УДК 004:001.891.573
DOI: 10.26102/2310-6018/2024.46.3.007

Математическое моделирование циклических процессов в динамических синергетических системах

В.И. Лебедев

Северо-Кавказский Федеральный университет, Российская Федерация

Резюме. В работе исследуется возможность возникновения циклического поведения динамических синергетических систем при учёте нелинейных процессов разных возрастающих порядков. Системы представляются в виде динамических, нелинейных, дифференциальных уравнений в фазовых пространствах. Фазовые пространства образуют из существенных переменных, характеризующих систему. Существенные переменные образуют систему «параметрами порядка» для моделей. Изучены бифуркации в поведении ряда моделей динамических синергетических систем. Исследованы процессы возникновения циклического поведения в динамических синергетических системах. Изучаются нелинейные процессы в динамических системах и их изменения в особых точках фазовых диаграмм. Проведено изучение поведения и устойчивость синергетических моделей в областях простых элементарных катастроф типа «сборка» и «складка». Исследованы циклические процессы при катастрофе типа «сборка». Рассмотрена модель циклических логистических революций в региональных экономиках. Изучены циклы в «мягкой» по Арнольду катастрофе «ласточкин хвост». Исследовано возникновение циклических процессов, а также устойчивость циклов. Определены способы верификации моделей и возможности управления моделями. Исследованы области фазовых диаграмм для сложных нелинейных динамических систем с циклическим поведением. Обсуждена динамика циклов в разных областях фазового пространства для синергетических систем. Определены проблемы верификации и управления моделями с возможным появлением циклов, а также обсуждено появление циклов высшего порядка.

Ключевые слова: математические модели, синергетические системы, фазовые пространства, катастрофы, бифуркации, циклические процессы, верификация моделей, устойчивость циклов.

Для цитирования: Лебедев В.И. Математическое моделирование циклических процессов в динамических синергетических системах. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2024;12(3). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1563 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.46.3.007

Mathematical modeling of cyclic processes in dynamic synergetic systems

V.I. Lebedev

North Caucasus Federal University, Stavropol, the Russian Federation

Abstract. The paper investigates the possibility of cyclic behavior of dynamic synergetic systems taking into account nonlinear processes of different increasing orders. The systems are represented in the form of dynamic, nonlinear, differential equations in phase spaces. Phase spaces are formed from the essential variables characterizing the system. Essential variables form a system of "order parameters" for models. Bifurcations in the behavior of a number of models of dynamic synergetic systems have been studied and the processes of the emergence of cyclic behavior in dynamic synergetic systems have been studied. Nonlinear processes in dynamical systems and their changes at special points of phase diagrams are studied. The behavior and stability of synergetic models in the areas of simple elementary catastrophes such as "assembly" and "fold" have been studied. Cyclic processes in the event of an “assembly” type disaster are investigated. A model of cyclical logistic revolutions in regional economies is considered.

Cycles in the "soft" Arnold disaster "dovetail" have been studied. The occurrence of cyclic processes, as well as the stability of cycles, has been studied. Methods for model verification and model management capabilities are determined. The areas of phase diagrams for complex nonlinear dynamical systems with cyclic behavior are investigated. Dynamics of cycles in different regions of the phase space for synergetic systems is discussed. The problems of verification and control of models with the possible appearance of cycles are identified, and the emergence of higher order cycles is discussed.

Keywords: mathematical models, synergetic systems, phase spaces, catastrophes, bifurcations, cyclic processes, model verification, cycle stability.

For citation: Lebedev V.I. Mathematical modeling of cyclic processes in dynamic synergetic systems. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2024;12(3). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1563 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.46.3.007 (In Russ.)

Введение

Динамические синергетические системы (ДСС) относятся к классу систем, которые обмениваются с внешней средой информацией и ресурсами. Описание такой системы предполагает ряд зависящих от времени переменных, определяемых набором внешних условий. Множество переменных определяют пространство, в котором существует система, называемое фазовым пространством. Точки этого пространства можно рассматривать как многомерные векторы, которые описывают возможные изменения системы со временем, описывая некоторую фазовую траекторию. За описание изменений состояний во времени принято считать движение фазовых точек в фазовом пространстве систем. Системы заданы в форме динамических, нелинейных, дифференциальных уравнений в фазовом пространстве. Следовательно, уравнения по данным в настоящем состоянии системы могут описать их поведение в будущем.

Синергетические системы описываются рядом уравнений для существенных параметров, характеризующих их поведение. Эти параметры принято называть «параметры порядка» (ПП). Уравнения для ПП и их решения составляют основу описания моделей ДСС в пространстве фазовых переменных в виде фазовых траекторий. Совокупность фазовых траекторий, начинающихся из разных стартовых точек фазового пространства, образуют информативный *фазовый портрет* систем. Фазовые траектории систем могут иметь притягивающие множества, называемые *аттракторами.* А. Пуанкаре предложил исследовать не фазовые траектории систем целиком, а переходные режимы систем вблизи устойчивых точек, т. е. аттракторов [1–4]. Существенным в этом локальном анализе Пуанкаре является число и тип аттракторов, а также множества начальных точек фазового пространства, из которых происходит выход траекторий на данный аттрактор. Эти множества называются *областями притяжения аттрактора.* Эти вопросы являются целью анализа в качественной теории дифференциальных уравнений и задачей исследования наших моделей.

