УДК 517.927
DOI: 10.26102/2310-6018/2024.47.4.003

Аппроксимация эллиптического оператора с особенностью в пространстве заданных на графе функций

И.В. Приходько[1]✉, И.В. Перова[2], А.С. Гунькина[1], А.А. Парт[2]

[1]*Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация*
[2]*Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация*

Резюме. В статье предложен подход аппроксимации эллиптического оператора, используемого при описании математических моделей процессов переноса сплошных сред и в задачах управления упругими колебаниями сетеподобных конструкций. Для максимального облегчения изучения представляемого материала, т. е. для упрощения математической символики сеточных функций, пространственная переменная функций области определения эллиптического оператора изменяется на ориентированном геометрическом графе-звезде, что не является ограничительным обстоятельством, т. к. произвольный граф (в приложениях – сеть) являет собой совокупность звезд, которые отличаются друг от друга только содержанием различного числа ребер. Формируется алгебраическая система и соответствующий ей конечномерный оператор, устанавливаются свойства этого оператора и приводятся примеры построения (и анализа) разностных схем для уравнения переноса тепла и уравнения колебаний (волнового уравнения) с пространственной переменной, изменяющейся на графе (сети). Полученные результаты используются для решения задач оптимизации дифференциальных систем уравнений, пространственная переменная которых изменяется на графе. При этом осуществляется сведение задачи оптимального управления к конечной проблеме моментов, что открывает путь получения численного анализа, не зависящего от размерности вектора управления, необходимо только знать ограниченное число сеточных собственных функций конечно-разностного аналога эллиптического оператора.

Ключевые слова: эллиптический оператор на графе, конечномерный аналог, разностная схема с особенностями, оптимизация эллиптического оператора.

Для цитирования: Приходько И.В., Перова И.В., Гунькина А.С., Парт А.А. Аппроксимация эллиптического оператора с особенностью в пространстве заданных на графе функций. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2024;12(4). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1671 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.47.4.003

Approximation of an elliptic operator with a singularity in the space of functions specified on the graph

I.V. Prikhodko[1]✉, I.V. Perova[2], A.S. Gunkina[1], A.A. Part[2]

[1]*Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, the Russian Federation*
[2]*Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation*

Abstract. Was proposed an approach to approximation of an elliptic operator used in describing mathematical models of transfer processes of continuum and in problems of controlling elastic vibrations of network-like structures. To ease the problem of studying the presented material, i.e. to simplify the mathematical symbolism of grid functions, the space variable of functions of the domain of definition of the elliptic operator changes on the oriented geometric graph-star, which is not a restrictive circumstance, because an arbitrary graph (in applications – a network) is a collection of stars that differ from each other only in the quantity of edges. An algebraic system and its corresponding finite-dimensional operator are formed, the properties of this operator are established and examples of constructing (and analyzing) difference schemes for the heat transfer equation and the oscillation equation (wave equation) with a space variable changing on a graph (network) are given. In this case, the optimal control problem is reduced to a finite moment problem, which opens the way to obtaining a numerical analysis that does not depend on the dimension of the control vector, it is only necessary to know a limited number of grid eigenfunctions of the finite-difference analogue of the elliptic operator.

Keywords: elliptic operator on a graph, finite-dimensional analog, difference scheme with singularities, optimization of the elliptic operator.

For citation: Prikhodko I.V., Perova I.V., Gunkina A.S., Part A.A. Approximation of an elliptic operator with a singularity in the space of functions specified on a graph. *Modeling, Optimization and Information Technology.* 2024;12(4). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1671 DOI: 10.26102/2310-6018/2024.47.4.003 (In Russ.).

Введение

Эллиптический оператор как главная составляющая математических моделей многих физических процессов с сетевым носителем (например, процессов переноса сплошных сред, волновых процессов, процессов диффузии сред в биомедицине и др.) существенно влияет на выбор тех или иных приближенных (численных) методов при анализе свойств изучаемых процессов. Причиной тому является тесная связь математических формализмов моделей с краевыми и начально-краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными (уравнениями математической физики). Традиционно при численном анализе упомянутых моделей используется метод редукции дифференциальных систем (бесконечномерных задач) к алгебраическим системам (разностным схемам конечномерных задач). При этом ключевую роль играет выбор закономерностей аппроксимации дифференциальных выражений и сопутствующих им особенностей, обусловливающих сетевой характер процессов. Последнее, определяющее отличительную особенность сетевых процессов, состоит в установлении формализмов, с помощью которых осуществляется математическое описание физических явлений в местах ветвлений сети, т. е. установлении естественных балансных соотношений, необходимо возникающих в этих местах. Очевидно, эти балансные соотношения являются частью описательной характеристики эллиптического оператора, требующей специального изучения. Таким образом, вводится понятие эллиптического оператора с особенностью и предлагается его детальный анализ, основанный на топологических свойствах геометрического графа.

Основные понятия геометрического графа

Ниже приведены пояснения структуры графа (в приложениях – сети), заимствованные из работ [1, 2]. Предлагаемое исследование использует класс функций, непрерывных на ограниченном геометрическом (а значит, ориентированном) графе, как на носителе, т. е. области изменения переменной функций. Для простоты изложения используется граф с одним внутренним узлом и конечным числом ребер – в литературе граф-звезда. А именно, через Γ обозначен граф-звезда, имеющий m ребер $\gamma_k(k=\overline{1,m})$, которые примыкают к узлу ζ (внутреннему узлу), причем все ребра имеют одинаковую длину, равную $\frac{\pi}{2}$. Считаем, что $m-1$ ребро $\gamma_k(k=\overline{1,m-1})$ ориентированы в соответствии с топологией отрезка $[0,\frac{\pi}{2}]$, ребро γ_m – в соответствии с отрезком $[\frac{\pi}{2},\pi]$, узел ξ параметризован числом $\frac{\pi}{2}$, граничные узлы $\xi_k\in\gamma_k(k=\overline{1,m-1})$

параметризованы числом 0, граничный узел ξ_m параметризован числом π. Следует отметить, что граф-звезда является базовой ячейкой, формирующей произвольную сеть.

