УДК 51-77
DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.008

Разработка алгоритма решения задачи распределения времени обучения по направлениям подготовки

Д.А. Резников✉

Воронежский институт ФСИН России, Воронеж, Российская Федерация

Резюме. В период прохождения службы в уголовно-исполнительной системе сотрудники постоянно совершенствуют свои знания, умения и навыки в рамках служебной подготовки. В статье рассматривается задача распределения времени обучения по направлениям подготовки для обеспечения максимального значения минимальной средней оценки по каждому направлению. Разработан алгоритм решения, на первом шаге которого определяется максимальное повышение минимальной средней оценки по одному направлению и количество времени, которое на это требуется. Если полученное значение оценки меньше средних оценок по другим направлениям, то на втором шаге определяется максимальное повышение нескольких минимальных средних оценок и требующееся количество времени. Определен вид зависимости приращения средней оценки по направлениям подготовки от времени обучения аппроксимацией статистических данных, позволяющий получить аналитическое решение поставленной задачи. Также проведен анализ возможности применения для аппроксимации степенной и экспоненциальной зависимостей, позволяющих получить приближенное решение задачи численными методами. Полученные значения коэффициента детерминации подтвердили высокую достоверность аппроксимации. Представлены графики зависимостей. Приведены два примера аналитического решения поставленной задачи, иллюстрирующие применение предложенного алгоритма. В первом примере начальные средние оценки подготовки сотрудников по всем направлениям одинаковые, во втором примере – средние оценки различные.

Ключевые слова: средняя оценка, приращение средней оценки, время обучения, кривая научения, аппроксимация, метод наименьших квадратов.

Для цитирования: Резников Д.А. Разработка алгоритма решения задачи распределения времени обучения по направлениям подготовки. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2024;12(2). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1540 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.008

Development of an algorithm for solving the problem of distributing training time in training areas

D.A. Reznikov✉

Voronezh institute of the Russian Federal Penitentiary Service, Voronezh, the Russian Federation

Abstract. During their service in the penal system, employees continuously improve their knowledge, skills, and abilities through official training. This article discusses the problem of allocating training time to different areas in order to maximize the value of minimal average grades in those areas. A solution algorithm has been developed. The first step involves determining the maximum possible increase in the minimal average score for one area as well as the amount of time required for this increase. If the resultant score value is lower than the average score in other areas, the second step identifies the maximum possible increases for multiple areas and the corresponding amount of time needed. The article also determines the type of relationship between the increase in average grades for training areas and the time spent on training through the approximation of statistical data. This allows for the analytical solution of the problem. The analysis of the potential use of power and exponential functions for approximation, which allows for the approximate solution of a problem through numerical methods, is also conducted. The resulting values of the coefficient of determination confirm the high accuracy of the approximation. Graphs of the dependency are presented. Two examples of analytical solutions to the problem are provided, illustrating the use of the proposed method. In the first example, all employees have the same initial average training grades in all areas, and in the second example, average grades differ.

Keywords: average grade, average grade increment, learning time, learning curve, approximation, least squares method.

For citation: Reznikov D.A. Development of an algorithm for solving the problem of distributing training time in training areas. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2024;12(2). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1540 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.008

Введение

В течение всего периода прохождения службы в уголовно-исполнительной системе Российской Федерации сотрудники постоянно совершенствуют свои знания, умения и навыки в рамках служебной подготовки.

Основными задачами профессиональной подготовки являются:

1) обучение сотрудников учреждений и органов эффективным действиям в служебной деятельности;

2) формирование у личного состава знаний в области права, обеспечивающих постоянное и успешное выполнение оперативно-служебных и служебно-боевых задач;

3) совершенствование знаний, способствующих повышению общей правовой культуры сотрудников;

4) совершенствование умений и навыков руководства по управлению, обучению и воспитанию сотрудников, находящихся в их подчинении;

5) внедрение в служебную деятельность достижений науки и техники, новейших форм, способов и методов деятельности, основ научной организации труда в подразделении;

6) формирование профессионального самосознания сотрудников, чувства ответственности за собственные действия, стремления к постоянному совершенствованию своего профессионального мастерства;

7) отработка приемов и способов обеспечения служебной и личной безопасности в повседневной деятельности, в случае чрезвычайных обстоятельств, а также в экстремальных условиях служебной деятельности;

8) формирование у личного состава постоянной готовности решительно, оперативно и умело пресекать противоправные действия, поддерживать постоянную готовность к действиям, связанным с применением физической силы, специальных средств и огнестрельного оружия.