Большинство процессов в природе представляет собой вращательные циклические процессы: на мега масштабах это вращения, связанные с движением галактик, на микроуровне это разнообразные квантовые процессы с элементарными частицами на орбитах, которым в естественных науках уделяется внимание. Для человека не меньший интерес представляет моделирование циклических процессов в ДСС, связанных с комплексами экономических, социальных, технологических, политических процессов и их моделей. Здесь можно выделить: причинно-организационный уровень моделирования процессов в ДСС, определяющий формулирование ценности и цели общества; уровень решения проблем возможного целенаправленного управления развитием процессов в обществе. Представляет интерес и классификация циклических процессов в моделях ДСС. Эти вопросы и будут задачей исследования моделей ДСС в данной работе.

Материалы и методы

Исследование качественного поведения ДСС необходимо проводить с помощью функций состояния, не зависящих от внешних воздействий, т. е. *управляющих параметров*. Существенное изменение фазовых портретов происходит лишь при изменении управляющих параметров системы. Портрет фазового пространства, характеризуется наличием особых точек ДСС: аттракторов, состояний равновесия и других, притягивающих фазовые траектории. Неизменность структуры этих параметров определяет структурную устойчивость или «грубость» систем. Таким образом, задачей качественной теории нелинейных моделей ДСС с управляющими параметрами является: нахождение *равновесных состояний, аттракторов и* определение их типа; выделение равновесных ветвей фазовых траекторий; изучение *устойчивости равновесий*; исследование потерь и приобретение *структурной устойчивости* при прохождении особых точек фазового пространства; определение возможной *структурной устойчивости* моделей ДСС; исследование и классификация *точек равновесия* и других особых точек систем.

Цикличность и ритмичность – это важные характеристики движения изменений в сложно организованных синергетических системах и являются одной из форм существования материи. Под циклическими процессами будем понимать те процессы и явления в ДСС, которые характеризуются периодичностью во времени и пространстве и основным свойством этих процессов является завершённость, т. е. возвращение к первоначальному состоянию, из которого они исходили, совершая кругооборот в течение определённого промежутка времени, называемого периодом. Если ритмические процессы характеризуются колебанием значений вокруг какого-то положения, но нет возврата к первоначальному состоянию, это может свидетельствовать о вращении или незавершённости процесса развития систем.

В исследование неравновесной ДСС входит создание моделей системы, которые включают в себя: ряд ПП модели, характеризующих состояние и свойства системы, определение внешних факторов и их характеристик, влияющих на ДСС, а также системы уравнений для ПП. Исследование модели ДСС, приводит к возможности описания поведения ДСС. В моделях ДСС, испытывающих циклические процессы, важно определение управляющих параметров и констант, что входит в процесс верификации модели [4, 5].

Исследование моделей динамических синергетических систем

Рассмотрим ДСС описывающуюся векторным ПП – переменной $\vec{x}$ и n-мерным вектором управляющих параметров $\vec{c}$, который определяет поведение переменных ПП. Вектор ПП изменяется со скоростью $\vec{f}(\vec{x},\vec{c})$, значение которой выражается через градиент синергетического потенциала ДСС $U(\vec{x},\vec{c})$ [1, 3, 5]

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x},\vec{c}) = -\frac{\partial U(\vec{x},\vec{c})}{\partial \vec{x}}. \qquad (1)$$

Равновесное состояние ДСС задаётся нулевой скоростью изменения ПП – $f(x(\mathrm{c}),\mathrm{c}) = 0$. Определение параметров c, при которых в ДСС наступает состояние равновесия, определяется решением уравнения стационарности. Кривая равновесных состояний системы записывается в виде $x = x(c)$. В случае неоднозначного решения уравнения стационарности в точке (x_0, c_0) может возникнуть два решения этого уравнения. Появляется новая ветвь решения (1) и говорят о появлении *бифуркации* (раздвоении) равновесия кривых. Рисунок 1 показывает это изменение фазовой диаграммы [2, 5–7]. Положим, что модель ДСС задаётся нелинейным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = kx^3 - mx + r, \qquad (2)$$

где $k > 0$ и является константой. Уравнение (2) имеет 2 меняющихся параметра. Если параметр $r < 0$, то начальное значение функции $x(0) = 0$ не меняет своего значения вплоть до точки $m = 0$. При $r = 0$ решение уравнения (2) становится неустойчивым и малейшие изменения (флуктуации) переводят его на одну или другую устойчивую траекторию. Это поведение (удвоение) решения уравнений называется «бифуркацией» [1, 2–4] (Рисунок 1).

