УДК 519.862.6
DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.039

Оценивание неизвестных параметров многослойной модульной регрессии методом наименьших модулей

М.П. Базилевский✉

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Российская Федерация

Резюме. Статья посвящена разработке и возможности применения в регрессионном анализе новой математической формы связи между выходной переменной и входными факторами. Для этого использованы ранее изученные более простые модели модульной линейной регрессии, в которых один или несколько входных факторов преобразуются единожды с помощью операции модуль. Предложен симбиоз линейной регрессии и модульной регрессии с мультиарной операцией модуль. На его основе сформулирована многослойная модульная регрессия, выстроенная по принципу «модуль в модуле», то есть на каждом новом слое используется модуль от величины предыдущего слоя. Задача оценивания многослойной модульной регрессии с заданным числом слоев методом наименьших модулей сведена к задаче частично-булевого линейного программирования. С помощью предложенных регрессий решена задача моделирования запасов древесины в Иркутской области. При этом построены однослойная, двухслойная и трехслойная модульные регрессии. Новые модели по качеству оказались существенно лучше линейной регрессии, причем, с увеличением количества слоев наблюдалось снижение суммы модулей остатков. В трехслойной модели все остатки получились нулевыми. Разработанный математический аппарат может успешно применяться для решения многих задач анализа данных.

Ключевые слова: регрессионный анализ, многослойная модульная регрессия, метод наименьших модулей, задача частично-булевого линейного программирования, древесина.

Для цитирования: Базилевский М.П. Оценивание неизвестных параметров многослойной модульной регрессии методом наименьших модулей. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2024;12(2). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1581 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.039

Unknown parameters estimation for multilayer modular regression using the least absolute deviations method

M.P. Bazilevskiy✉

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation

Abstract. The article is devoted to the development and possibility of using a new mathematical form of connection between the output variable and input factors in regression analysis. For this purpose, previously studied simpler modular linear regression models were used, in which one or more input factors are transformed once using the modulus operation. A symbiosis of linear regression and modular regression with a multiary operation module is proposed. On its basis, a multilayer modular regression is formulated, built on the “module within a module” principle, that is, each new layer uses a module from the value of the previous layer. The problem of estimating multilayer modular regression with a given number of layers using the least modulus method is reduced to a partial-Boolean linear programming problem. Using the proposed regressions, the problem of modeling timber reserves in the Irkutsk region was solved. In this case, single-layer, two-layer and three-layer modular regression were constructed. The new models turned out to be significantly better in quality than linear regression, and with an increase in the number of layers, a decrease in the sum of the residual modules was observed.

In the three-layer model, all residuals turned out to be zero. The developed mathematical apparatus can be successfully used to solve many data analysis problem.

Keywords: regression analysis, multilayer modular regression, least absolute deviations method, partial-boolean linear programming problem, wood.

For citation: Bazilevskiy M.P. Unknown parameters estimation for multilayer modular regression using the least absolute deviations method. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2024;12(2). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1581 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.45.2.039 (In Russ.).

Введение

Задача анализа разнородных данных с целью извлечения из них скрытых знаний чрезвычайно актуальна в настоящее время. Один из возможных методов ее решения заключается в проведении регрессионного анализа [1, 2], с помощью которого строится регрессионная модель, математически связывающая выходную переменную с входными факторами. Более сложные, а поэтому чаще и более точные, математические модели, функционирующие по принципу сетей нервных клеток биологических организмов, называют нейронными сетями [3, 4]. Наиболее эффективны в практике машинного обучения многослойные нейронные сети, в которых каждый нейрон предыдущего слоя связан со всеми нейронами следующего слоя. Многослойные нейросети имеют богатую историю. Но хотелось бы отметить, что уже в начале 1970-х годов в СССР академиком А. Г. Ивахненко на основе регрессионного анализа был разработан метод группового учета аргументов [5, 6] – один из первых алгоритмов глубокого обучения. И уже в то время А. Г. Ивахненко удавалось обучать восьмислойные нейросети.