Целью исследования является повышение профессиональной подготовки сотрудников уголовно-исполнительной системы за счет распределения времени обучения между направлениями подготовки. Для этого осуществлена математическая формализация задачи распределения времени обучения, обеспечивающего максимальное значение минимальной средней оценки по направлениям, и разработан эффективный алгоритм решения.

Постановка задачи и предложенный алгоритм решения отличаются научной новизной.

Совершенствование знаний, умений и навыков сотрудников в рамках служебной подготовки представляет процесс научения [1, 2].

Решение задач оптимизации образовательных программ с учетом процессов научения рассмотрены в работах [3, 4].

В данной работе будет рассмотрено итеративное научение, представляющее процесс и результат приобретения индивидуального опыта в ходе многократного повторения для достижения фиксированной цели [5, 6].

Приращение средней оценки по направлению в зависимости от выделенного времени можно представить в виде кривой научения.

В литературе [7–9] кривой научения называют графическое представление скорости обучения определенному знанию или виду деятельности, рассмотрены возможные ее аппроксимации в зависимости от состояний внешней среды.

Постановка задачи.

На реализацию плана служебной подготовки сотрудников пенитенциарной системы, включающего *n* направлений, отводится в календарном году *T* часов. Требуется распределить время подготовки по направлениям так, чтобы обеспечить максимальное значение минимальной средней оценки по направлениям. Обозначим x_i время, выделенное *i*-ому направлению; $\Phi_i(V_{i0}, x_i)$ – приращение средней оценки по *i*-ому направлению в зависимости от выделенного времени. Зависимость Φ_i определяется на основе статистических данных и экспертных оценок, V_{i0} – средняя оценка при $x_i = 0$.

Определить $x = \{x_i, i = \overline{1,n}\}$, максимизирующие (1)

$$\min_i \left[V_{i0} + \Phi_i\left(V_{i0}, x_i\right)\right], \tag{1}$$

при ограничении (2)

$$\sum_i x_i \le T \,. \tag{2}$$

Обозначим

$$\gamma = \min\left[V_{i0} + \Phi_i\left(V_{i0}, x_i\right)\right]. \tag{3}$$

С учетом (3) имеем $V_{i0} + \Phi_i\left(V_{i0}, x_i\right) \ge \gamma$, откуда получим (4)

$$\Phi_i\left(V_{i0}, x_i\right) \ge \gamma - V_{i0}\,. \tag{4}$$

Примем, что $\Phi_i\left(V_{i0}, 0\right) = 0$, то есть при отсутствии обучения по *i*-ому направлению оценка не изменяется.

Материалы и методы

Описание алгоритма решения задачи.

Шаг 1. Примем, что Φ_i возрастающая непрерывная функция x_i, $0 \le V_{i0} < M$, где M – максимальная оценка.

Упорядочим V_{i0} по возрастанию, то есть $V_{10} \le V_{20} \le \ldots \le V_{n0}$.

Пусть n_1 – число направлений с минимальными оценками V_{i0}.

Из уравнения (5)

$$\Phi_i\left(V_{i0}, x_i\right) = \gamma - V_{i0}, \; i = \overline{1, n_1} \tag{5}$$

определяем (6)

$$x_i = Q_i\left(V_{i0}, \gamma\right), \tag{6}$$

а из уравнения (7)

$$\sum_i Q_i\left(V_{i0}, \gamma\right) = T \tag{7}$$

определяем (8)

$$\gamma_1 = f_i\left(T\right). \tag{8}$$

Если $\gamma_1 \le V_{i0}$, $i = n_1 + 1$, то задача имеет решение (9)

$$x_i = Q_i\left(V_{i0}, \gamma_1\right),\ i = \overline{1, n_1}, \tag{9}$$

остальные $x_i = 0$.

Если $\gamma_1 > V_{i0}$, $i = n_1 + 1$, то переходим к следующему шагу.

Шаг 2. Пусть n_2 число направлений с минимальными оценками V_{i0} за исключением направлений, рассмотренных на первом шаге.

Из уравнения (5) определяем (6), где $V_{i0} = V_{n_1+1,0} = V_{n_1+2,0} = \ldots = V_{n_1+n_2,0}$, и затем из уравнения (7) определяем γ_2 по аналогии с (8).