Введем множество $C(\Gamma)$ функций, непрерывных на графе Γ, и множество функций $C[\Gamma]$, кусочно-непрерывных на графе Γ (последние имеют разрыв типа скачка только во внутреннем узле ζ). Через $C^2[\Gamma]$ обозначим множество функций, имеющих производные до второго порядка включительно во всех точках графа, исключая граничные и внутреннюю точки.

Оператор Лапласа на функциях одной переменной (оператор на графе)

Приведем основные утверждения, полученные в работе [2]. Символом $\mathfrak{R}$ обозначим совокупность функций $\varphi(x)$ класса $C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma]$, причем для них имеют место соотношения:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{d\phi(x)}{dx}|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k} - \frac{d\phi(x)}{dx}|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_m} = 0.$$

На совокупности $\mathfrak{R}$ введем оператор

$$(A\varphi)(x) \equiv -\frac{d^2\varphi(x)}{d^2x},$$

областью определения которого является подмножество $D_A \subset \mathfrak{R}$ функций, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(0)_{\gamma_k} = 0(k = \overline{1, m-1}), \varphi(\pi)_{\gamma_m} = 0.$$

Очевидно, действие оператора A осуществляется в пространстве функций с суммируемыми квадратами $L^2(\Gamma)$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Если $\phi(x), \psi(x) \in D_A$, то*

$$\int_\Gamma (A\phi)(x)\psi(x)dx = \int_\Gamma \phi(x)(A\psi)(x)dx.$$

Лемма 2. *Если $\phi(x), \psi(x) \in \mathfrak{R}$, то*

$$\int_\Gamma \left(-\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)\right)\psi(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \phi'(0)_{\gamma_k}\psi(0)_{\gamma_k} -$$

$$-\phi'(\pi)_{\gamma_m}\psi(\pi)_{\gamma_m} + \int_\Gamma \frac{d\phi(x)}{dx}\frac{d\psi(x)}{dx}dx.$$

Замечание 1. Оператор A симметричен (следствие утверждения леммы 1) и положительно определен (следствие утверждения леммы 2).

Теорема 1 [2]. *Оператор A имеет вещественные собственные значения и им соответствующие собственные функции, причем собственные функции ортогональны в $L^2(\Gamma)$, если их собственные значения различны.*

Отличительная особенность множества собственных значений оператора A от классического эллиптического оператора, действующего на множестве гладких функций, состоит в наличии свойства кратности собственных значений, приобретенного в силу характерной структуры графа, как совокупности конечного числа отрезков. А именно, если обозначить через $\{\lambda_n\}_1^\infty$ $(\lambda_n = n^2)$ множество собственных значений, то при нечетном n собственное значение λ_n простое, а при четном n имеет кратность $m-1$ (m

– число ребер графа). В соответствии с этим имеет место зависимость представлений собственных функций от номера n собственного значения, т. е. от чисел $l = 1,2,\ldots$:
если $n = 2l - 1$, то

$$\phi_{2l-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{l\pi}} sin(2l-1)x, x \in \gamma_k, k = \overline{1,m}; \tag{1}$$

если $n = 2l$, то

$$\varphi_{2l}^1(x) = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}} sin2lx, x \in \gamma_1, \\ 0, x \in \gamma_k, k = \overline{2,m-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{2}} sin2lx, x \in \gamma_m, \end{cases} \tag{2_1}$$

$$\underset{(i=\overline{2,m-2})}{\varphi_{2l}^1} = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{i+1}} (-\frac{1}{\sqrt{i}}) sin2lx, x \in \gamma_k, k = \overline{1,i-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{i+1}} \sqrt{i} sin2lx, x \in \gamma_i, \\ 0, x \in \gamma_k, k = \overline{i+1,m-1}, \end{cases} \tag{2_2}$$

$$\varphi_{2l}^{m-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{m\pi}} \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{m-1}} sin2lx, x \in \gamma_k, k = \overline{1,m-2}, \\ \sqrt{m-1} sin2lx, x \in \gamma_{m-1}, \\ \frac{1}{\sqrt{m-1}} sin2lx, x \in \gamma_m. \end{cases} \tag{2_3}$$

Множество $\{\lambda_n\}_1^\infty$ допускает упорядочение по возрастанию: $\lambda_1 \le \lambda_2, \ldots$ и если собственное значение кратное, то оно используется в цепочке по числу его кратности, при этом λ_n соответствует своя собственная функция (1) или одна из (21), (22), (23). Обозначим через $\{\tilde{\phi}_n(x)\}_1^\infty$ множество собственных функций, которое образует, как показано в работе [3], ортонормальную систему и справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Система $\{\tilde{\phi}_n(x)\}_1^\infty$ является полной и образует базис в $L^2(\Gamma)$.*