Регрессионный анализ в настоящее время не ограничивается одной лишь только линейной регрессией, оцениваемой с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Например, в работах [7–10] предложены модели модульной линейной регрессии, в которых входные переменные особым образом преобразуются с помощью операции модуль. Для оценивания модульных регрессий используется метод наименьших модулей (МНМ) [11, 12], реализующийся в каждом конкретном случае посредством решения определенной задачи математического программирования [13, 14]. Успешная попытка приближенного оценивания двухслойных модульных регрессий с помощью МНК предпринята в [15]. Цель данной статьи заключается в создании многослойной модульной регрессии и в разработке алгоритма ее оценивания с помощью МНМ.

Постановка задачи

Пусть в распоряжении исследователя имеется выборка статистических данных объема n, включающая значения y_i, $i = \overline{1,n}$ для одной выходной (объясняемой) переменной y, а также значения $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{il}$, $i = \overline{1,n}$ для l входных (объясняющих) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_l$. Тогда модель модульной линейной регрессии [7] можно записать в виде

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \left| x_{ij} - \lambda_j \right| + \varepsilon_i, i = \overline{1,n}, \quad (1)$$

где α_0, α_j, λ_j, $j = \overline{1,l}$ – неизвестные параметры; ε_i – ошибка аппроксимации в i-м наблюдении.

В работе [7] предложен способ оценивания модели (1) с помощью МНМ, а в [8] – способ ее оценивания с помощью МНК. Поскольку способ, представленный в [7], требовал решения совокупности задач частично-булевого линейного программирования (ЧБЛП), то в [9] была сформулирована единая задача.

В [10] предложена модульная регрессия с операциями модуль различной арности. Например, модульная регрессия с l-арной операцией модуль имеет следующий вид:

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \left| x_{i1} - \lambda_0 - \sum_{k=2}^{l} \lambda_{k-1} \cdot x_{ik} \right| + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}. \quad (2)$$

Там же предложен способ оценивания регрессии (2) с помощью МНМ.

В статье [15] была сформулирована двухслойная модульная регрессия с двумя объясняющими переменными вида

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 \big| |x_{i1} - \lambda_1| - \lambda_2 \big| + \alpha_2 \big| |x_{i2} - \lambda_3| - \lambda_4 \big| + \varepsilon_i, i = \overline{1,n},$$

и предложен алгоритм ее оценивания с помощью МНК.

Введем в рассмотрение однослойную модульную линейную регрессию, содержащую линейную часть и l-арную операцию модуль:

$$y_i = \alpha_{01} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j1} x_{ij} + (-1)^{\Delta_1} \cdot \left| \alpha_{00} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j0} x_{ij} \right| + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}, \quad (3)$$

где α_{j0} , $j = \overline{0,l}$ – неизвестные параметры 0-го слоя; α_{j1} , $j = \overline{0,l}$ – неизвестные параметры 1-го слоя; Δ_1 – неизвестный бинарный параметр, который равен 0, если перед модулем в (3) стоит «+», и 1 – в противном случае. Алгоритм МНМ-оценивания модели (3) ничем не отличается от описанного в [10] алгоритма оценивания регрессии (2). Но, учитывая, что $\left| \alpha_{00} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j0} x_{ij} \right| = \left| -\alpha_{00} - \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j0} x_{ij} \right|$, модель (3) идентифицируется не единственным образом. Например, если в результате оценивания получено уравнение $\tilde{y} = 3 + 4x_1 + |7 - 5x_1|$, в котором оценки $\tilde{\alpha}_{00} = 7$, $\tilde{\alpha}_{10} = -5$, то уравнение вида $\tilde{y} = 3 + 4x_1 + |-7 + 5x_1|$ с оценками $\tilde{\alpha}_{00} = -7$, $\tilde{\alpha}_{10} = 5$ будет ему равносильно. Поэтому хотя бы один из неизвестных параметров, входящих под знак модуля в (3), нужно ограничить условием неотрицательности, например, $\alpha_{10} \geq 0$.