Если $\gamma_2 \le V_{i0}$, $i = n_1 + n_2 + 1$, то задача решена.

В противном случае повторяем шаг 2.

Вид зависимости $\Phi\left(V_0, x\right)$ для i-го направления подготовки определен аппроксимацией статистических табличных данных уравнением вида (10):

$$y = \frac{ax}{b + x}, \tag{10}$$

где a=M – V_0, M – максимальная оценка по направлению подготовки.

Выбор функции (10) обоснован тем, что при $x \to \infty$ $\Phi\left(V_0, x\right) = a$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{b + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{\frac{b}{x} + 1} = a .$$

Вид кривой, описанной зависимостью $y = \dfrac{ax}{b + x}$, представлен на Рисунке 1.

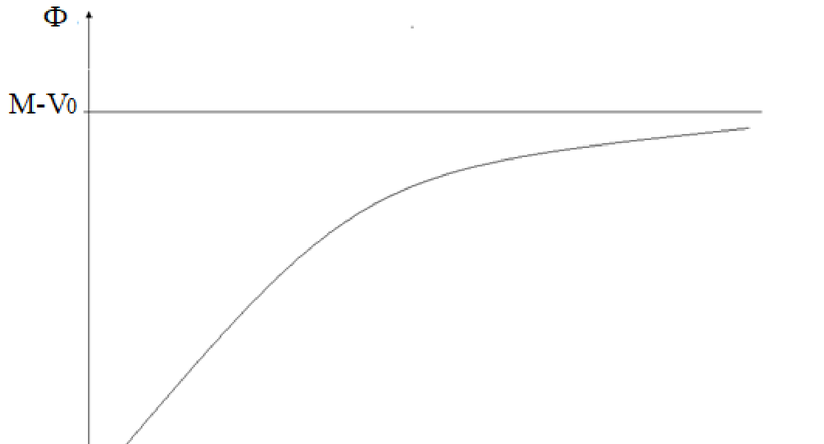

Рисунок 1 – Пример кривой научения
Figure 1 – An example of a learning curve

Неизвестный коэффициент b определим методом наименьших квадратов [10], согласно которому частная производная y по b должна равняться нулю $\frac{\partial y}{\partial b}=0$.

Получим

$$\frac{\partial y}{\partial b}=2\cdot\sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{ax_j}{b+x_j}-y_j^*\right)\cdot\left(-\frac{ax_j}{\left(b+x_j\right)^2}\right)\right)=0. \tag{11}$$

Проведем преобразование уравнения (11):

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\left(\frac{ax_j}{b+x_j}-y_j^*\right)\cdot\left(-\frac{ax_j}{\left(b+x_j\right)^2}\right)\right)=\sum_{j=1}^{m}\left(-\frac{a^2x_j^2}{\left(b+x_j\right)^3}+\frac{ax_jy_j^*}{\left(b+x_j\right)^2}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{-a^2x_j^2+abx_jy_j^*+ax_j^2y_j^*}{\left(b+x_j\right)^3}\right)=0,$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(-a^2x_j^2+abx_jy_j^*+ax_j^2y_j^*\right)=0$$

или

$$-a\sum_{j=1}^{m}x_j^2+b\sum_{j=1}^{m}x_jy_j^*+\sum_{j=1}^{m}x_j^2y_j^*=0.$$

Сделав несложные преобразования, получим (12):

$$b=\frac{a\sum_{j=1}^{m}x_j^2-\sum_{j=1}^{m}x_j^2y_j^*}{\sum_{j=1}^{m}x_jy_j^*},\ b\neq -x_j, \tag{12}$$

где x_j, y_j^* – статистические данные.

Для оценки величины достоверности аппроксимации конкретных статистических данных рассчитаны значения коэффициента детерминации $R^2\in[0{,}93;0{,}99]$.