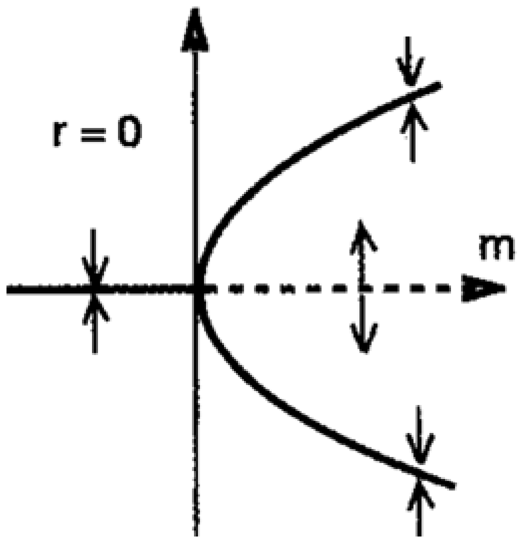


Рисунок 1 – Бифуркационная диаграмма решения уравнения (2)
Figure 1 – Bifurcation diagram of the solution of equation (2)

Каждая из ветвей решения уравнения (2) может в дальнейшем претерпеть повторную бифуркацию. Такое поведение можно наблюдать у многих нелинейных уравнений, которые в конечном итоге могут приводить к хаотическому поведению ДСС.

Так называемая «жёсткая» логистическая модель ДСС в безразмерном виде, описывающая, например, эволюцию плотности x групп животных одного типа, имеет вид (3):

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + x + r, \qquad (3)$$

где r – процент прироста популяции в единицу времени.

Решение уравнения (3) в диапазоне управляющего параметра $1 \leq r < 3$ меняется плавно, но появляется неподвижная точка. Если $3 \leq r < 1 + \sqrt{6}$ в системе вместо устойчивой стационарной точки появляется *устойчивый двухкратный цикл*. В точке перехода через точку параметра $r = 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}45$ решение уравнения (3) имеет следующую бифуркацию. Двукратный цикл исчезает, но появляется четырёхкратный цикл. При значениях $r_\infty < r \leq 4$ отображение (3) имеет циклы с любым периодом. Появление непериодических траекторий означает, что динамика системы соответствует *динамическому хаосу* (Рисунок 2).

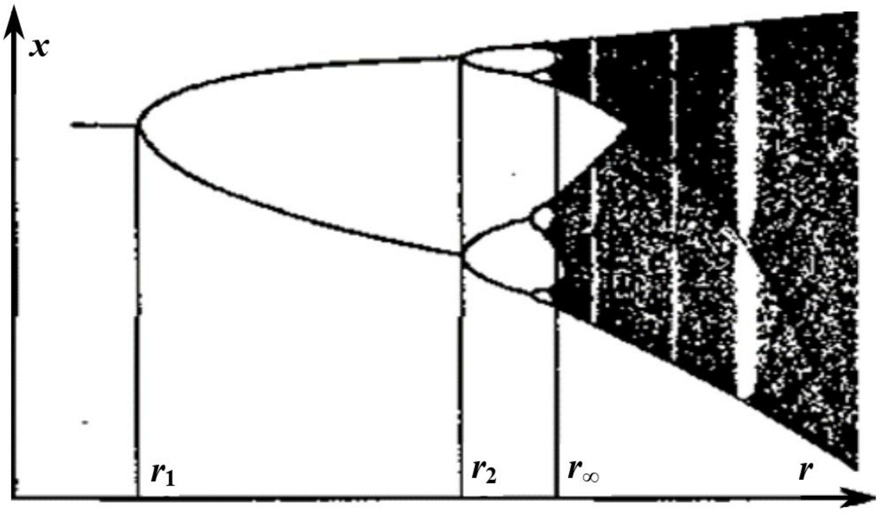


Рисунок 2 – Бифуркационная диаграмма уравнения (3)
Figure 2 – Bifurcation diagram of the equation (3)

Появление таких явлений как бифуркации предполагает исследование устойчивости моделей ДСС, описываемых уравнениями типа (1). Для (1) устойчивость равновесия состояния ДСС определяется *теоремой А.М. Ляпунова* исследованием функции скорости $\vec{f}(\vec{x},\vec{c})$ изменения состояний в уравнении. При разложении этой функции в ряд Тейлора в точке равновесия $x = x(c)$ можно получить матрицу вторых производных коэффициентов ряда Тейлора $\lambda_i = f_i^2$ Собственными числами матрицы *A* будут числаλ_i, которые являются решениями матричного уравнения $|A\text{-}\lambda E| = 0$, где E – единичная матрица. *Теорема Ляпунова* утверждает, что, если все вещественные части $Re\ \lambda_i < 0$, значит равновесие $x = x(c)$ устойчиво; если даже одно из $Re\ \lambda_i > 0$, то равновесие будет неустойчивым [2, 6]. Помимо стационарных равновесий в критических точках возможно возникновение *периодических равновесий,* в которых $f(t,c)=f(t+T)$, где $T>0$ и называется периодом.

Исследование моделей циклических процессов синергетических систем

В сложных ДСС при структурных перестройках возможны циклические, но необязательно строго периодические процессы. Рассмотрим некоторые из них. В теории катастроф Тома показано, что синергетический потенциал ДСС $U(\vec{x},\vec{c})$ уравнения (1) может быть приведён к каноническому виду теории. Предлагается классификация моделей потенциалов ДСС, которые представляются полиномами возрастающей степени ПП. Показано, что в потенциалах при степенях ПП со степенью $r \leq 4$ поведение семейства систем устойчиво. Эти модели с $r \leq 4$ в науке и технике называются катастрофами типа «сборка» и «складка» [5, 7].

