

УДК 519.81

DOI: [10.26102/2310-6018/2024.45.2.027](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2024.45.2.027)

## Формализация многокритериальной транспортной задачи с временными ограничениями

М.А. Белых

*Воронежский государственный технический университет, Воронеж,  
Российская Федерация*

**Резюме.** В статье рассматривается математическая постановка многокритериальной транспортной задачи с временными ограничениями. В качестве критериев в ней выступают стоимость перевозок, их важность и временные затраты на перевозки. Особенностью данной задачи является наличие временных ограничений, таких как временные окна у заказчиков и длительность пребывания транспортных средств в пути. В качестве решения многокритериальной задачи предлагается отбор точек, оптимальных по Парето, поскольку данный метод оптимизации имеет широкий спектр задач для применения. Приводятся формулировка парето-оптимизации и определение парето-оптимальности. Рассматриваются методы оптимизации по Парето: лексикографический метод и скаляризация, разновидностями которого являются метод  $\epsilon$ -ограничений, в основе которого лежит градация критериев оптимизации в порядке убывания их важности, и метод линейной скаляризации, механизм работы которого основан на объединении всех функций оптимизации в одну. На примере рассматривается приведение формализованной многокритериальной транспортной задачи к виду, пригодному для осуществления скаляризации. Определение парето-эффективности представляется приемлемым для реализации ее механизмов в составе адаптивной системы поддержки принятия решений, направленной на решение задач оптимизации в различных областях и оперирующей эвристическими алгоритмами.

**Ключевые слова:** задача оптимизации, многокритериальная транспортная задача, задача с временными ограничениями, оптимизация по Парето, парето-оптимальность, системы поддержки принятия решений.

**Для цитирования:** Белых М.А. Формализация многокритериальной транспортной задачи с временными ограничениями. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2024;12(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1557> DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.027

## Formalization of a multi-criteria transport task with time constraints

M.A. Belykh

*Voronezh State Technical University, Voronezh, the Russian Federation*

**Abstract.** The article considers the mathematical formulation of a multi-criteria transport problem with time constraints. The criteria in it are the cost of transportation, their importance and the time spent on transportation. A feature of this task is the presence of time constraints, such as time windows for customers and the duration of stay of vehicles on the road. As a solution to the multi-criteria problem, the selection of Pareto optimal points is proposed, since this optimization method has a wide range of tasks to apply. The formulation of pareto optimization and the definition of pareto optimality are given. Pareto optimization methods are considered: the lexicographic method and scalarization, the varieties of which are the method of  $\epsilon$ -constraints, which is based on the gradation of optimization criteria in descending order of their importance, and the method of linear scalarization, the mechanism of which is based on combining all optimization functions into one. Using the example, we consider the reduction of a formalized multicriteria transport problem to a form suitable for scalarization. The definition of

pareto efficiency seems acceptable for the implementation of its mechanisms as part of an adaptive decision support system aimed at solving optimization problems in various fields and operating with heuristic algorithms.

**Keywords:** optimization problem, multi-criteria transport problem, time-bound problem, Pareto optimization, Pareto optimality, decision support systems.

**For citation:** Belykh M.A. Formalization of a multi-criteria transport task with time constraints. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2024;12(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1557> DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.027 (In Russ.).

## Введение

Современные логистические реалии требуют учета множества различных факторов. К таковым можно отнести транспортные расходы (в широком смысле), ситуацию на дорожных участках, количество и грузоподъемность транспортных средств в автопарке, время для доставки в каждый пункт и т. д. Все это необходимо учитывать при построении маршрутов доставки грузов, что является в своей основе многокритериальной транспортной задачи.

Данная разновидность задачи является многокритериальной вариацией задач оптимизации – широкого класса, решение которого основано на выборе наиболее приемлемого варианта из допустимых. Иными словами, это задача поиска экстремума функции (минимума или максимума) в пределах конечной области, представленной рядом математически определенных ограничений в виде равенств и неравенств.

Многокритериальная задача оптимизации характеризуется наличием двух и более критериев (целевых функций (ЦФ)), которым должно удовлетворять решение одновременно. И классическая, и многокритериальная задача оптимизации, в частности, их вариации с временными ограничениями периодически рассматриваются в различных сферах деятельности, что подтверждается регулярными публикациями как отечественных [1–3], так и зарубежных [4] исследователей.

В рамках данной статьи приводится формулировка многокритериальной транспортной задачи с временными ограничениями, такими как наличие у потребителей, которым необходимо доставить груз, временных окон доступа.