Для зависимости, описывающей приращение средней оценки по i-ому направлению от выделенного времени, вида (13):

$$\Phi_i\left(V_{i0}\right)=\frac{\left(M-V_{i0}\right)x_i}{b_i+x_i},\ i=\overline{1,n}, \tag{13}$$

проведя несложные преобразования, с учетом (5) получим (14):

$$x_i=\frac{b_i\cdot\gamma-b_iV_{i0}}{M-\gamma}. \tag{14}$$

Согласно (7)

$$T=\sum_i x_i=\frac{\sum_i b_i\gamma-\sum_i\left(b_iV_{i0}\right)}{M-\gamma}. \tag{15}$$

После несложных преобразований, получим (16)

$$TM - T\gamma = \gamma \sum_i b_i - \sum_i (b_i V_{i0}),$$

$$\gamma\left(\sum_i b_i + T\right) = TM + \sum_i (b_i V_{i0}),$$

$$\gamma = \frac{TM + \sum_i b_i V_{i0}}{T + B}, \qquad (16)$$

где $B = \sum_i b_i$.

Результаты и обсуждение

Пример 1. Рассмотрим пять направлений служебной подготовки сотрудников. Пусть зависимость приращения средней оценки по *i*-ому направлению от выделенного времени имеет вид (13).

Примем $V_{i0} = 0$, $i = \overline{1,5}$, $T = 30$, $M = 5$, $b_1 = 1$, $b_2 = 1{,}5$, $b_3 = 2$, $b_4 = 2{,}5$, $b_5 = 3$.

Из уравнения (14) получим

$$x_i = \frac{b_i \cdot \gamma}{M - \gamma}.$$

Из уравнения (15) получим

$$T = \frac{\sum_i b_i \gamma}{M - \gamma},$$

проведя несложные преобразования, получим

$$\gamma = \frac{TM}{T + B}.$$

Если $M = 5$, $T = 30$, $B = 10$, то

$$\gamma = \frac{30 \cdot 5}{40} = 3{,}75,$$

т. е. средняя оценка будет равна 3,75.

При этом, время обучения по первому направлению составит $x_1 = \frac{1 \cdot 3{,}75}{5 - 3{,}75} = 3$ часа, по второму $x_2 = 4{,}5$, по третьему $x_3 = 6$, по четвертому $x_4 = 7{,}5$, по пятому $x_5 = 9$.

Пример 2. Рассмотрим четыре направления служебной подготовки сотрудников. Пусть зависимость приращения средней оценки по *i*-ому направлению от выделенного времени имеет вид (13).

Примем $V_{10} = 0$, $V_{20} = 2$, $V_{30} = 2$, $V_{40} = 4$, $T = 30$, $M = 4$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, $b_4 = 4$.

Шаг 1. Берем первое направление с минимальным V_{i0}. Из уравнения

$$\frac{(M - V_{10})x_1}{b_1 + x_1} = \gamma_1 - V_{10}$$

получаем

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot \gamma - b_1 V_{10}}{M - \gamma}, \ \gamma_1 = \frac{TM + b_1 V_{10}}{T + b_1} = \frac{30 \cdot 4}{30 + 1} \approx 3{,}87 .$$

Так как $\gamma_1 > V_{20} = V_{30} = 2$, переходим ко второму шагу.

Шаг 2. Имеем

$$x_i = \frac{b_i(\gamma_2 - V_{i0})}{M - \gamma_2}, \ i = 1,2,3 ,$$

$$(M - \gamma_2)T = B\gamma_2 - \sum_i b_i V_{i0} ,$$

$$\gamma_2 = \frac{TM + \sum_{i=1}^{3} b_i V_{i0}}{T + B}, \ i = 1,2,3 , \ B = \sum_{i=1}^{3} b_i .$$

В результате несложных вычислений получим $\gamma_2 \approx 3{,}6$.

Поскольку V_{40} больше, чем γ_2, алгоритм завершен.

Определяем $x_1 = \frac{3{,}6}{4 - 3{,}6} = 9$, $x_2 = \frac{2 \cdot (3{,}6 - 2)}{4 - 3{,}6} = 8$, $x_3 = \frac{2 \cdot (3{,}6 - 2)}{4 - 3{,}6} = 8$.

Таким образом, в плане служебной подготовки необходимо выделить 9 часов для первого направления подготовки, 8 часов для второго и третьего направлений для достижения средних оценок 3,6, соответственно.