Дискретный оператор Лапласа на графе

Определим для каждого фиксированного k и ребра γ_k ($k = \overline{1,m-1}$) сетку γ_k^h в виде совокупности точек $x_i \in \gamma_k (i = \overline{0,N})$, имеющих числовые значения $x_i = ih$, где $h = \frac{\pi}{2N}$; для ребра γ_m сетка γ_m^h представлена совокупностью $\gamma_m^h = \{x_{N+i} \in \gamma_m (i = \overline{0,N})\}$, где $x_{N+i} = \frac{\pi}{2} + (N+i)h$. Учитывая представления сеток γ_k^h ($k = \overline{1,m}$) введем сетку Γ^h для графа Γ соотношением $\Gamma^h = \bigcup_{k=1}^m \gamma_k^h$ (далее x_i – узлы сетки Γ^h, h – шаг сетки). Сеточную функцию $\varphi^h(x)$ на введенной выше сетке Γ^h определим ее значениями $\varphi(x_i)_{\gamma_k}$, т. е. $(\varphi_i)_{\gamma_k}^h) = \varphi(x_i)_{\gamma_k}$, и совокупность таким образом введенных сеточных функций $\varphi^h(x)$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$(\varphi_N)_{\gamma_k}^h = (\varphi_N)_{\gamma_m}^h, k = \overline{1,m-1},$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left((\varphi_N)_{\gamma_k}^h - (\varphi_{N-1})_{\gamma_k}^h\right) - \left((\varphi_{N+1})_{\gamma_m}^h - (\varphi_N)_{\gamma_m}^h\right) = O(h^2), \tag{3}$$

обозначим символом $\Re^h$.

Замечание 2. Равенства (3) устанавливают аппроксимации представленных выше соотношений $\sum_{k=1}^{m-1}\frac{d\varphi(x)}{dx}|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k}-\frac{d\varphi(x)}{dx}|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_m}=0$, которые определяют совокупность $\mathfrak{R}$. На множестве сеточных функций $\varphi^h\in\mathfrak{R}^h$ определим оператор A^h, аппроксимирующий оператор A:

$$A^h\varphi^h=\begin{cases}\dfrac{2(\varphi_1)_{\gamma_k}^h-(\varphi_2)_{\gamma_k}^h}{h^2},\\ \dfrac{-(\varphi_{i-1})_{\gamma_k}^h+2(\varphi_i)_{\gamma_k}^h-(\varphi_{i+1})_{\gamma_k}^h}{h^2}, i=\overline{2,N-1},\end{cases}$$

на сетках ребер $\gamma_k(k=\overline{1,m-1})$ и

$$A^h\varphi^h=\begin{cases}\dfrac{-(\varphi_{i-1})_{\gamma_m}^h+2(\varphi_i)_{\gamma_m}^h-(\varphi_{i+1})_{\gamma_m}^h}{h^2}, i=\overline{N+1,2N-2},\\ \dfrac{-(\varphi_{2N-2})_{\gamma_m}^h+2(\varphi_{2N-1})_{\gamma_m}^h}{h^2},\end{cases}$$

на сетке ребра γ_m.

Исходя из сказанного, A^h является конечномерным аналогом оператора A с областью определения D_{A^h} – совокупностью сеточных функций $\phi^h\in\mathfrak{R}^h$, которые определены условиями типа Дирихле:

$$(\varphi_0)_{\gamma_k}^h=0(k=\overline{1,m-1}),(\varphi_{2N})_{\gamma_m}^h=0. \quad (2)$$

Очевидно, равенства (4) являются фрагментом точного количественного описания области определения D_A и являют собой описание области определения D_{A^h} оператора A^h. Получили, что A^h, действуя на φ^h, задает сеточную функцию $A^h\phi^h$ в узлах сетки $\Gamma^h\backslash\{x_N\}$ и определяет конечномерным аналогом для оператора A, погрешность процедуры аппроксимации равна h^2.

Замечание 3. Как следует из построений, конечномерный оператор A^h симметричен и положительно определен, как и оператор A.

Нетрудно заметить, что первые $m(N-1)+1$ собственные функции $\tilde{\phi}_n(x)$ оператора A определяют собственные сеточные функции (собственные векторы) $\tilde{\phi}_n^h$ как проекции $\tilde{\phi}_n(x)$ на сетку Γ^h. А значит, собственные (характеристические) числа ρ_n конечномерного оператора A^h имеют представление $\rho_n=\frac{4}{h^2}\sin^2\frac{nh}{2}$, $n=\overline{1,2N-1}$. В этом представлении характеристических чисел имеется особенность: если n принимает нечетное значение, тогда оно порождает простое характеристическое число ρ_n, если же n принимает четное значение, то характеристическое число ρ_n принимает кратность $m-1$. Для собственных сеточных функций $\tilde{\phi}_n^h$, соответствующих указанным характеристическим числам, имеют место следующие представления, аналогичные (1) и (21), (22), (23):

если $n=2l-1$, то

$$\phi_{2l-1}^h=\frac{2}{\sqrt{l\pi}}sin(2l-1)ih,\ ih\in\gamma_k^h,k=\overline{1,m}; \quad (3)$$

если $n=2l$, то

$$\underset{(i=\overline{2,m-2})}{\varphi_{2l}^{h}} = \frac{2}{\sqrt{m\pi}}\begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}}sin2lih, ih \in \gamma_1^h, \\ 0,\ ih \in \gamma_k^h, k = \overline{2, m-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{2}}sin2lih, ih \in \gamma_m^h, \end{cases} \qquad (6_1)$$

$$\underset{(i=\overline{2,m-2})}{\varphi_{2l}^{h}(x)} = \frac{2}{\sqrt{m\pi}}\begin{cases} \sqrt{\frac{m}{i+1}}(-\frac{1}{\sqrt{i}})sin2lih, ih \in \gamma_k^h, k = \overline{1, i-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{i+1}}\sqrt{i}sin2lih, ih \in \gamma_k^h, \\ 0, ih \in \gamma_k, k = \overline{i+1, m-1}, \\ \sqrt{\frac{m}{i+1}}1/\sqrt{i}sin2lih, ih \in \gamma_k^h, \end{cases} \qquad (6_2)$$

$$\varphi_{2l}^{h}(x) = \frac{2}{\sqrt{m\pi}}\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{m-1}}sin2lih, ih \in \gamma_i^h, k = \overline{1, m-2}, \\ \sqrt{m-1}sin2lih, x \in \gamma_{m-1}^h, \\ \frac{1}{\sqrt{m-1}}sin2lih, ih \in \gamma_i^h. \end{cases} \qquad (6_3)$$

Замечание 4. Множество приведенных собственных сеточных функций $\tilde{\phi}_n^h$ оператора A^h, аппроксимирующего оператор A, образует спектральный базис для евклидова $(m(N-1)+1)$-мерного пространства.