Используя (3) и принцип многослойной организации математической зависимости, введем в рассмотрение p-слойную модульную линейную регрессию, содержащую на каждом слое линейную часть и l-арную операцию модуль:

$$\text{p-й слой: } y_i = \alpha_{0,p} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j,p} x_{ij} + (-1)^{\Delta_p} \cdot \left| z_{i,p-1} \right| + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n},$$

$$\text{(p-1)-й слой: } z_{i,p-1} = \alpha_{0,p-1} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j,p-1} x_{ij} + (-1)^{\Delta_{p-1}} \cdot \left| z_{i,p-2} \right|,\ i = \overline{1,n},$$

$$\ldots$$

$$\text{2-й слой: } z_{i2} = \alpha_{02} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j2} x_{ij} + (-1)^{\Delta_2} \cdot |z_{i1}|,\ i = \overline{1,n},$$

$$\text{1-й слой: } z_{i1} = \alpha_{01} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j1} x_{ij} + (-1)^{\Delta_1} \cdot |z_{i0}|,\ i = \overline{1,n},$$

$$\text{0-й слой: } z_{i0} = \alpha_{00} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j0} x_{ij},\ i = \overline{1,n},$$

где α_{jk} – неизвестный параметр при объясняющей переменной под номером j в k-м слое; z_{ik} – выходное значение на k-м слое в i-м наблюдении; Δ_k , $k = \overline{1,p}$ – бинарная переменная, которая равна 0, если в k-м слое перед операцией модуль стоит знак «+», и 1 – в противном случае.

В сокращенном виде введенную p-слойную модель можно записать в виде

$$y_i = \alpha_{0,p} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j,p} x_{ij} + (-1)^{\Delta_p} \cdot \left| z_{i,p-1} \right| + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}, \quad (4)$$

$$z_{ik} = \alpha_{0k} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{jk} x_{ij} + (-1)^{\Delta_k} \cdot \left| z_{i,k-1} \right|,\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p-1}, \quad (5)$$

$$z_{i0} = \alpha_{00} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_{j0} x_{ij},\ i = \overline{1,n}. \quad (6)$$

Например, если $l = 2$, $p = 3$, то имеем трехслойную модульную регрессию с двумя переменными:

$$y_i = \alpha_{03} + \alpha_{13}x_{i1} + \alpha_{23}x_{i2} + (-1)^{\sigma_3} \cdot |z_{i2}| + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n},$$

$$z_{i2} = \alpha_{02} + \alpha_{12}x_{i1} + \alpha_{22}x_{i2} + (-1)^{\sigma_2} \cdot |z_{i1}|,\ i = \overline{1,n},$$

$$z_{i1} = \alpha_{01} + \alpha_{11}x_{i1} + \alpha_{21}x_{i2} + (-1)^{\sigma_1} \cdot |z_{i0}|,\ i = \overline{1,n},$$

$$z_{i0} = \alpha_{00} + \alpha_{10}x_{i1} + \alpha_{20}x_{i2},\ i = \overline{1,n}.$$

Таким образом, предложенная многослойная модель (4)–(6) обобщает вышерассмотренные регрессии (2) и (3).

Используя предложенные в [9, 10] алгоритмы, сформулируем следующую задачу ЧБЛП для МНМ-оценивания по критерию $\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i| \to min$ многослойной регрессии (4)–(6):

$$\sum_{i=1}^{n}(g_i + h_i) \to min, \tag{7}$$

$$u_{i0} - v_{i0} = \alpha_{00} + \sum_{j=1}^{l}\alpha_{j0}x_{ij},\ i = \overline{1,n}, \tag{8}$$

$$u_{ik} - v_{ik} \le \alpha_{0k} + \sum_{j=1}^{l}\alpha_{jk}x_{ij} + (-1)^{\varphi_{qk}} \cdot \left(u_{i,k-1} + v_{i,k-1}\right) + $$
$$+M - M \cdot \sigma_q,\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p-1},\ q = \overline{1,2^p}, \tag{9}$$