Изучим возможные циклические процессы при бифуркации типа «сборка». Исследуем исходное уравнение (1), в котором правая часть задана соотношением $f(x,c) = c + \mu_1 x + \mu_2 x^2$, где параметр$\mu_2 > 0$. В зависимости от значения параметра μ_1 в системе может реализоваться либо три, либо одно равновесное состояние (Рисунок 3). На Рисунке 3 изображается цикл, который реализуется на поверхности типа «сборка». Изменение параметров μ_1 и μ_2 вдоль кривых (μ_1, μ_2), бифуркационным линиям l_0, является гистерезисным.

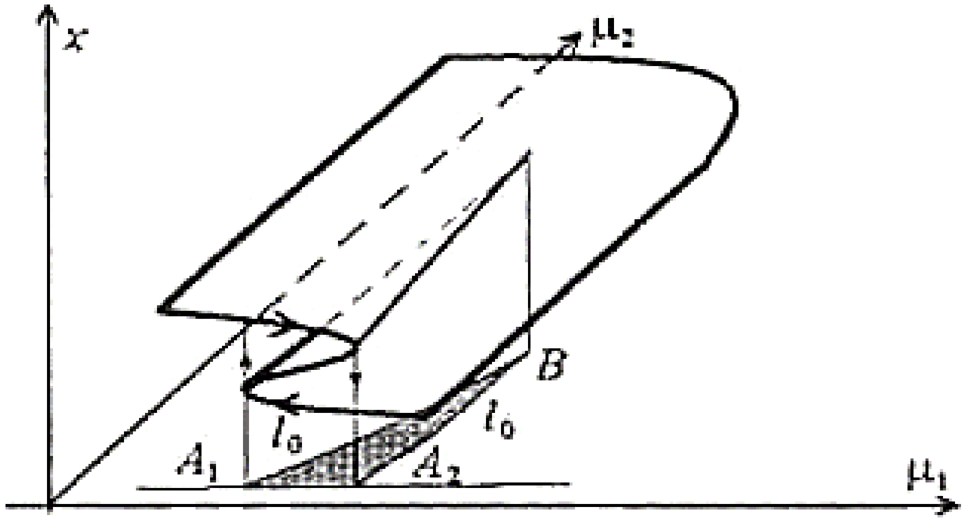


Рисунок 3 – Бифуркационная диаграмма в виде сборки
Figure 3 – Bifurcation diagram in the form of an assembly

Это означает, что при движении от точки В по бифуркационным линиям l_0 направо или налево система скачком меняет своё устойчивое равновесие до значений параметров, соответствующих точке A_1 или точке A_2. Катастрофы «складка» и «сборка» дают основные особенности поверхностей, позволяющих возможность получить любые особенности плоскостей в пространстве параметров (x, μ_1, μ_2).

Рассмотрим модель циклических логистических революций в региональных экономиках согласно работам Андерссона [8]. Предполагается, что все изменения, наблюдающиеся в развитии регионов, могут быть описаны дифференциальными уравнениями с кубическими нелинейностями в одном из них и медленным релаксационным поведением во втором уравнении

$$\partial y/\partial t = -T(y^3/3 - ry - x), \tag{4}$$

$$\partial x/\partial t = -y/T, \tag{5}$$

где r – управляющий параметр, T – скорость медленной адаптации системы к меняющейся логистике. Переменная y в системе уравнений это объём товарного производства, а x – характеризует обеспеченность транспортом и связью. Разрывы и скачки величины y могут иметь место, когда медленная переменная x плавно меняется в области критических значений управляющих параметров.

Мы видим из Рисунка 4, что «медленная» фаза всегда превалирует на больших временах, тогда как «быстрая» переводит систему в новый режим почти скачком. Эта модель предложена для описания развития малых хозяйствующих регионов и городов является примером типичного циклического развития параметров ДСС.

На Рисунке 4 иллюстрируется циклический процесс подъёмов и падений объёмов производства y [8].