Замечание 5. Процесс редукции неограниченного дифференциального оператора A к оператору A^h сформировал для A приближение в виде конечномерного аналога A^h, который является ограниченным оператором; множество $\{\tilde{\varphi}_n^h\}$ собственных сеточных функций (5), (6_1), (6_2), (6_3), этого конечномерного аналога является конечномерным базисом и используется при построении разложений произвольной сеточной функции (вектора).

Представленный подход, выраженный в редукции дифференциального оператора к конечномерному аналогу, задает пути формирования разностных схем для уравнений переноса сплошных сред и волновых уравнений. Ниже приводятся примеры построения разностных схем с конечномерным оператором для уравнения переноса тепла и уравнения колебаний (волнового уравнения) с пространственной переменной, изменяющейся на графе (сети).

Дифференциально-разностная система для уравнения переноса тепла

Пусть функция $u(x,t)$ описывает температурное поле при изменении переменных x, t в $\Gamma \times [0,T]$, $0 < T < \infty$. Распространение тепла на $\Gamma \setminus \overset{k=1}{\underset{m}{\cup}} \xi_k$ (здесь $\xi_k (k = \overline{1,m})$ – граничные узлы Γ) при изменении времени $t \in (0,T)$ подчинено соотношениям

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad (4)$$

$$u(x,t)|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k} = u(x,t)|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_m} (k = \overline{1, m-1}),$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u(x,t)}{dx}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k} - \frac{\partial u(x,t)}{dx}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_m} = 0. \qquad (5)$$

Краевая задача формируется присоединением начального

$$u(x,0)=\theta(x),\ x\in\Gamma \tag{6}$$

и краевых условий

$$u(0,t)_{\gamma_k}=\mu_k(t)(k=\overline{1,m-1}),\quad u(\pi,t)_{\gamma_m}=\nu(t) \tag{7}$$

для произвольного $t\in(0,T)$.

Введем следующее обозначение:$R(\Gamma)$ – совокупность не содержащих концевых точек ребер, т. е. $R(\Gamma)=\Gamma\backslash(\partial\Gamma\cup\{\zeta\})$. Тогда переменные уравнений (7) изменяются в области Ц= $R(\Gamma)\times(0,T)$, соотношения (8) определены на J (Ц)= $\{\zeta\}\times[0,T]$. Решение задачи (8)–(10) есть по определению функция $u(x,t)\in C^2$ (Ц)∩ $C(\Gamma\times[0,T])$, удовлетворяющая (7) в Ц, (8) в J (Ц), (9) при $t=0$, $x\in\Gamma$, (10) при $x\in\partial\Gamma$, $t\in[0,T]$. При этом функции $\phi(x),\psi(x),\mu_k(t),\nu(t)$ подчинены условиям согласованности

$$\varphi(0)_{\gamma_k}=\mu_k(0)(k=\overline{1,m-1}),\quad \varphi(\pi)_{\gamma_m}=\nu'(0),$$

$$\psi(0)_{\gamma_k}=\mu_k'(0)(k=\overline{1,m-1}),\quad \psi(\pi)_{\gamma_m}=\nu(0).$$

При этом, очевидно, должны наличествовать условия гладкости

$$\phi(x)\in C^2[\Gamma],\psi(x)\in C^1[\Gamma]\text{ и }\mu_k(t)(k=\overline{1,m-1}),\nu(t)\in C^2[0,T].$$

Построим дифференциально-разностную задачу для сеточной функции (т. е. векторной функции) $u(t)^h\in\Re^h$ с компонентами $(u_i(t))^h=u(x_i,t)$, $x_i\in\Gamma^h$ (через $(u_i(t))^h_{\gamma_k}$ обозначается сужение компоненты вектор-функции $u(t)^h$ на сетку γ_k^h ребра γ_k):

$$\frac{d(u_i(t))^h_{\gamma_m}}{dt}+\frac{-(u_{i-1}(t))^h_{\gamma_m}+2(u_i(t))^h_{\gamma_m}-(u_{i+1}(t))^h_{\gamma_m}}{h^2}=0, i=\overline{N+1,2N-1},$$

$$\frac{d(u_i(t))^h_{\gamma_m}}{dt}+\frac{-(u_{i-1}(t))^h_{\gamma_m}+2(u_i(t))^h_{\gamma_m}-(u_{i+1}(t))^h_{\gamma_m}}{h^2}=0, i=\overline{N+1,2N-1}$$

$$u(0)^h=\theta^h, \tag{11}$$

$$(u_0(t))^h_{\gamma_k}=\mu_k(t)(k=\overline{1,m-1}),$$

$$(u_{2N}(t))^h_{\gamma_m}=\nu(t)$$

здесь $u(t)^h\in\Re^h$ при $t\in[0,T]$.