$$u_{ik} - v_{ik} \ge \alpha_{0k} + \sum_{j=1}^{l}\alpha_{jk}x_{ij} + (-1)^{\varphi_{qk}} \cdot \left(u_{i,k-1} + v_{i,k-1}\right) - $$
$$-M + M \cdot \sigma_q,\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p-1},\ q = \overline{1,2^p}, \tag{10}$$

$$y_i \le \alpha_{0,p} + \sum_{j=1}^{l}\alpha_{j,p}x_{ij} + (-1)^{\varphi_{qp}} \cdot \left(u_{i,p-1} + v_{i,p-1}\right) + g_i - h_i + M - M \cdot \sigma_q,\ i = \overline{1,n},$$
$$q = \overline{1,2^p}, \tag{11}$$

$$y_i \ge \alpha_{0,p} + \sum_{j=1}^{l}\alpha_{j,p}x_{ij} + (-1)^{\varphi_{qp}} \cdot \left(u_{i,p-1} + v_{i,p-1}\right) + g_i - h_i - M + M \cdot \sigma_q,\ i = \overline{1,n},$$
$$q = \overline{1,2^p}, \tag{12}$$

$$\sigma_q \in \{0,1\},\ q = \overline{1,2^p}, \tag{13}$$

$$\sum_{q=1}^{2^p}\sigma_q = 1, \tag{14}$$

$$u_{ik} \le M \cdot \delta_{ik},\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{0,p-1}, \tag{15}$$

$$v_{ik} \le M(1 - \delta_{ik}),\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{0,p-1}, \tag{16}$$

$$\delta_{ik} \in \{0,1\}, i = \overline{1,n},\ k = \overline{0,p-1}, \tag{17}$$

$$\alpha_{1k} \ge 0,\ k = \overline{0,p-1}, \tag{18}$$

$$u_{ik} \ge 0,\ v_{ik} \ge 0,\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{0,p-1}, \tag{19}$$

$$g_i \ge 0,\ h_i \ge 0,\ i = \overline{1,n}, \tag{20}$$

где φ_{qk}, $q = \overline{1,2^P}$, $k = \overline{1,p}$ – элементы бинарной матрицы Ф, в строках которой расположены все возможные размещения с повторениями из элементов 0 и 1 по p слоев, причем, если $\varphi_{qk} = 1$, то в k-м слое перед модулем стоит знак «+»; M – большое положительное число; u_{ik}, v_{ik}, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{0,p-1}$ – неотрицательные значения, разница между которыми равна выходному значению z_{ik} на k-м слое в i-м наблюдении;

g_i, h_i – неотрицательные значения ($g_i \cdot h_i = 0$), разница между которыми равна остатку e_i на p-м слое в i-м наблюдении, а сумма – величине модуля остатка;

$$\sigma_q = \begin{cases} 1, \text{ если знаки перед модулями соответствуют } q\text{-й строке матрицы } \Phi, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad q = \overline{1, 2^p};$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если выходное значение на } k\text{-м слое} \\ \quad \text{в } i\text{-м наблюдении неотрицательно,} \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad i = \overline{1, n},\ k = \overline{0, p-1}.$$

Моделирование

Моделирование развития лесного комплекса Российской Федерации является актуальной научной задачей. Для ее решения могут быть использованы инструменты регрессионного анализа, например, [16, 17]. Для демонстрации предложенного в предыдущем разделе математического аппарата решалась задача моделирования запасов древесины в Иркутской области. Для этого использовались ежегодные статистические данные (Таблица 1), хранящиеся в базе данных Федеральной службы государственной статистики, за период с 2007 по 2021 годы по следующим переменным:

y – общий запас древесины (миллионов кубических метров);
x_1 – лесовосстановление (тысяч гектаров);
x_2 – число лесных пожаров;
x_3 – число предприятий и организаций по виду деятельности «лесозаготовки».