## Формулировка многокритериальной транспортной задачи

Многокритериальная транспортная задача является усложненной вариацией (модификацией) классической транспортной задачи, которая включает в себя несколько ЦФ, которые необходимо оптимизировать одновременно [5, 6]. Сформулируем следующую многокритериальную задачу.

Пусть на момент времени  $t$  имеется автопарк из набора однотипных транспортных средств (ТС) в количестве  $k$  единиц ( $k = \overline{1, K}$ ) и набор заказов  $j = \overline{1, J}$ . Каждое ТС, как и каждый заказ, характеризуется определенным набором координат  $(x_i, y_i)$ . Также имеется некоторый набор узлов  $L$ , каждый из которых является некоторой точкой из имеющихся координат, и временное окно  $t_j^* = [t_j^{opn}, t_j^{cls}]$  для каждого заказа, характеризуемое отрезком времени со значениями открытия и закрытия доступа ( $t_j^{opn}$  и  $t_j^{cls}$  соответственно).

Первую ЦФ можно сформулировать следующим образом: минимизация стоимости суммарного маршрута всех ТС автопарка. Спецификой данной задачи является фактор ее решения в любой момент времени, что означает возможность изменения координат ТС. В связи с этим введем в рассмотрение функцию  $\rho(k, j, t)$ , которая будет определять расстояние от ТС  $k$  до поставщика  $j$  в момент времени  $t$ . Также

введем функцию  $f(\cdot)$ , определяющую стоимость маршрута для данного ТС по данному расстоянию.

Искомая матрица может быть представлена в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1J} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{K1} & \dots & x_{KJ} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где каждый элемент  $x_{kj}$  определяется как

$$x_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если ТС } k \text{ следует к заказу } j, (k = \overline{1, K}, j = \overline{1, J}). \\ 0, & \text{в обратном случае,} \end{cases} \quad (2)$$

Также стоит отметить допущение, что выполнение заказа может быть связано с поездкой в некоторую точку. На основании этих данных ЦФ может быть сформирована как

$$\min F_1 = \min \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=1}^J x_{kj} (f(k, \rho(k, j_1, t)) + f(k, \rho(j_1, j_2, t))), \quad (3)$$

где  $j_1$  – некоторый заказ из множества заказов  $J$ , а  $j_2$  – конечная точка для заказа  $j_1$ .

Также необходимо ввести ограничение на единственность выбираемого ТС:

$$\sum_{k=1}^K x_{kj} = 1 \quad (j = \overline{1, J}). \quad (4)$$

Дискретность обозначенной задачи формулируется следующим ограничением:

$$x_{kj} \in \{0, 1\}. \quad (5)$$

Одновременно с этим имеется матрица

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1J} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{K1} & \dots & h_{KJ} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где каждый элемент  $h_{kj} \in (0, 1]$  обозначает степень важности выполнения конкретного заказа. Соответственно, чем больше значение элемента, тем выше приоритет выполнения заказа.

На основании этого вторую ЦФ можно сформулировать как максимизацию выполнения заказов с наибольшими приоритетами, т. е.

$$\max F_2 = \max \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J x_{kj} h_{kj}. \quad (7)$$

В дополнение имеется матрица

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1J} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{K1} & \dots & t_{KJ} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где  $t_{kj} \geq 0$  характеризуется временем выполнения ТС  $k$  заказа  $j$ . В случае если  $t_{kj} = 0$  подразумевается, что ТС  $k$  не имеет возможности выполнить заказ  $j$ . Отсюда третья ЦФ может быть сформулирована следующим образом:

$$\min F_3 = \min \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J x_{kj} t_{kj}, t_{kj} > 0. \quad (9)$$

Далее – ограничения, связанные со временем.

Пусть функция  $T(\cdot)$  определяет длительность пребывания в пути, задаваемом расстоянием  $\rho$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^K x_{kj} T(\rho(k, j, t)) \leq T_j \quad (j = \overline{1, J}) \quad (10)$$

и дополнительно, с учетом существования временных окон, накладывается ограничение-запрет на посещение вне временного окна

$$x_{kj} T(\rho(k, j, t)) \in t_j^* \quad (k = \overline{1, K}, j = \overline{1, J}). \quad (11)$$

### Многокритериальная оптимизация по Парето

Решение задачи многоцелевой оптимизации иногда понимается как аппроксимация или вычисление всех, или репрезентативного набора оптимальных решений по Парето.