Соответствующая однородная дифференциально-разностная задача имеет вид

$$\frac{d(u_1(t))^h_{\gamma_k}}{dt}+\frac{2(u_1(t))^h_{\gamma_k}-(u_2(t))^h_{\gamma_k}}{h^2}=\frac{\mu_k(t)}{h^2},$$

$$\frac{d(u_i(t))^h_{\gamma_k}}{dt}+\frac{-(u_{i-1}(t))^h_{\gamma_k}+2(u_i(t))^h_{\gamma_k}-(u_{i+1}(t))^h_{\gamma_k}}{h^2}=0,\ i=\overline{2,N-1}, \tag{12_1}$$

$$\frac{d(u_i(t))^h_{\gamma_m}}{dt}+\frac{-(u_{i-1}(t))^h_{\gamma_m}+2(u_i(t))^h_{\gamma_m}-(u_{i+1}(t))^h_{\gamma_m}}{h^2}=0,\quad i=\overline{N+1,2N-2},$$

$$\frac{d(u_{2N-1}(t))^h_{\gamma_m}}{dt}+\frac{-(u_{2N-2}(t))^h_{\gamma_m}+2(u_{2N-1}(t))^h_{\gamma_m}}{h^2}=\frac{\nu(t)}{h^2}, \tag{12_2}$$

$$u(0)^h=\theta^h,$$

$$(u_0(t))^h_{\gamma_k}=0(k=\overline{1,m-1}), \tag{12_3}$$

$$(u_{2N}(t)^h_{\gamma_m}=0.$$

Задача (11) и эквивалентная ей задача (12_1)–(12_3) и в терминах оператора A^h для сеточной функции $u(t)^h \in \Re^h$ принимает вид

$$\frac{du(t)^h}{dt} + A^h u(t)^h = f(t)^h, u(0)^h = \theta^h, \tag{8}$$

здесь используются

$$f(t)^h_{\gamma_k} = \begin{cases} \dfrac{\mu_k(t)}{h^2}, i = 1, \\ 0, i = \overline{2, N-1}, \end{cases} k = \overline{1, m-1},$$

$$f(t)^h_{\gamma_m} = \begin{cases} 0, i = \overline{N+1, 2N-2}, \\ \dfrac{\nu(t)}{h^2}, i = 2N-1. \end{cases}$$

Разностная схема для уравнения переноса тепла

Для упрощения математической символики сеточных функций опустим индекс h и оставим только индексы i, j. Интегрируя (13) по временной переменной в интервалах $[t_j, t_{j+1}]$ (здесь $t_j = j\tau, \tau = \frac{T}{J}, j = \overline{0, J}$), и проводя несложные преобразования в точках t_j, получаем явную разностную схему вида

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = (A^h u^h)^j + f^j, j = \overline{0, J-1}, u^0 = \theta. \tag{9}$$

Учитывая замечания 3 и 4, а также результаты работ [4], заключаем, что решение задачи (14) можно представить с помощью разложения по собственным векторам $\tilde{\phi}^h_n$ (в виде ряда Фурье):

$$u^j = \sum_{n=1}^{m(N-1)+1} U^j_n \tilde{\phi}_n, \tag{10}$$

коэффициенты U^j_n имеют вид

$$U^j_n = \frac{1}{\omega_n}[u^j, \tilde{\varphi}_n] = \frac{1}{\omega_n} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{N-1} (u^j_i)_{\gamma_k} (\tilde{\varphi}_i)_{n_{\gamma_k}} + \frac{1}{\omega_n} \sum_{i=N+1}^{2N-1} (u^j_i)_{\gamma_m} (\tilde{\varphi}_i)_{n_{\gamma_m}},$$

(здесь через $(\tilde{\varphi}_i)_{n_{\gamma_k}}$, как и выше, обозначены компоненты $\tilde{\phi}^h_n$); аналогичное представление имеют $f^j, j = \overline{0, J-1}$ и начальные данные θ:

$$f^j = \sum_{n=1}^{m(N-1)+1} F^j_n \tilde{\varphi}_n, F^j_n = \frac{1}{\omega_n}[f^j, \tilde{\varphi}_n] = \frac{1}{\omega_n h^2} \sum_{k=1}^{m-1} \mu^j_k (\tilde{\varphi}_1)_{n_{\gamma_k}} + \frac{1}{\omega_n h^2} \nu^j (\tilde{\varphi}_1)_{n_{\gamma_m}}, \tag{11}$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{m(N-1)+1} \Theta_n \tilde{\varphi}_n, \Theta_n = \frac{1}{\omega_n}[\theta, \tilde{\varphi}_n], \omega_n = [\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_n].$$

Учитывая представления (15), (16) в соотношениях (14) и умножая все соотношения (14) на $(\tilde{\phi}_i)_n$ с последующим суммированием от 1 до $m(N-1)+1$, получим алгебраические уравнения, дающие возможность определения U^j_n в сумме (15):

$$\begin{gathered} U^{j+1}_n = (1 - \tau\rho_n) U^j_n + \tau F^j_n, j = \overline{1, J-1}, \\ U^0_n = \Theta_n \end{gathered} \tag{12}$$

(здесь символами ρ_n обозначены собственные значения A^h, т. е. характеристические числа матрицы, порожденной оператором A^h).