Таблица 1 – Статистические данные
Table 1 – Statistical data

Год	y	x_1	x_2	x_3	E_{lin}	E_1	E_2	E_3
2007	9182	73,6	1582	2118	-10,987	35,682	0	0
2008	9144	75,1	1935	2047	-53,316	0	0	0
2009	9124,6	75,6	717	2034	0	0	0	0
2010	9102,9	80,4	830	1653	52,347	-1,301	2,185	0
2011	9036	81,8	1711	1329	0	-75,6	0	0
2012	9054,1	90,9	884	1198	103,029	0	-1,816	0
2013	9030,6	99,5	692	1157	110,057	23,266	0	0
2014	8998	107,6	2234	1056	20,001	10,326	0	0
2015	8923	116,8	1607	1021	0	-8,725	0	0
2016	8883,6	122,9	1212	798	34,699	0	-6,888	0
2017	8844,5	133	1209	758	17,169	0	0	0
2018	8810,2	122,9	779	726	0	0	0	0
2019	8769,7	139,9	1053	652	-18,823	0	0	0
2020	8741,7	119,7	923	568	-50,34	11,253	-1,623	0
2021	8708,5	98,3	590	536	-87,194	0	0	0

Безусловно, на запасы древесины влияют не только представленные 3 фактора, но и породный состав древостоев, возраст деревьев, тип леса, хозяйственная деятельность и др. К сожалению, найти статистику для перечисленных факторов пока не удалось. Но представленное в предыдущем разделе математическое обеспечение можно использовать и для решения задач с большим числом факторов и наблюдений.

Сначала по исходным данным (Таблица 1) с помощью МНМ была построена стандартная модель множественной линейной регрессии с тремя переменными:

$$\tilde{y}_{\text{лин}} = 8790{,}53 - 1{,}3493x_1 + 0{,}0571x_2 + 0{,}1943x_3. \quad (21)$$

Сумма модулей остатков модели (21) составляет 557,9646.

Затем с помощью МНМ оценивались многослойные модульные линейные регрессии (4)–(6) с разных количеством слоев. При этом для решения задачи ЧБЛП (7)–(20) использовался пакет решения оптимизационных задач LPSolve.

Однослойная модульная регрессия, построенная при p=1 и M=100000, имеет вид

$$\tilde{y}_1 = 8982{,}7583 - 3{,}0657x_1 + 0{,}0426x_2 + 0{,}2911x_3 - |z_0|,$$

$$z_0 = -537{,}2336 + 2{,}0973x_1 + 0{,}0288x_2 + 0{,}2984x_3.$$

Сумма модулей остатков однослойной регрессии составила 166,1534, что более чем в 3 раза меньше, чем для линейной модели (21).

Двухслойная модульная регрессия, построенная при p=2 и M=100000, имеет вид

$$\tilde{y}_2 = 9031{,}5156 - 3{,}921x_1 + 0{,}0848x_2 + 0{,}3456x_3 - |z_1|,$$

$$z_1 = -20132{,}4711 + 112{,}7288x_1 + 1{,}5812x_2 + 4{,}1788x_3 + |z_0|,$$

$$z_0 = -20663{,}6902 + 113{,}451x_1 + 1{,}7385x_2 + 4{,}5418x_3.$$

Сумма модулей остатков двухслойной регрессии на фоне значений переменной y в Таблице 1 близка к нулю и составила всего 12,512.

Несмотря на то, что в построенной двухслойной регрессии число параметров уже чрезмерно по сравнению с числом наблюдений, для тестирования работоспособности предложенного математического аппарата было принято решение построить еще и трехслойную модульную регрессию. При p=3 и M=100000 она имеет вид

$$\tilde{y}_3 = 8340{,}57 + 1{,}2524x_1 - 0{,}03307x_2 + 0{,}3499x_3 + |z_2|,$$

$$z_2 = -453{,}649 + 2{,}2097x_1 - 0{,}028x_2 + 0{,}0504x_3 + |z_1|,$$

$$z_1 = 2{,}275x_1 + 0{,}774x_2 - 1{,}6129x_3 + |z_0|,$$

$$z_0 = -693{,}6385 + 0{,}3856x_1 - 0{,}7021x_2 + 1{,}9308x_3.$$

Заметим, что в трехслойной регрессии число параметров больше, чем число наблюдений. Поэтому задача ЧБЛП (7)–(20) может иметь не единственное решение. При оценивании трехслойной модели было использовано дополнительное ограничение $\alpha_{01} = 0$.