В различных работах и публикациях приводятся разновидности определения оптимальности по Парето [7–9], эквивалентные по своему содержанию.

Один из методов оптимизации по Парето – лексикографический метод (lexicographic method) – подразумевает, что все критерии многокритериальной задачи должны быть упорядочены в порядке убывания степени важности – идея последовательных уступок или масштабирования [10–12]. Другой метод – скаляризации (scalarizing) – основывается на формулировке задачи однокритериальной оптимизации, оптимальные решения которой являются парето-оптимальными решениями многокритериальной задачи; т. е. критерии оптимальности сводятся в одну целевую функцию задачи оптимизации [13, 14].

Рассмотрим метод последовательных уступок подробнее. На начальном этапе решается однокритериальная задача оптимизации по первому критерию:

$$y_1^* = \max_{X \in D} f_1(X). \quad (12)$$

После этого вводится определенная на основании каких-либо условий или заключений уступка  $\Delta y_1$ . С учетом уступки формируется и решается однокритериальная задача оптимизации по второму критерию:

$$y_2^* = \max_{\substack{X \in D \\ f_1(X) \geq y_1^* - \Delta y_1}} f_2(X). \quad (13)$$

Предоставление уступок по каждому критерию и решения однокритериальных задач продолжается до тех пор, пока не будет достигнут последний этап.

Данный метод также именуется методом  $\varepsilon$ -ограничений ( $\varepsilon$ -constrain method), который в общем виде может быть представлен как

$$\min_{x \in X} (\max_{j \in \{1, \dots, k\}} f_j(x)) \quad (14)$$

$$f_i(x) \leq (\geq) \varepsilon_i, i \in \{1, \dots, k\} \setminus \{j\}$$

Более простым является подход линейной скаляризации (linear scalarization), который заключается в объединении различных функций оптимизации в одну функцию. Однако этот метод позволяет находить только поддерживаемые решения проблемы (т. е. точки на выпуклой оболочке набора целей) [12]. Рисунок 1 демонстрирует, что, когда допустимое множество не является выпуклым, не все эффективные решения могут быть найдены. В данном примере минимизируется функция

$$\min F(x) = \omega_1 f_1(x) + \omega_2 f_2(x), \quad (15)$$

где  $f_1(x) = x_1$ ,  $f_2(x) = 1 + x_2^2 - x_1 - a \sin(b\pi x_1)$ , такая, что  $x_1 = [0; 1]$ ,  $x_2 = [-2; 2]$ . Для получения невыпуклого набора результатов параметры  $a$  и  $b$  принимают значения  $a = 0,1$ ,  $b = 3$ . При этом  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ ,  $\omega_1 \in [0,1]$ ,  $\omega_2 = 1 - \omega_1$ .