Соотношения (17) задают явные формулы для определения неизвестных $U_n^j (j = \overline{1, J-1})$, получаем

$$U_n^j = r_n^j \Theta_n + \tau \sum_{l=1}^{j} r_n^{j-l} F_n^{l-1}, r_n = 1 - \tau\rho_n. \tag{13}$$

Из (18), учитывая $\tau > 0$, вытекает оценка

$$|U_n^j| \leq |r_n|^j |\Theta_n| + \tau \sum_{l=1}^{j} |r_n|^{j-l} |F_n^{l-1}|,$$

которая после замены $|F_n^l| (l = \overline{1, J-1})$ на большее значение $|F_n| = \max_l |F_n^l|$, приводит к окончательной оценке

$$|U_n^j| \leq |r_n|^j |\Theta_n| + \tau \frac{1 - |r_n|^j}{1 - |r_n|} |F_n|.$$

Последнее означает, что схема, представленная соотношением (14), является устойчивой при $|r_n| < 1$ (можно показать, что условие $|r_n| < 1$ также гарантирует счетную устойчивость схемы), т. к. $|r_n|^j$ и $\tau \frac{1-|r_n|^j}{1-|r_n|}$ равномерно ограничены, а именно, выполняются условия

$$|r_n|^j < 1, \tau \frac{1 - |r_n|^j}{1 - |r_n|} < j \cdot \tau < J \cdot \tau = T, n = \overline{1, m(N-1)+1}.$$

Дифференциально-разностная система для волнового уравнения

Пусть далее функция $u(x,t)$, $(x,t) \in \Gamma \times [0,T]$ описывает изменение амплитуд волнового процесса (как и выше, $0 < T < \infty$). Математическая модель волнового процесса на сети (графе) Γ представлена начально-краевой задачей [5]:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, (x,t) \in \Gamma \setminus \overset{m}{\underset{k=1}{\cup}} \xi_k \times (0,T), \tag{14}$$

$$u(x,t)|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k} = u(x,t)|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_m} (k = \overline{1, m-1}),$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial u(x,t)}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_k} - \frac{\partial u(x,t)}{dx}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}\in\gamma_m} = 0. \tag{15}$$

$$u(x,0) = \theta(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \dot{\theta}(x), x \in \Gamma, \tag{16}$$

$$u(0,t)_{\gamma_k} = \mu_k(t) (k = \overline{1, m-1}), u(\pi,t)_{\gamma_m} = \nu(t). \tag{17}$$

Как и выше, переменные уравнения (19) можно считать принадлежащими цилиндру Ц= $R(\Gamma) \times (0,T)$, равенства (20) выполняются на J (Ц)= $\{\zeta\} \times [0,T]$, для начально-краевой задачи (19)–(22) решением является функция $u(x,t) \in C^2(\Gamma \times [0,T])$, которая: 1) удовлетворяет (19) в Ц, 2) удовлетворяет (20) в J (Ц), 3) удовлетворяет (21) при $t = 0$, $x \in \Gamma$, 4) удовлетворяет (22) при $x \in \partial\Gamma$, $t \in [0,T]$.

Для исходных данных $\theta(x), \dot{\theta}(x), \mu_k(t), \nu(t)$ установлены условия согласованности:

$$\theta(0)_{\gamma_k} = \mu_k(0) (k = \overline{1, m-1}), \theta(\pi)_{\gamma_m} = \nu'(0),$$

$$\dot{\theta}(0)_{\gamma_k} = \mu_k'(0)(k = \overline{1, m-1}), \dot{\theta}(\pi)_{\gamma_m} = \nu(0),$$

а также условия гладкости

$$\theta(x) \in C^2[\Gamma], \dot{\theta}(x) \in C^1[\Gamma] \text{ и } \mu_k(t)(k = \overline{1, m-1}), \nu(t) \in C^2[0, T].$$

По аналогии с приведенным выше подходом при анализе задачи (7)–(10) осуществим редукцию задачи (19)–(22) к дифференциально-разностной системе (представлена ниже соотношениями (23)) для сеточной функции $u(t)^h \in \Re^h$:

$$\frac{d^2u(t)^h}{dt^2} + A^h u(t)^h = f(t)^h,$$

$$u(0)^h = \theta^h, \frac{du(0)^h}{dt} = \dot{\theta}^h. \tag{18}$$

Здесь, как и выше, используются

$$f(t)^h_{\gamma_k} = \begin{cases} \frac{\mu_k(t)}{h^2}, i = 1, \\ 0, i = \overline{2, N-1}, \end{cases} (k = \overline{1, m-1}), \quad f(t)^h_{\gamma_m} = \begin{cases} 0, i = \overline{N+1, 2N-2}, \\ \frac{\nu(t)}{h^2}, i = 2N-1. \end{cases}$$

Замечание 6. Неоднородные начальные условия в соотношениях (23), которые включены в область определения оператора A^h, можно трактовать как расширение области определения решения конечномерного аналога дифференциальной системы, и не являются аппроксимациями для $u(x,t)$ в точках x_0, x_{2N} разбиения сетки Γ^h.

Разностная схема для волнового уравнения

Явная разностная схема для (23) имеет следующий вид:

$$\frac{u^{j+1} - 2u^j + u^{j-1}}{\tau^2} + (A^h u^h)^j = f^j, \quad j = \overline{0, J-1}, \tag{19}$$

$$u^0 = \theta,$$

$$u^1 = \theta + \tau\dot{\theta} - \frac{\tau^2}{2} A^h \theta + f^0, \tag{20}$$

(для упрощения опущены индексы h).

В соответствии с замечаниями 3 и 4 здесь также, как при анализе разностной схемы (14), решение задачи (24)–(25) представимо в виде конечной суммы (разложении) по $\tilde{\phi}^h_n$ в соответствии с разложением (15). В результате получаем алгебраическую систему относительно U^j_n, необходимых определять как неизвестные:

$$\frac{U^{j+1}_n - 2U^j_n + U^{j-1}_n}{\tau^2} + \rho_n U^j_n = F^j_n, \qquad U^0_n = \Theta_n, U^1_n = \Theta_n + \tau\dot{\Theta}_n - \frac{\tau^2}{2}\rho_n\Theta_n + F^0_n,$$

($\Theta_n, \dot{\Theta}_n, F^j_n$ – вычисляемые коэффициенты ряда Фурье по собственным сеточным функциям $\tilde{\phi}^h_n$ соответствующих исходных данных $\theta, \dot{\theta}, f^j$).