Следует отметить, что хорошие результаты аппроксимации статистических данных для определения аналитической зависимости *Ф(x)* дают степенная функция (17), график которой представлен на Рисунке 2, и экспоненциальная зависимость (18), график которой представлен на Рисунке 3:

$$y = ax^b , \tag{17}$$

где a, b – коэффициенты, x – время обучения, y – приращение средней оценки;

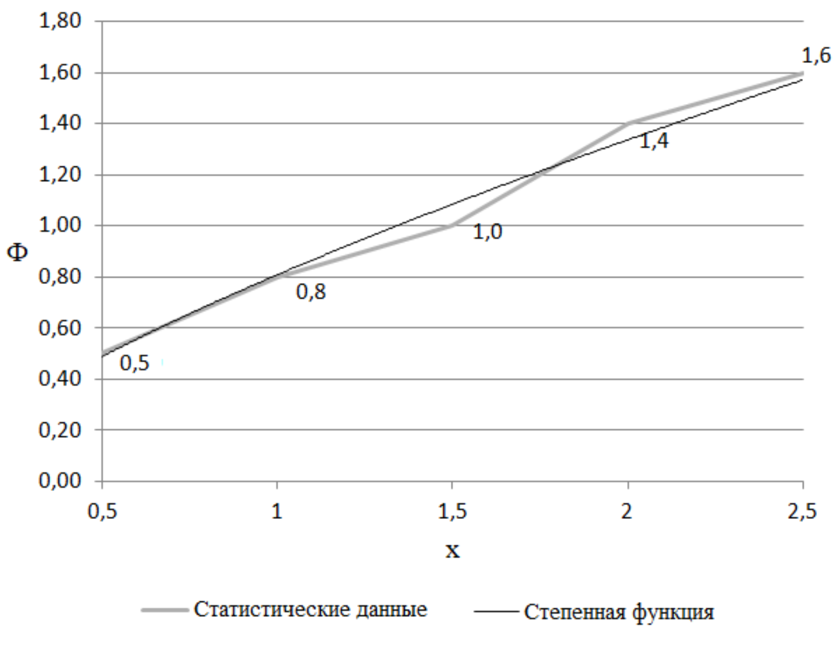

Рисунок 2 – График кривой научения, описанный степенной функцией
Figure 2 – A graph of the learning curve described by a power function

$$y = ae^{-bx}, \tag{18}$$

где a, b – коэффициенты, x – время обучения, y – приращение средней оценки.

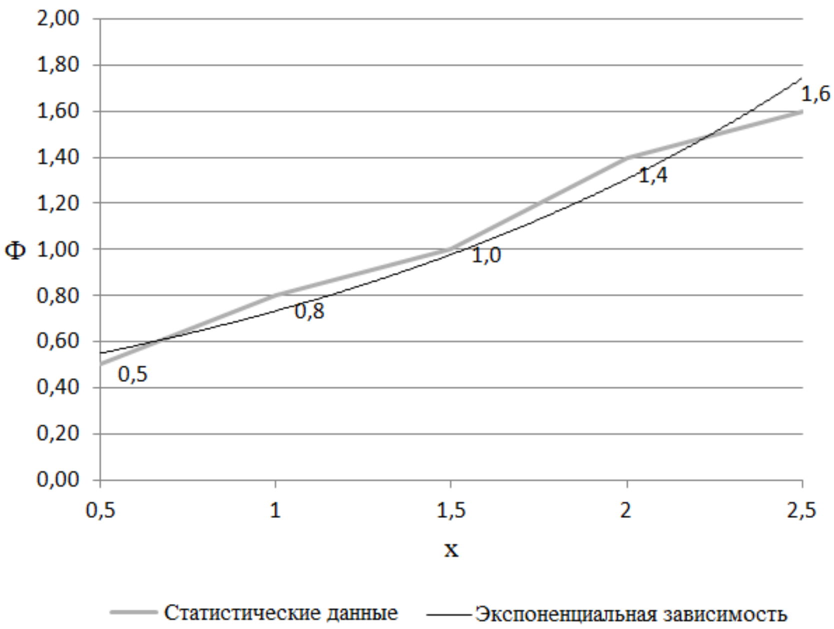

Рисунок 3 – График кривой научения, описанный экспоненциальной зависимостью
Figure 3 – Graph of the learning curve described by exponential dependence

Значение коэффициента детерминации (R-квадрат) для этих видов функций принадлежит диапазону [0,91; 0,97].

В этом случае, если аппроксимировать статистические данные степенной или экспоненциальной зависимостями, для решения поставленной задачи необходимо применение численных методов.