Сумма модулей остатков трехслойной регрессии, как и ожидалось, равна 0.

Все остатки построенных моделей (линейной, однослойной, двухслойной и трехслойной) приведены в последних четырех столбцах E_{lin}, E_1, E_2 и E_3 Таблицы 1. Как видно, для линейной регрессии оказалось 4 нулевых остатка, для однослойной – 8, для двухслойной – 11, для трехслойной – 15.

Заключение

Предложенные в статье многослойные модульные линейные регрессии обобщают как линейную регрессию, так и некоторые известные модульные конструкции. Это означает, что даже при построении однослойной модели ее качество аппроксимации всегда будет не хуже качества линейной регрессии, имеющей в 2 раза меньше неизвестных параметров. Тем самым, многослойные модульные регрессии могут быть эффективны при решении самых разнообразных задач анализа данных. Разработанный в статье способ оценивания многослойных модульных моделей с помощью метода наименьших модулей на основе задачи частично-булевого линейного программирования требует дальнейшей реализации в виде специального программного обеспечения. Хочется отметить, что предложенная в статье многослойная конструкция была подобрана так, чтобы минимизировать число бинарных переменных в задаче математического программирования. В дальнейшем эта конструкция может служить основой для более сложных структурных спецификаций регрессионных моделей.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Chicco D., Warrens M.J., Jurman G. The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation. *PeerJ Computer Science*. 2021;7. https://doi.org/10.7717/peerj-cs.623
2. Westfall P.H., Arias A.L. *Understanding Regression Analysis: A Conditional Distribution Approach*. New York: Chapman and Hall/CRC; 2020. 514 p. https://doi.org/10.1201/9781003025764
3. Nguyen Ph.-M., Pham H.T. A rigorous framework for the mean field limit of multilayer neural networks. *Mathematical Statistics and Learning*. 2023;6(3):201–357. https://doi.org/10.4171/msl/42
4. Talaat M., Farahat M.A., Mansour N., Hatata A.Y. Load forecasting based on grasshopper optimization and a multilayer feed-forward neural network using regressive approach. *Energy*. 2020;196. https://doi.org/10.1016/j.energy.2020.117087
5. Ивахненко А.Г. *Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем*. Киев: Наукова думка; 1982. 296 с.
Ivakhnenko A.G. *Induktivnyi metod samoorganizatsii modelei slozhnykh sistem.* Kyiv: Naukova dumka; 1982. 296 p. (In Russ.).
6. Муравина О.М. Метод группового учёта аргументов при анализе геофизических данных. *Геофизика*. 2012;(6):16–20.
Muravina O.M. The metod of the group account of arguments in the analysis of geophysical date. *Geofizika = Journal of Geophysics.* 2012;(6):16–20. (In Russ.).
7. Базилевский М.П., Ойдопова А.Б. Оценивание модульных линейных регрессионных моделей с помощью метода наименьших модулей. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления*. 2023;(45):130–146.
Bazilevskiy M.P., Oydopova A.B. Estimation of modular linear regression models using the least absolute deviations. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Elektrotekhnika, informatsionnye tekhnologii, sistemy upravleniya = Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Electrotechnics, Informational Technologies, Control Systems.* 2023;(45):130–146. (In Russ.).
8. Базилевский М.П. Программное обеспечение для оценивания модульных линейных регрессий. *Информационные и математические технологии в науке и управлении*. 2023;(3):136–146. https://doi.org/10.25729/ESI.2023.31.3.013
Bazilevskiy M.P. Software for estimating modular linear regressions. *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii = Information and mathematical technologies in science and management.* 2023;(3):136–146. (In Russ.). https://doi.org/10.25729/ESI.2023.31.3.013
9. Базилевский М.П. Совершенствование алгоритма точного оценивания модульных линейных регрессий с помощью метода наименьших модулей. *Вестник Технологического университета*. 2024;27(4):97–102.