Используя результаты работ [5, 6], получим достаточные условия счетной устойчивости разностной схемы (24), (25) (устойчивости по Нейману) в предположении дифференцируемости исходных данных. Учитывая $F^j_n = 0$, разностная схема (24), (25) имеет характеристическое уравнение вида

$$\eta_n^2 - 2(1 - \mu_n^2)\dot{\eta}_n + 1 = 0, \mu_n^2 = \frac{1}{2}\tau^2\rho_n. \tag{21}$$

Уравнение (26) для $\mu_n < 2$, а значит, для $\frac{\tau}{h} < 1$, имеет два комплекснозначных корня η_n^1, η_n^2, причем $|\eta_n^i| = 1$ $(i = 1,2)$, что означает наличие свойства устойчивости разностной схемы (24), (25). Последующие оценки для U_n^j в виде неравенств, аналогичных для выражений (18), устанавливают свойство счетной устойчивости разностной схемы (24), (25) и формирования достаточных условий на шаги h и τ для получения аналога теоремы о сходимости разностной схемы (24), (25).

Оптимизация дифференциальной системы. Конечная проблема моментов

Полученные результаты используются для решения задач оптимизации дифференциальных систем уравнений, пространственная переменная которых изменяется на графе (в приложениях – на сети) [4]. При этом задача управления сводится к конечной проблеме моментов, что открывает путь получения численного анализа, не зависящего от размерности вектора управления, необходимо только знать ограниченное число сеточных собственных функций конечно-разностного аналога эллиптического оператора.

Ниже рассматривается достаточно распространенная в приложениях задача перевода дифференциальной системы одного состояния в другое, влияние на эту систему осуществляется управлениями на границах соответствующей области изменения пространственной переменной (в граничных точках сети).

При переходе от дифференциальной системы к дифференциально-разностной (см. (13) или (24)) формируются алгебраические системы, порождаемые схемой (14) или (24)–(26), а значит формируется так называемая конечная проблема моментов, соответствующая (13) или (24).

Задача оптимального управления определяется необходимостью указать параметры системы (13) (или (24) для перевода ее из начального состояния

$$(u_i^0) = (\theta_i) \tag{27}$$

(или состояния

$$(u_i^0) = (\theta_i), \quad (u_i^1) = (\theta_i) + \tau(\dot{\theta}_i) + \frac{\tau^2}{2}\left(\frac{-(\theta_{i-1}) + 2(\theta_i) - (\theta_{i+1})}{h^2} + (f_i^0)\right)$$

для (24)) в финальное состояние

$$(u_i^J) = (\vartheta_i) \tag{28}$$

(или в состояние

$$(u_i^J) = (\vartheta_i), \; (u_i^{J-1}) = (\vartheta_i) - \tau(\dot{\vartheta}_i) \tag{29}$$

для (24)). Изменение индекса i зависит от выбора закона формирования Γ^h.
Если базироваться на схеме (28) для системы теплопереноса, приходим к представлению

$$(u^{j+1}) = (u^j) + \tau([A^h u^h]^j) + \tau(f^j). \tag{30}$$

Исходя из выражений (27), (29) получаем относительно $\mu_k^j, k = \overline{1, m-1}$ и ν^j, $j = \overline{1, J-1}$, следующую систему:

$$(u^{J-1}) + \tau([A^h u^h]^{J-1}) + \tau(f^{J-1}) = \vartheta^h, \tag{31}$$

на Γ^h. В системе (31) сужения $(u^{J-1})_{\gamma_k}$ $(k = \overline{1, m-1})$, $(u^{J-1})_{\gamma_m}$ сеточной функции (u^{J-1}) на $\gamma_k (k = \overline{1, m})$ зависят только от параметров $\mu_k^1, \mu_k^2, \dots, \mu_k^{J-1}$ $(k = \overline{1, m-1})$ и $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^{J-1}$, соответственно, системой (30) определены моментные соотношения.

Если базироваться на схеме (24), (25) для волновой системы, приходим к представлению

$$(u^{j+1}) = (2u^j) - \tau^2([A^h u^h]^j) - (u^{j-1}) + \tau^2(f^j). \quad (32)$$

Исходя из выражений, определяемых исходным состоянием (27) и состоянием (28) или (29), получаем относительно $\mu_k^j, k = \overline{1, m-1}$ и ν^j, $j = \overline{1, J-1}$, следующую систему:

$$(u^{J-1}) = \vartheta^h - \tau\dot{\vartheta}^h(u^{J-2}) = \vartheta^h - \tau\dot{\vartheta}^h - \tau^2([A^h u^h]^{J-1}) + \tau^2(f^{J-1}), \quad (33)$$

на Γ^h. В соотношениях (31)–(33) сужения $(u^{J-1})_{\gamma_k}$ $(k = \overline{1, m-1})$, $(u^{J-1})_{\gamma_m}$ сеточной функции (u^{J-1}) на $\gamma_k(k = \overline{1, m})$ зависят только от параметров $\mu_k^1, \mu_k^2, \ldots, \mu_k^{J-1}$ $(k = \overline{1, m-1})$ и $\nu^1, \nu^2, \ldots, \nu^{J-1}$, соответственно; системой (32) определены моментные соотношения.

Решение задачи оптимального управления завершается представлением решений полученных систем в удобной форме.

Замечание 7. Представленный подход редукции исходной задачи к конечной проблеме моментов, позволяет достаточно эффективно решать более общие задачи оптимизации процессов нагрева или колебаний сложносочлененных конструкций, а также проводить анализ управляемости этих процессов.

