систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с требуемой точностью. *Программирование*. 2013;39(3):38–46.
9. Малашонок Г.И., Рыбаков М.А. Решение систем линейных дифференциальных уравнений и расчет динамических характеристик систем управления в веб-сервисе MathPartner. *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. 2014;19(2):517–529.
10. Рыбаков М.А. О нахождении общего и частного решений неоднородной системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. *Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки*. 2012;17(2):552–565.

## REFERENCES

1. Pokornyy Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L., et al. *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh*. Moscow: FIZMATLIT; 2004. 272 p. (In Russ.).
2. Podval'ny S.L., Provotorov V.V., Hoang V.N., Tran Z. Point optimization of the laminar flow of a viscous fluid in a network carrier. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2022;18(5):7–16. (In Russ.).
3. Provotorov V.V. K voprosu postroeniya granichnykh upravlenii v zadache o gashenii kolebanii sistemy «machta-rastyazhki». *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii*. 2008;(2-2):293–297. (In Russ.).
4. Provotorov V.V. Optimum control of parabolic system with the distributed parameters on the graph. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2014;(3):154–163. (In Russ.).
5. Provotorov V.V., Provotorova E.N. Optimal control of the linearized Navier-Stokes system in a netlike domain. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2017;13(4):431–443.
6. Zhabko A.P., Shindyapin A.I., Provotorov V.V. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2019;15(4):457–471. DOI: 10.21638/11702/spbu10.2019.404.
7. Rybakov M.A. Solving the problem of transferring a continuous medium over a network medium in symbolic form. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology*. 2023;11(4). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1451>. DOI: 10.26102/2310-6018/2023.43.4.010 [Accessed 15th February 2024].
8. Malaschonok N.A., Rybakov M.A. Symbolic-numerical solution of systems of linear ordinary differential equations with required accuracy. *Programmirovaniye = Programming and Computer Software*. 2013;39(3):38–46. (In Russ.).
9. Malaschonok G.I., Rybakov M.A. Solving systems of linear differential equations and calculation of dynamic characteristics of control systems in a web service MathPartner. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reviews. Series Natural and Technical Sciences*. 2014;19(2):517–529. (In Russ.).

10. Rybakov M.A. Computation general and particular solutions of the inhomogeneous system of ordinary differential equations with constant coefficients. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennyye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reviews. Series Natural and Technical Sciences*. 2012;17(2):552–565. (In Russ.).

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Рыбаков Михаил Анатольевич**, старший преподаватель кафедры функционального анализа, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Российская Федерация.

*e-mail:* [mixail08101987@mail.ru](mailto:mixail08101987@mail.ru)

ORCID: [0000-0001-8152-8357](https://orcid.org/0000-0001-8152-8357)

*Статья поступила в редакцию 14.03.2024; одобрена после рецензирования 28.03.2024; принята к публикации 09.04.2024.*

*The article was submitted 14.03.2024; approved after reviewing 28.03.2024; accepted for publication 09.04.2024.*