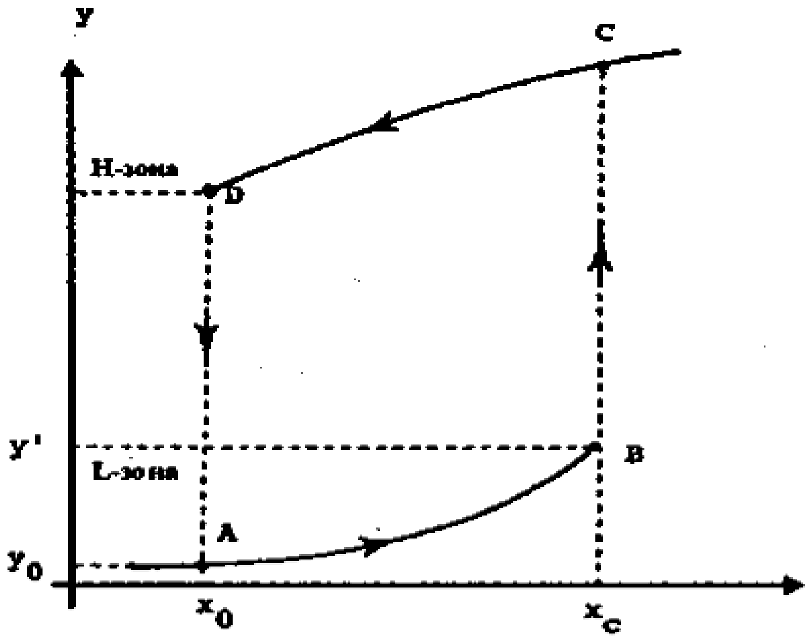
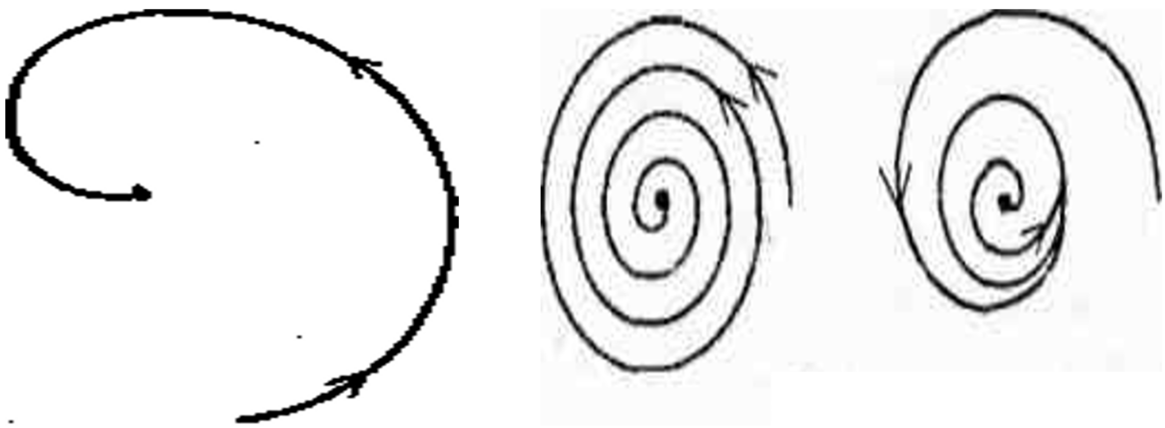


Рисунок 4 – Цикл быстрых и медленных переменных
Figure 4 – Cycle of fast and slow variables

Этот быстрый процесс спровоцирован постепенным изменением параметра *x,* характеризующим логистику и связи экономической системы по Андерсону [8].

Проблемы рождения и устойчивости циклов

Рассмотрим *бифуркацию рождения предельного цикла Пуанкаре-Андронова-Хопфа.* Пусть размерность фазового пространства в уравнении (1) равна двум. Запишем вектор $\vec{x} = (x_1, x_2)$ в комплексной форме $z = x_1 + ix_2 = |z|\, exp(\,arg\, z)$. Эволюционное уравнение имеет единственную стационарную точку $z_0 = 0$. Кроме положения равновесия $I_0 = 0$ (точка *в* на Рисунке 5), есть ещё одно решение, которое должно иметь знак $I_1 > 0$, это решение $I_1 = -\mu/V$.



а *б* *в*

Рисунок 5 – Фазовые траектории рождения устойчивого предельного цикла
Figure 5 – Phase trajectories of the birth of a stable limit cycle

Фазовые траектории, представленные на Рисунке 5 иллюстрируют рождение устойчивых предельных циклов. Эти устойчивые циклы существуют, когда параметры μ и V будут иметь разные знаки. Когда $V < 0$ существует предельный цикл, который устойчив при $\mu > 0$. При $V > 0$ ситуация равновесия обратная. Во время перехода параметра μ через нуль неустойчивый предельный цикл исчезает, но появляется новый устойчивый цикл. Рисунки 5 (а, б) изображают фазовые траектории системы накануне перехода, а Рисунок 5 *в* после появления μ устойчивого предельного цикла. Это изображение описывает бифуркацию неустойчивых решений в устойчивый предельный цикл *Пуанкаре-Андронова-Хопфа* [4, 5]. Иногда при изменении бифуркационных параметров происходит череда бифуркаций циклов, приводящая к описанному сценарию.

Траектории циклического движения удобно отслеживать с помощью отображения предложенного Пуанкаре [5]. Если фазовая кривая, проходящая в малой окрестности точки x_0 на плоскости ортогональной траектории с течением времени будет стремиться к x_0, то значит мы имеем дело с устойчивым циклом. Если траектория удаляется от x_0, это значит происходит удвоение периода цикла и новый цикл появляется возле новой точки x_0. При этом остаётся неустойчивый цикл, так происходит рождение цикла с удвоенным периодом. При этом наблюдаются биения или следующая неустойчивость с расщеплением цикла. Продолжение этого процесса приводит к сценарию турбулентности Ландау-Хопфа [9, 10].

Вообще встаёт проблема не только понимания сложных, нелинейных процессов в ДСС, но и поиск способов управления ими. Возможность воздействия на изменение ДСС и их модели возникает при включении в модель некоторых дополнительных параметров, дающих возможность управления системами. Такую возможность предоставляет введение «мягких» моделей ДСС Арнольдом [11], в которых вводится обратная связь – зависимость констант модели от получаемых результатов. При этом появляется возможность принятия решений, приводящих к изменению поведения структур. Результаты возможного управления ДСС исследуются с помощью имитационных моделей на компьютерах. В оптимальном случае результаты приводят к переходным процессам, ведущим к эволюционному движению структур без катастроф к желаемым процессам или структурам в исследуемых ДСС [1, 8, 10].