Заключение

В работе показана возможность сведения эллиптического оператора дифференциальной системы к своему дискретному аналогу и последующему изучению свойств этого аналога (положительность собственных чисел, спектральная полнота системы собственных векторов), необходимых при анализе сходимости соответствующих разностных схем. Разработанный подход, используемый для алгоритмизации и численного анализа задач математической физики, содержит возможности для обобщения на задачи с более сложными краевыми условиями, например, относящиеся к теории диффузионных процессов биомедицины и химической физики полимеров [4–6]. Полученные результаты теории оптимизации используются для решения задач оптимального управления дифференциальными системами, пространственная переменная которых изменяется на сети [7–9], а также при аппроксимации конечномерных операторов [10] и дискретизации по пространственной переменной краевых задач с особенностями [11]. При этом задача управления сводится к конечной проблеме моментов, что открывает путь получения численного анализа, не зависящего от размерности вектора управления, необходимо только знать ограниченное число сеточных собственных функций конечно-разностного аналога эллиптического оператора. Представлен метод, учитывающий достаточно часто встречающееся в приложениях свойство многофазности среды, дает возможность изучать задачи математической физики в более широком классе функций, где не используется свойство непрерывности функций, а достаточно интегрируемости в соответствующих областях.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Махинова О.А., Волкова А.С. Устойчивость разностной схемы для эллиптического уравнения с распределенными параметрами на графе. *Системы управления и информационные технологии.* 2014;(1):19–22.
2. Волкова А.С., Гнилицкая Ю.А., Провоторов В.В. О разрешимости краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов на геометрическом графе. *Системы управления и информационные технологии.* 2013;(1):11–15.
   Volkova A.S., Gnilitskaya Yu.A., Provotorov V.V. On the solubility of boundary value problems for parabolic and hyperbolic equations on geometric graphs. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii.* 2013;(1):11–15. (In Russ.).

3. Жабко А.П., Шиндяпин А.И., Провоторов В.В. Устойчивость слабого решения параболической системы с распределенными параметрами на графе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2019;15(4):457–471. (На англ.). https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.404
Zhabko A.P., Shindyapin A.I., Provotorov V.V. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2019;15(4):457–471. https://doi.org/10.21638/11702/spbu10.2019.404
4. Golosnoy A.S., Provotorov V.V., Sergeev S.M., Raikhelgauz L.B., Kravets O.Ja. Software engineering math for network applications. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1399. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1399/4/044047
5. Провоторов В.В. Моделирование колебательных процессов системы «мачта-растяжки». *Системы управления и информационные технологии.* 2008;(1-2):272–277.
6. Barykin S.E., Kapustina I.V., Sergeev S.M., Borisoglebskaya L.N., Provotorov V.V., De La Poza Plaza E., Saychenko L. Sustainability of Management Decisions in a Digital Logistics Network. *Sustainability.* 2021;13(16). https://doi.org/10.3390/su13169289
7. Подвальный С.Л., Провоторов В.В. Оптимизация по стартовым условиям параболической системы с распределенными параметрами на графе. *Системы управления и информационные технологии.* 2014;(4):70–74.
8. Провоторов В.В. Метод моментов в задаче гашения колебаний дифференциальной системы на графе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2010;(2):60–69.
Provotorov V.V. Method of moments in the problem of exstinguishing fluctuations of differential system on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2010;(2):60–69. (In Russ.).
9. Жабко А.П., Провоторов В.В., Шиндяпин А.И. Оптимальное управление дифференциально-разностной параболической системой с распределенными параметрами на графе. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2021;17(4):433–448. (На англ.). https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411
Zhabko A.P., Provotorov V.V., Shindyapin A.I. Optimal control of a differential-difference parabolic system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2021;17(4):433–448. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.411
10. Даугавет В.А., Яковлев П.В. Среднеквадратичная аппроксимация прямоугольной матрицы матрицами меньшего ранга. *Журнал вычислительной математики и математической физики.* 1989;29(10):1466–1479.
Daugavet V.A., Yakovlev P.V. Mean square approximation of a rectangular matrix by matrices of lower rank. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1989;29(5):147–157. https://doi.org/10.1016/0041-5553(89)90193-6
11. Камачкин А.М., Потапов Д.К., Евстафьева В.В. Динамика и синхронизация циклических структур осцилляторов с гистерезисной обратной связью. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления.* 2020;16(2):186–199. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.210
Kamachkin A.M., Potapov D.K., Yevstafyeva V.V. Dynamics and synchronization in feedback cyclic structures with hysteresis oscillators. *Vestnik of Saint Petersburg*

University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. 2020;16(2):186–199. (In Russ.). https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.210

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Приходько Инна Владимировна, научный сотрудник 22 научно-исследовательского отдела 2 научно-исследовательского управления научно-исследовательского центра (проблем применения, обеспечения и управления авиацией Военно-воздушных сил), Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: prixodko84@mail.ru

Inna V. Prikhodko, Researcher of the 22 Research Department of the 2 Research Directorate of the Research Center (Problems of Application, Provision and Management of Aviation of the Air Force), Air Force Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, the Russian Federation.

Перова Ирина Васильевна, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: writeira@mail.ru

Irina V. Perova, Postgraduate student of the Department of Partial Differential Equations and Probability Theory of the Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Гунькина Анна Сергеевна, преподаватель 206 кафедры математики**,** Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: volan100@mail.ru

Anna S. Gunkina, Lecturer 206 of the Department of Mathematics, Military Air Academy named after Professor N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin, Voronezh, the Russian Federation.

Парт Анна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры природопользования факультета географии, геоэкологии и туризма, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: anna_razinkova@mail.ru

Anna A. Part, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Environmental Management, Faculty of Geography, Geoecology and Tourism, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 22.09.2024; одобрена после рецензирования 02.10.2024; принята к публикации 08.10.2024.

The article was submitted 22.09.2024; approved after reviewing 02.10.2024; accepted for publication 08.10.2024.