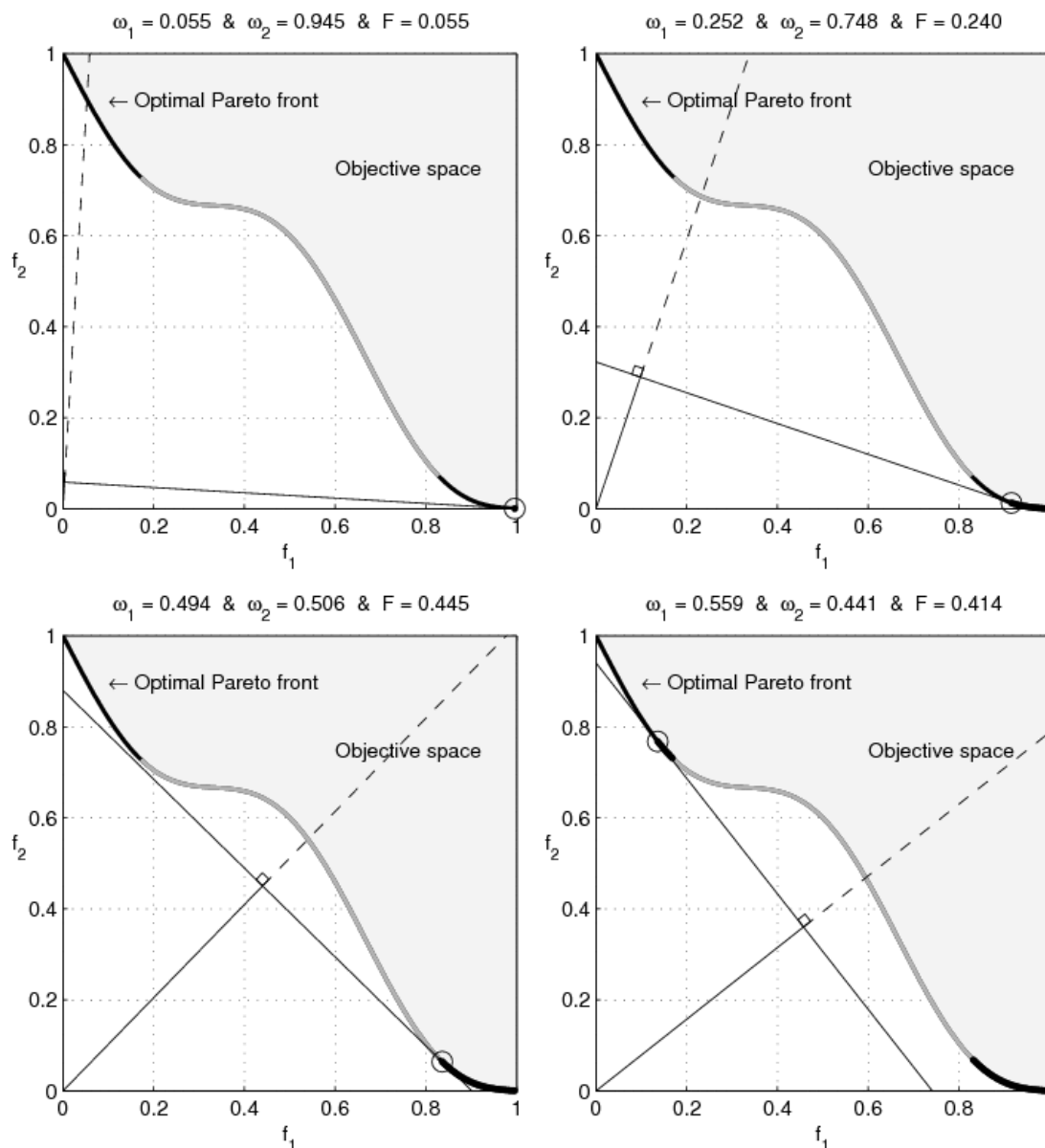


Рисунок 1 – Поиск эффективного решения при невыпуклом наборе результатов методом линейной скаляризации

Figure 1 – Search for an effective solution for a non-convex set of results by linear scalarization

Парето-оптимизация применяется во многих сферах, где присутствуют многокритериальные задачи оптимизации. К таковым относятся оптимизация процессов и управления, финансы, экономика, дизайн, распределение ресурсов и пр.

### Приведение многокритериальной транспортной задачи к оптимизации по Парето

Задача многокритериальной оптимизации заключается в существовании альтернативных математических вариантов, представляющих область допустимых решений, а также целевые функции, которые должны быть минимизированы (максимизированы) в данной области [11]. В математической формулировке она имеет следующее представление:

$$F = \min(\max)\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \quad (n \geq 2). \quad (16)$$

Также необходимо отметить, что задачу минимизации или максимизации можно преобразовать в обратную задачу (максимизации или минимизации соответственно) путем умножения ЦФ на  $-1$  [11].

Исходя из этого, описанная в п. 1 задача может быть определена в виде

$$F = \min\{F_1, -F_2, F_3\} \quad (17)$$

либо

$$F = \max\{-F_1, F_2, -F_3\} \quad (18)$$

в зависимости от того, какой из критериев (либо минимизация стоимости (3) или минимизация времени (9), либо максимизация важности (7)) будет являться преобладающим.

Соответственно, возможных вариантов парето-оптимизации может быть несколько. В качестве примера можно разобрать следующий вариант.

Пусть для некоторого предприятия по решению коллегии экспертов принято решение, что во главе должна быть необходимость в минимизации временных затрат с учетом степеней важности, а стоимость перевозки ставится на последнее место. В таком случае за основу берется формула (17), которая может быть переписана с учетом выдвинутых экспертами важностей критериев как

$$F = \min\{F_3, -F_2, F_1\}. \quad (19)$$

Тогда, на основании (12)–(14),

$$y_1^* = \min F_3, \quad y_2^* = \min_{F_3 \leq y_1^* - \Delta y_1} (-F_2), \quad y_3^* = \min_{\substack{F_3 \leq y_1^* - \Delta y_1 \\ F_2 \leq y_2^* - \Delta y_2}} F_1. \quad (20)$$

Представленные операции, равно как и формирование самой многокритериальной транспортной задачи, требуют наличия одного либо нескольких экспертов. От их решений и заключений будет зависеть дальнейший ход решения сформированной задачи.