Рассмотрим один из вариантов модели (1) с конкретизацией потенциала. Будем описывать изменения состояния ДСС с помощью n-мерного вектора ПП $\vec{x}$, компоненты которого основные переменные – ПП. Введём характеризующие состояние системы внешние параметры в виде k-мерного вектора управляющих параметров $\vec{c}$:

$$d\vec{x}_i/_{dt} = f(\vec{x},\vec{c},i) = x_i^+ - x_i^- + \vec{z_i}, \tag{6}$$

где i = 1, 2, … N, и N – число существенных переменных в ДСС, x_i^+ и x_i^- – балансовые векторы потенциала, учитывающие члены уравнения, дающие положительный и отрицательный вклады в скорости изменения вектора $\vec{x}_i$, то есть $f(\vec{x},\vec{c},i)$. Вектор $\overrightarrow{z_i}$ – член учёта влияния границ на i – участке системы.

Управление ДСС возможно только при эволюционном её развитии, когда параметры системы можно считать квазиравновесными. Эти условия будут существовать вблизи квазистатических состояний ДСС, в которых изменений состояний $f(\vec{x},\vec{c})$ будет нулевой. Поэтому в квазиравновесных состояниях имеем уравнение $f(x(\mathrm{c}),\mathrm{c},i) = 0$. Решение этого уравнения в стационарной точке (x_{i0}, c_{i0}) иногда может быть неоднозначным. Это приводит к появлению новых фазовых состояний системы $x_{i0} = x_{i0}(c_{i0})$ как показано на Рисунке 1. Происходит *бифуркация* в этой точке равновесия ДСС [1, 5]. Системы в критических точках c_{0i} имеют возможность выбора дальнейшего поведения систем. Вблизи критических точек системы испытывают сильные критические флуктуаций ПП и это даёт возможность перехода ДСС как на устойчивую, так и на структурно неустойчивую фазовую траекторию. Возможно возникновение череды неустойчивостей в системе, как показано на Рисунке 2, и, следовательно, трудности с управлением ДСС.

При изучении поведения ДСС возле стационарной критической точки можно воспользоваться введением малого параметра задачи – отклонения ПП от стационарного значения x_{i0}. Учёт членов разложения синергетического потенциала по малому параметру – отклонению ПП от стационарных значений, проведённый ранее в работах [2, 4, 9, 10] привёл к исследованию последовательности моделей ДСС в виде ряда «катастроф».

Циклические процессы в области устойчивых состояний

Качественное изучение поведения устойчивости или неустойчивости моделей с помощью дифференциальных уравнений (1), (6) проводится с помощью теоремы Ляпунова исследованием синергетического потенциала *U*, либо функции скорости изменения ПП $f(x(\mathrm{c}), \mathrm{c}, i)$. В уравнении (1) синергетический потенциал *U* сам является функцией Ляпунова. Минимум *U* в любой точке фазового пространства, в том числе и стационарной точке c, по Ляпунову будет, когда выполняется неравенство $\partial^2 U(x, \mathrm{c})/x^2 < 0$. Экстремумы ДСС в стационарной точке c можно искать и помощью функции фазовой скорости изменения ПП. Убывание функции Ляпунова в окрестности точки c для $f(x(\mathrm{c}), \mathrm{c}, i)$ свидетельствует о наличии минимума скорости изменения ПП, и, следовательно, экстремума ДСС.

Синергетический потенциал модели катастрофы *«ласточкин хвост»* имеет вид полинома пятой степени по ПП (7). Фазовая диаграмма «мягкой» по Арнольду модели катастрофы *«ласточкин хвост»,* дана на Рисунке 6.

$$U = \sum_{k=0}^{5} x^k a_{\text{-k}} = \mathrm{Y}. \quad (7)$$

Понятие «мягкая» модель было дано Арнольдом в монографии [11]. Введение «мягких» моделей при имитационном моделировании стабилизирует систему

Рисунок 6 – Исследование устойчивости потенциала (7)
Figure 6 – Potential Sustainability Study (7)

В них через зависимость коэффициентов модели от полученного результата учитываются нелинейности и конкурентные связи в моделях. В случае расчёта области стабильных состояний для диаграммы «мягкой» модели катастрофы «ласточкин хвост» по формуле (7) происходит с помощью зависимости наклона линии AB.

Линия *AB* в Рисунке 6 появляется в результате «смягчения» модели по Арнольду и её наклон линейно зависит от свойств параметров модели. В обществе можем наблюдать многочисленные примеры применения этой модели в экономике и социологии, приведённые нами ранее [2, 3, 5]. Поскольку наклон этой линии определяется свойствами модели, это предоставляет возможность после верифицирования модели регулировать процессы в исследуемой системе.

Траектории перемещения фазовых точки целиком зависят от внутренних процессов в исследуемой системе, но только в заштрихованной области разрешённых стационарных состояний. При пересечении фазовой точкой границы заштрихованной области система попадает в район неустойчивости с последующими процессами бифуркаций, показанными на Рисунке 1 и Рисунке 2. Процесс завершается, когда система возвращается внутрь заштрихованной области по одной из устойчивых бифуркационных ветвей.