Bazilevskiy M.P. Improving the algorithm for exact estimation of modular linear regressions using the least absolute deviations. *Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta = Herald of Technological University*. 2024;27(4):97–102. (In Russ.).

10. Базилевский М.П. Оценивание регрессионных моделей с мультиарной операцией модуль методом наименьших модулей. *Инженерный вестник Дона*. 2024;(5). URL: http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2024/9188
Bazilevskiy M.P. Estimation of regression models with multiary modulus operation using least absolute deviations. *Inzhenernyi vestnik Dona = Engineering Journal of Don*. 2024;(5). (In Russ.). URL: http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2024/9188
11. Thanoon F.H. Robust Regression by Least Absolute Deviations Method. *International Journal of Statistics and Applications*. 2015;5(3):109–112.
12. Liu Zh., Yang Y. Least absolute deviations estimation for uncertain regression with imprecise observations. *Fuzzy Optimization and Decision Making*. 2020;19(1):33–52. https://doi.org/10.1007/s10700-019-09312-w
13. Carrizosa E., Molero-Río C., Romero Morales D. Mathematical optimization in classification and regression trees. *TOP*. 2021;29(1):5–33. https://doi.org/10.1007/s11750-021-00594-1
14. Park Y.W., Klabjan D. Subset selection for multiple linear regression via optimization. *Journal of Global Optimization*. 2020;77(3):543–574. https://doi.org/10.1007/s10898-020-00876-1
15. Базилевский М.П. Алгоритм приближенного оценивания с помощью метода наименьших квадратов двухслойных неэлементарных линейных регрессий с двумя объясняющими переменными. *Современные наукоемкие технологии*. 2024;(4):10–14. https://doi.org/10.17513/snt.39966
Bazilevskiy M.P. An approximate ordinary least squares estimation algorithm for two-layer non-elementary linear regressions with two explanatory variables. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii = Modern high technologies*. 2024;(4):10–14. (In Russ.). https://doi.org/10.17513/snt.39966
16. Воронков П.Т., Воронков А.П., Белов А.Н., Дудина Е.А., Илюхина Л.А. Моделирование экономической доступности лесных ресурсов с использованием регрессионного анализа. *Лесохозяйственная информация*. 2009;(1-2):7–13.
Voronkov P.T., Voronkov A.P., Belov A.N., Dudina E.A., Ilyukhina L.A. Modelirovanie ekonomicheskoi dostupnosti lesnykh resursov s ispol'zovaniem regressionnogo analiza. *Lesokhozyaistvennaya informatsiya = Forestry Information*. 2009;(1-2):7–13. (In Russ.).
17. Солдатов М.С., Малхазова С.М., Румянцев В.Ю., Леонова Н.Б. Прогноз изменений прироста древесины в лесах Европейской части России в связи с глобальным потеплением. *Известия Российской академии наук. Серия географическая*. 2014;(2):96–102. https://doi.org/10.15356/0373-2444-2014-2-96-102
Soldatov M.S., Malkhazova S.M., Rumyantsev V.Yu., Leonova N.B. Forecast of Change in Wood Growth in Forests of European Russia Due to Global Warming. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Geograficheskaya*. 2014;(2):96–102. (In Russ.). https://doi.org/10.15356/0373-2444-2014-2-96-102

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Базилевский Михаил Павлович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Математика», Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Российская Федерация.

Mikhail P. Bazilevskiy, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Mathematics, Irkutsk State Transport University, Irkutsk, the Russian Federation.

e-mail: mik2178@yandex.ru
ORCID: 0000-0002-3253-5697

Статья поступила в редакцию 17.05.2024; одобрена после рецензирования 30.05.2024; принята к публикации 17.06.2024.

The article was submitted 17.05.2024; approved after reviewing 30.05.2024; accepted for publication 17.06.2024.