Метод последовательных уступок интересен, в первую очередь, гибкостью и универсальностью. Помимо возможности применения в отношении различных по требованиям многокритериальных задач оптимизации, он позволяет учитывать различные факторы, как, например, упомянутые временные ограничения. Особенно актуальным данное свойство будет в тех случаях, когда имеется большое количество ограничений и критериев.

В качестве эффективного инструмента, служащего подспорьем для поиска решения многокритериальных задач, может быть использована интеллектуальная или адаптивная система поддержки принятия решений [15, 16], которая может посредством анализа исходных данных и обращения к внутренней базе знаний помочь экспертам не только в последующем решении задачи, но и обеспечить поддержку в корректной постановке задачи и приведении, например, по описанному выше методу оптимизации по Парето. Также ресурсная база подобного рода системы может свести к минимуму возможные проблемы при использовании метода последовательных уступок.

### Заключение

Задача многокритериальной оптимизации, особенно в ее транспортно-логистическом приложении, является остро актуальной. Наличие множества факторов усложняет процессы определения оптимальных решений. Сложность поиска оптимальных решений при наличии нескольких критериев обуславливается также



необходимостью определения важности каждого из них, что требует участия в постановке задачи одного или нескольких экспертов.

Методы оптимизации, в частности, парето-оптимизация, являются эффективным инструментом для решения многокритериальных задач, которые позволяют привести сложно сформулированную задачу к более простому с точки зрения постановки виду.

Как сами задачи, так и алгоритмы, и критерии оценки могут быть запрограммированы в виде программного комплекса – адаптивной системы, которая может стать необходимым и эффективным средством поддержки принятия решений, учитывающей изменения обстановки в реальном времени.

В данной статье была выполнена формализация многокритериальной транспортной задачи с временными ограничениями, а также приведены примеры ее оптимизации по Парето. Данные материалы предполагаются к дальнейшему развитию и апробации средствами разрабатываемой автором адаптивной системы поддержки принятия решений.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Титова Е.И., Чапрасова А.В. Разрешимость транспортной задачи по критерию времени. *Молодой ученый*. 2014;(4):36–38.  
Titova E.I., Chaprasova A.V. Razreshimost' transportnoi zadachi po kriteriyu vremeni. *Molodoi uchenyi*. 2014;(4):36–38. (In Russ.).
2. Гоголин В.А., Николаева Е.А. Транспортная задача с учетом времени поставок. *Современные наукоемкие технологии*. 2017;(7):23–26.  
Gogolin V.A., Nikolaeva E.A. Transport take with time of supply. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii = Modern High Technologies*. 2017;(7):23–26. (In Russ.).
3. Гвоздев Л.Р., Медведева Т.А. Решение задачи маршрутизации транспортных средств с временными окнами с помощью алгоритма муравьиных колоний. *Молодой исследователь Дона*. 2022;(3):58–61.  
Gvozdev L.R., Medvedeva T.A. Solving the problem of vehicles routing with time windows using the ant colony algorithm. *Molodoi issledovatel' Dona = Young Don Researcher*. 2022;(3):58–61. (In Russ.).
4. Huang N., Li J., Zhu W., Qin H. The multi-trip vehicle routing problem with time windows and unloading queue at depot. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*. 2021;152. <https://doi.org/10.1016/j.tre.2021.102370>
5. Кошкин Б.П., Носков С.И., Оленцевич В.А., Рязанцев А.И. О многокритериальной транспортной задаче. *Фундаментальные исследования*. 2017;(7):35–38.  
Koshkin B.P., Noskov S.I., Olentsevich V.A., Ryazantsev A.I. About multi-criteria transport problem. *Fundamental'nye issledovaniya = Fundamental Research*. 2017;(7):35–38. (In Russ.).
6. Золотарюк А.В. Математическая модель многокритериальной оптимизации транспортных перевозок. *Инновационные технологии в науке и образовании*. 2015;(1):317–320.  
Zolotaryuk A.V. Matematicheskaya model' mnogokriterial'noi optimizatsii transportnykh perevozk. *Innovatsionnye tekhnologii v nauke i obrazovanii*. 2015;(1):317–320. (In Russ.).
7. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Москва: Физматлит; 2007. 256 с.  
Podinovskii V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach*. Moscow: Fizmatlit; 2007. 256 p. (In Russ.).