Каковы будут фазовые траектории, «запертые» в заштрихованной области? Можно представить циклическое движение, происходящее в модели (4), (5) Андерсона (Рисунок 4). При добавлении ещё одной размерности компоненты в ПП возможны циклические процессы предельного цикла *Пуанкаре-Андронова-Хопфа* вокруг тора и т.д. Надо отметить, что все эти процессы в ДСС будут происходить в локально в первой заштрихованной области. Аналогичные рассуждения можно провести для поведения систем и во второй заштрихованной области Рисунка 6.

Рисунок 7 – Появления перехода из одной области графика в другую
Figure 7 – The appearance of a transition from one area of the graph to another

Вид потенциала в виде холмов появляется в результате наличия в синергетическом потенциале многочленов разных степеней и знаков параметра порядка ДСС. Вклады разных знаков определяют два холма подъёма и спада потенциала «ласточкин хвост». Устойчивыми состояниями системы являются фазовые точки внутри заштрихованных областей диаграммы. В моделях ДСС с учётом более высоких степеней параметра порядка в синергетическом потенциале катастроф будут появляться следующие холмы. Это свидетельствует о соответствующем цикличном поведении свойств ДСС в следующей модели из таблицы катастроф Тома [5, 6, 8].

Для имитационной модели при изучении ДСС оптимальным является возможность, позволяющая фазовым траекториям без катастроф переходить из одной квазиравновесной области в другую. Коэффициенты при степенях ПП в модели катастрофы *«ласточкин хвост»* (7) состоят из функций, включающих комбинации управляющих параметров $\vec{c}$. Согласно «мягким» моделям, введённых Арнольдом [11], они могут зависеть от параметра x, приводя к более корректным моделям ДСС, учитывающим обратные связи. Переход в устойчивых состояниях между холмами потенциала появляется при изменении наклона прямой линии AB на Рисунке 7. Этот подход к моделированию реализован нами в математическом пакете Excel и частично продемонстрирован на Рисунке 7.

Существенным новым моментом при переходе в следующую область катастроф является увеличение максимума скорости изменения параметра порядка ДСС и периодичность изменения её при переходе к следующей катастрофе. При этом в каждой новой области могут происходить новые циклические процессы. Впервые на циклический характер экономических показателей развития мировой экономики было указано почти век тому назад в работах нашего соотечественника Кондратьева на основе исследования статистических данных мировой экономики [10].

Заключение

Математическое моделирование давно занимается процессом построения моделей динамки ДСС, это отражено в монографиях [2, 4, 5, 7], в обзорах и статьях [3, 10]. Наука о прогнозировании погоды, или экономическое прогнозирование пытаются предсказать результат развития больших нелинейных систем, компоненты которых сложнейшим образом взаимодействуют между собой. Упрощающие методы, которые играют центральную роль в построении научных моделей, для анализа таких систем малопригодны. Подобные большие синергетические системы часто нестабильны, поэтому предсказание будущего таких систем на больших временах практически невозможно.

В связи с этим, важна проведённая нами классификация моделей с использованием таблиц катастроф Тома, дающая представление о простейших моделях циклических процессов в ДСС с синергетическим потенциалом до четвёртой степени порядка ПП. В этих системах помогает знание фазовых траекторий ДСС при катастрофах типа «складка» и «сборка».

Для более сложных катастроф типа «ласточкин хвост» с синергетическим потенциалом до членов пятой степени по ПП, по-видимому, эффективной оказалась идея Арнольда о введении «мягкой модели». Использование этой идеи позволило нам подтвердить на математической модели идею Кондратьева о цикличности развития экономик [10].

Важнейшим этапом построения моделей ДСС является процесс её верификации. При этом приходится обрабатывать большие объёмы данных, определяющих коэффициенты моделей. Для этого приходится обрабатывать данные и параметры информации, разнообразной по содержанию и связям с ДСС. Здесь достигнут большой прогресс в «облачных технологиях» при накоплении и обработке большого объёма слабоструктурированной информации: социально-экономические, технические, информационные и управленческие «большие данные» (БД). В результате тяжесть построения и верификации моделей ДСС переносится в задачи обработки больших данных.

Можно наблюдать лавинообразный процесс построения развитых моделей ДСС с помощью облачных технологий в различных областях знаний. Облачная архитектура содержит узлы MapReduce, которые предоставляет модель параллельной обработки огромных объёмов БД. Основной сервер получает запросы от клиентов и обрабатывает их в зависимости от типа запроса. Заказы поступают, когда трудности систематического извлечения информации или других действий с наборами данных слишком велики или сложны, чтобы их можно было решить с помощью традиционного прикладного программного обеспечения. Затем результаты собираются и доставляются для реализации платформы обработки огромных объёмов данных MapReduce, которая была принята под названием Hadoop. Считается, что анализ больших объёмов данных станет доступным не только для организаций-гигантов, но и для представителей бизнеса.