Заключение

В работе приведена математическая формализация задачи распределения времени обучения по направлениям подготовки для обеспечения максимального значении минимальной средней оценки по каждому направлению. Разработан алгоритм решения, в котором вид зависимости приращения средней оценки по направлениям подготовки от времени обучения определен аппроксимацией статистических данных.

Основное направление дальнейших исследований состоит в практической реализации предложенного алгоритма для оптимизации распределения часов по направлениям (правовой, специальной, технической, профессиональной, психологической, медицинской, тактической подготовки) в рамках служебной подготовки сотрудников конкретного учреждения или органа ФСИН России.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Otsuka J. *The Role of Mathematics in Evolutionary Theory*. Cambridge: Cambridge University Press; 2020. 74 p.
2. Белов М.В., Новиков Д.А. *Модели технологий*. Москва: ЛЕНАНД; 2019. 160 с.
   Belov M.V., Novikov D.A. *Modeli tekhnologii.* Moscow: LENAND; 2019. 160 p. (In Russ.).

3. Строганов В.Ю., Цветков Ю.Б. Методика оптимизации цифровой модели образовательной программы на основе функций научения-забывания. В сборнике: *Цифровые технологии в инженерном образовании: новые тренды и опыт внедрения, 28-29 ноября 2019 года, Москва, Россия.* Москва: Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана; 2020. С. 108–112.
Stroganov V.Yu., Tsvetkov Yu.B. Optimization methodology of curriculum digital model based on learning-forgetting functions. In: *Tsifrovye tekhnologii v inzhenernom obrazovanii: novye trendy i opyt vnedreniya, 28-29 November 2019, Moscow, Russia.* Moscow: Bauman Moscow State Technical University; 2020. P. 108–112. (In Russ.).
4. Rawle F., Bowen T., Murck B., Hong R.J. Curriculum mapping across the disciplines: differences, approaches, and strategies. *Collected Essays on Learning and Teaching.* 2017;10:75–88. https://doi.org/10.22329/celt.v10i0.4765.
5. Новиков Д.А. *Закономерности итеративного научения.* Москва: Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН; 1998. 96 с.
Novikov D.A. *Zakonomernosti iterativnogo naucheniya.* Moscow: Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences; 1998. 96 p. (In Russ.).
6. Белов М.В., Новиков Д.А. Модели опыта. *Проблемы управления.* 2021;(1):43–60. http://doi.org/10.25728/pu.2021.1.5.
Belov M.V., Novikov D.A. Models of experience. *Problemy upravleniya = Control Sciences*. 2021;(1):43–60. (In Russ.). http://doi.org/10.25728/pu.2021.1.5.
7. Белов М.В., Новиков Д.А., Рогаткин А.Д. Оценка кривых научения. *Управление большими системами: сборник трудов.* 2019;(82):6–27. http://doi.org/10.25728/ubs.2019.82.1.
Belov M.V., Novikov D.A., Rogatkin A.D. Learning curves estimates. *Upravlenie bol'shimi sistemami: sbornik trudov = Large-Scale Systems Control.* 2019;(82):6–27. (In Russ.). http://doi.org/10.25728/ubs.2019.82.1.
8. Anzanello M.J., Fogliatto F.S. Learning Curve Models and Applications: Literature Review and Research Directions. *International Journal of Industrial Ergonomics.* 2011;41(5):573–583. http://doi.org/10.1016/j.ergon.2011.05.001.
9. Henderson B.D. The Application and Misapplication of the Experience Curve. *Journal of Business Strategy.* 1984;4(3):3–9. https://doi.org/10.1108/eb039027.
10. Езерский В.В. *Избранные разделы высшей математики. Выпуск 7. Методы аппроксимации функций.* Омск: Сибирский государственный университет физической культуры и спорта; 2011. 52 с.
Ezerskii V.V. *Izbrannye razdely vysshei matematiki. Vypusk 7. Metody approksimatsii funktsii.* Omsk: Siberian State Universitey of Physical Culture and Sports; 2011. 52 p. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Резников Дмитрий Александрович, адьюнкт, Воронежский институт ФСИН России, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: i@dareznikov.ru

Dmitriy A. Reznikov, adjunct, Voronezh Institute of the Russian Federal Penitentiary Service, Voronezh, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 22.03.2024; одобрена после рецензирования 09.04.2024; принята к публикации 19.04.2024.

The article was submitted 22.03.2024; approved after reviewing 09.04.2024; accepted for publication 19.04.2024.