8. Ногин В.Д. *Множество и принцип Парето*. Санкт-Петербург: Издательско-полиграфическая ассоциация высших учебных заведений; 2022. 110 с.  
Nogin V.D. *Mnozhestvo i printsip Pareto*. Saint Petersburg: Izdatel'sko-poligraficheskaya assotsiatsiya vysshikh uchebnykh zavedenii; 2022. 110 p. (In Russ.).
9. Подиновский В.В. *Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа*. Москва: Издательство Юрайт; 2024. 486 с.  
Podinovskii V.V. *Mnogokriterial'nye zadachi prinyatiya reshenii: teoriya i metody analiza*. Moscow: Publishing URAIT; 2024. 486 p. (In Russ.).
10. Кушнир А.Ю. Многокритериальная оптимизация транспортных перевозок. В сборнике: *В Международном научном студенческом конгрессе «Развитие российской экономики: проблемы и перспективы»: Развитие российской экономики: проблемы и перспективы: сборник статей участников V Международного научного студенческого конгресса, 28 февраля – 18 апреля 2014 года, Москва, Россия*. Москва: Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации; 2014. С. 826–830.  
Kushnir A.Yu. *Mnogokriterial'naya optimizatsiya transportnykh perezovok*. In: *V Mezhdunarodnyi nauchnyi studencheskii kongress «Razvitie rossiiskoi ekonomiki: problemy i perspektivy»: Razvitie rossiiskoi ekonomiki: problemy i perspektivy: sbornik statei uchastnikov V Mezhdunarodnogo nauchnogo studencheskogo kongressa, 28 February – 18 April 2014, Moscow, Russia*. Moscow: Finance University under the Government of the Russian Federation; 2014. P. 826–830. (In Russ.).
11. Зобнина О.В., Дю А.И., Бабаева Ю.А. Многокритериальная оптимизация. *StudNet*. 2021;4(1):87–93.  
Zobnina O.V., Du A.I., Babaeva Yu.A. Multi-criteria optimization. *StudNet*. 2021;4(1):87–93. (In Russ.).
12. Li J.-Y., Zhan Zh.-H., Li Y., Zhang J. Multiple Tasks for Multiple Objectives: A New Multiobjective Optimization Method via Multitask Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 2023. <https://doi.org/10.1109/TEVC.2023.3294307>
13. Hwang C.-L., Masud A.S.M. *Multiple Objective Decision Making – Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag; 1979. 358 p.
14. Брахман Т.Р. *Многокритериальность и выбор альтернативы в технике*. Москва: Радио и связь; 1984. 288 с.  
Brakhman T.R. *Mnogokriterial'nost' i vybor al'ternativy v tekhnike*. Moscow: Radio i svyaz'; 1984. 288 p. (In Russ.).
15. Белых М.А., Барабанов В.Ф., Подвальный С.Л., Донских А.К. Структура интеллектуальной системы поддержки эволюционных алгоритмов. *Вестник Воронежского государственного технического университета*. 2021;17(3):7–13. <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.17.3.001>  
Belykh M.A., Barabanov V.F., Podvalny S.L., Donskikh A.K. Structure of the intelligent system for supporting evolutionary algorithms. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2021;17(3):7–13. (In Russ.). <https://doi.org/10.36622/VSTU.2021.17.3.001>
16. Белых М.А., Барабанов А.В. Схема работы выбора эволюционного алгоритма интеллектуальной системы. *Информационные технологии моделирования и управления*. 2022;128(2):114–117.  
Belykh M.A., Barabanov A.V. Skhema raboty vybora evolyutsionnogo algoritma intellektual'noi sistemy. *Informatsionnye tekhnologii modelirovaniya i upravleniya*. 2022;128(2):114–117. (In Russ.).



## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Белых Михаил Алексеевич**, аспирант, **Mikhail A. Belykh**, PhD student, Voronezh State  
Воронежский государственный технический Technical University, Voronezh, the Russian  
университет, Воронеж, Российская Federation.  
Федерация.

*e-mail:* [belykh.ma@yandex.ru](mailto:belykh.ma@yandex.ru)

*Статья поступила в редакцию 18.04.2024; одобрена после рецензирования 14.05.2024;  
принята к публикации 17.05.2024.*

*The article was submitted 18.04.2024; approved after reviewing 14.05.2024;  
accepted for publication 17.05.2024.*