Развитые сообщества всегда сталкиваются с такими процессами, как регулярная цикличность зарождения более адекватного сообществу идей технологического, социального и экономического порядка. Процессы изменений реализуются в виде технологических революций, социальных коллизий при решении экономических проблем. Идеи смены механизмов функционирования ДСС зарождаются сначала как идеи в исследованиях и в виде возмущений в сообществах. Хаос реформаций фактически ведёт к разрушению старых структур и порождению новых отношений и упорядоченностей в структурах ДСС. Циклы экономического развития известны давно. Как показано в работе [10] процесс развития ДСС естественно сопровождается катастрофами, циклами, автоколебаниями в областях состояния различных систем. Поэтому проблема прогноза и управления в моделях ДСС является актуальной, математической, технологически трудной и связанной с построением систем обработки «больших данных».

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Лебедев В.И., Лебедева И.В. *Модели синергетической экономики.* Deutschland: Palamarium academic publishing; 2014. 220 с.
   Lebedevv V.I., Lebedeva I.V. *Modeli sinergeticheskoi ekonomiki.* Deutschland: Palamarium academic publishing; 2014. 220 p. (In Russ.).
2. Лебедев В.И., Лебедева И.В. *Математические модели синергетической экономики.* Ставрополь: Северо-Кавказский государственный технический университет; 2011. 231 с.
   Lebedev V.I., Lebedeva I.V. *Matematicheskie modeli sinergeticheskoi ekonomiki.* Stavropol: Severo-Kavkazskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet; 2011. 231 p. (In Russ.).
3. Лебедев В.И., Лебедева И.В., Шуваев А.В. Синергетические модели динамических социально-экономических систем. *Фундаментальные исследования*. 2021;(3):72–77. https://doi.org/10.17513/fr.42983
   Lebedev V.I., Lebedeva I.V., Shuvaev A.V. Synergy models of dynamic socio-economic systems. *Fundamental'nye issledovaniya = Fundamental research.* 2021;(3):72–77. (In Russ.). https://doi.org/10.17513/fr.42983
4. Малинецкий Г.Г. *Математические основы синергетики. Хаос, структуры. вычислительный эксперимент.* Москва: Ленанд; 2017. 312 с.
   Malinetskii G.G. *Matematicheskie osnovy sinergetiki. Khaos, struktury. vychislitel'nyi eksperiment.* Moscow: Lenand; 2017. 312 p. (In Russ.).

5. Лебедев В.И., Лебедева И.В. *Синергетические модели в экономических и гуманитарных науках*. Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет; 2018. 223 с.
Lebedev V.I., Lebedeva I.V. *Sinergeticheskie modeli v ekonomicheskikh i gumanitarnykh naukakh.* Stavropol: North-Caucasus Federal University; 2018. 223 p. (In Russ.).
6. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. *Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды.* Москва: Ленанд; 2006. 280 с.
Malinetskii G.G., Potapov A.B., Podlazov A.V. *Nelineinaya dinamika: podkhody, rezul'taty, nadezhdy.* Moscow: Lenand; 2006. 280 p. (In Russ.).
7. Гуц А.К., Фролова Ю.В., Паутова Л.А. *Математические методы в социологии.* Москва: URSS; 2014. 214 с.
Guts A.K., Frolova Yu.V., Pautova L.A. *Matematicheskie metody v sotsiologii.* Moscow: URSS; 2014. 214 p. (In Russ.).
8. Андерсон Т.В. *Статистический анализ временных рядов*. Москва: Мир; 1976. 756 с.
Anderson T.W. *The statistical analysis of time series.* Moscow: Mir; 1976. 756 p. (In Russ.).
9. Чуличков А.И. *Математические модели нелинейной динамики*. Москва: Физматлит; 2003. 296 с.
Chulichkov A.I. *Matematicheskie modeli nelineinoi dinamiki.* Moscow: Fizmatlit; 2003. 296 p. (In Russ.).
10. Красс М.С., Посашков С.А. Концепция построения устойчивых системно-динамических моделей экономики. В книге: *Нелинейность в современном естествознании*. Москва: Издательство ЛКИ; 2016. С. 362–388.
Krass M.S., Posashkov S.A. Kontseptsiya postroeniya ustoichivykh sistemno-dinamicheskikh modelei ekonomiki. In: *Nelineinost' v sovremennom estestvoznanii.* Moscow: Izdatel'stvo LKI; 2016. pp. 362–388. (In Russ.).
11. Арнольд В.И. *Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук: Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов*. Москва: Ленанд; 2018. 96 с.
Arnol'd V.I. *Gyuigens i Barrou, N'yuton i Guk: Pervye shagi matematicheskogo analiza i teorii katastrof, ot evol'vent do kvazikristallov.* Moscow: Lenand; 2018. 96 p. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Лебедев Виктор Иванович, доктор физико-математических наук, профессор Северо-Кавказского федерального университета, ведущий научный сотрудник Института цифрового развития, академик Российской академии естественных наук и Международной академии информатизации, Ставрополь, Российская Федерация.
e-mail: gusevpvl@gmail.com
ORCID: 0000-0002-3752-0152

Viktor I. Lebedev, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the North Caucasus Federal University, leading researcher at the Institute of Digital Development, academician of the Russian Academy of Natural Sciences and the International Academy of Informatization, Stavropol, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 23.05.2024; одобрена после рецензирования 05.06.2024; принята к публикации 17.07.2024.

The article was submitted 23.05.2024; approved after reviewing 05.06.2024; accepted for publication 17.07.2024.