

УДК 669-1

DOI: [10.26102/2310-6018/2024.47.4.021](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2024.47.4.021)

## Математическое моделирование процесса формирования усадочной раковины в конечных слябах при разливке на МНЛЗ

З.К. Кабаков, Д.И. Габелая, А.А. Чуев✉

*Череповецкий государственный университет, Череповец, Российская Федерация*

**Резюме.** Выполнено моделирование динамики образования профиля и глубины усадочной раковины на основе математических моделей процесса объемной и линейной усадки, построенных с помощью метода конечных разностей с явной схемой аппроксимации частных производных. Данные модели, в отличие от известных предшествующих, учитывают разный характер процесса затвердевания металла в зависимости от химического состава и используют двумерную расчетную область, разделенную на заданное количество узлов по координатам  $x$  и  $z$ . При моделировании использована система алгоритмов для расчета динамики затвердевания непрерывно-литой заготовки, линейной и объемной усадки металла, а также процесса формирования усадочной раковины. Кроме того, учтено влияние концентрации углерода в стали, ее теплофизических свойств и технологических параметров непрерывной разливки на процесс затвердевания металла. Реализация представлена в виде компьютерной программы, входными параметрами моделирования являются химический состав стали и технологические параметры разливки, выходными – значения теплофизических коэффициентов и профиль усадочной раковины в конечном слябе. Верификация проводилась путем сравнения расчетных данных с экспериментальными и показала, что данные расчета отличаются от данных эксперимента менее чем на 1%. Показана возможность увеличения точности результатов путем увеличения количества узлов по толщине и высоте заготовки, при этом зависимость точности от количества узлов по толщине заготовки проявляется наиболее сильно. Предложенная модель позволяет уменьшить потери металла при разливке, связанные с образованием усадочной раковины, и повысить энерго- и ресурсоэффективность современных металлургических предприятий.

**Ключевые слова:** непрерывная разливка, математическая модель, метод конечных разностей, усадочная раковина, конечный сляб, аппроксимация.

**Для цитирования:** Кабаков З.К., Габелая Д.И., Чуев А.А. Математическое моделирование процесса формирования усадочной раковины в конечных слябах при разливке на МНЛЗ. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2024;12(4). URL: <https://moitvivr.ru/ru/journal/pdf?id=1732> DOI: 10.26102/2310-6018/2024.47.4.021

## Mathematical modeling of the process of formation shrinkage cavity in end slabs during casting on continuous casting machine

Z.K. Kabakov, D.I. Gabelaia, A.A. Chuev✉

*Cherepovets State University, Cherepovets, the Russian Federation*

**Abstract:** The modeling of the dynamics of the profile formation and the depth of the shrinkage cavity is performed based on mathematical models of the process of volumetric and linear shrinkage, constructed using the finite difference method with an explicit scheme of approximation of partial derivatives. These models, unlike the known previous ones, take into account the different nature of the metal solidification process depending on the chemical composition and use a two-dimensional computational domain divided into a given number of nodes along the  $x$  and  $z$  coordinates. The modeling uses a system of algorithms for calculating the solidification dynamics of a continuously cast billet, linear and volumetric shrinkage of metal, as well as the process of formation of a shrinkage cavity. In

addition, the influence of the carbon concentration in steel, its thermophysical properties and technological parameters of continuous casting on the process of metal solidification is taken into account. The implementation is presented in the form of a computer program, the input parameters of the modeling are the chemical composition of steel and the technological parameters of casting, the output parameters are the values of the thermophysical coefficients and the profile of the shrinkage cavity in the final slab. Verification was performed by comparing the calculated data with the experimental data and showed that the calculated data differ from the experimental data by less than 1%. The possibility of increasing the accuracy of the results by increasing the number of nodes in the thickness and height of the workpiece is shown, while the dependence of the accuracy on the number of nodes in the thickness of the workpiece is most pronounced. The proposed model allows reducing metal losses during casting associated with the formation of a shrinkage cavity and increasing the energy and resource efficiency of modern metallurgical enterprises.

**Keywords:** continuous casting, mathematical model, finite difference method, shrinkage cavity, end slab, approximation.

**For citation:** Kabakov Z.K., Gabelaia D.I., Chuev A.A. Mathematical modeling of the process of formation shrinkage cavity in end slabs during casting on continuous casting machine. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2024;12(4). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1732> DOI: 10.26102/2310-6018/2024.47.4.021

## Введение

Одним из важных металлургических процессов является разливка на машинах непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). Потери металла при непрерывной разливке составляют 3–4 % [1]. Основная часть этих потерь связана с образованием усадочной раковины, например, в конечных слябах серии разливаемых плавок. В связи с этим, для снижения потерь металла возникает необходимость исследования закономерностей формирования усадочной раковины в конечных слябах. Известные модели образования усадочной раковины построены на приближенном аналитическом решении задачи Стефана [2, 3], в которой используется так называемый «закон квадратного корня», а также математические модели, описывающие различные аспекты процесса затвердевания и охлаждения расплава: формирование верхних слоев заготовки [4]; фазовые превращения в процессе непрерывной разливки [5]; вторичное охлаждение заготовки [6]; деформация стальных заготовок при разливке [7], выпучивание твердой корочки [8]. Эти модели имеют ограниченное применение для минимизации объема усадочной раковины. Таким образом, задача по созданию наиболее полной модели динамики формирования глубины усадочной раковины является актуальной.

## Реализация

В основе данной модели лежит известная математическая модель процесса объемной [9] и линейной [10] усадки непрерывно-литой заготовки, дополненная алгоритмом расчета усадочной раковины [11]; учитывающая химический состав и теплофизические свойства стали, температуру, режимы охлаждения заготовки в зоне вторичного охлаждения (ЗВО), а также переменную скорость разливки. Моделирование выполнялось с помощью системы алгоритмов расчета процесса затвердевания сляба, линейной и объемной усадки металла и формирования усадочной раковины в конечных слябах. Для описания системы алгоритмов использована методология функционального моделирования IDEF0, представленная на Рисунке 1 в виде детализированной диаграммы системы алгоритмов.

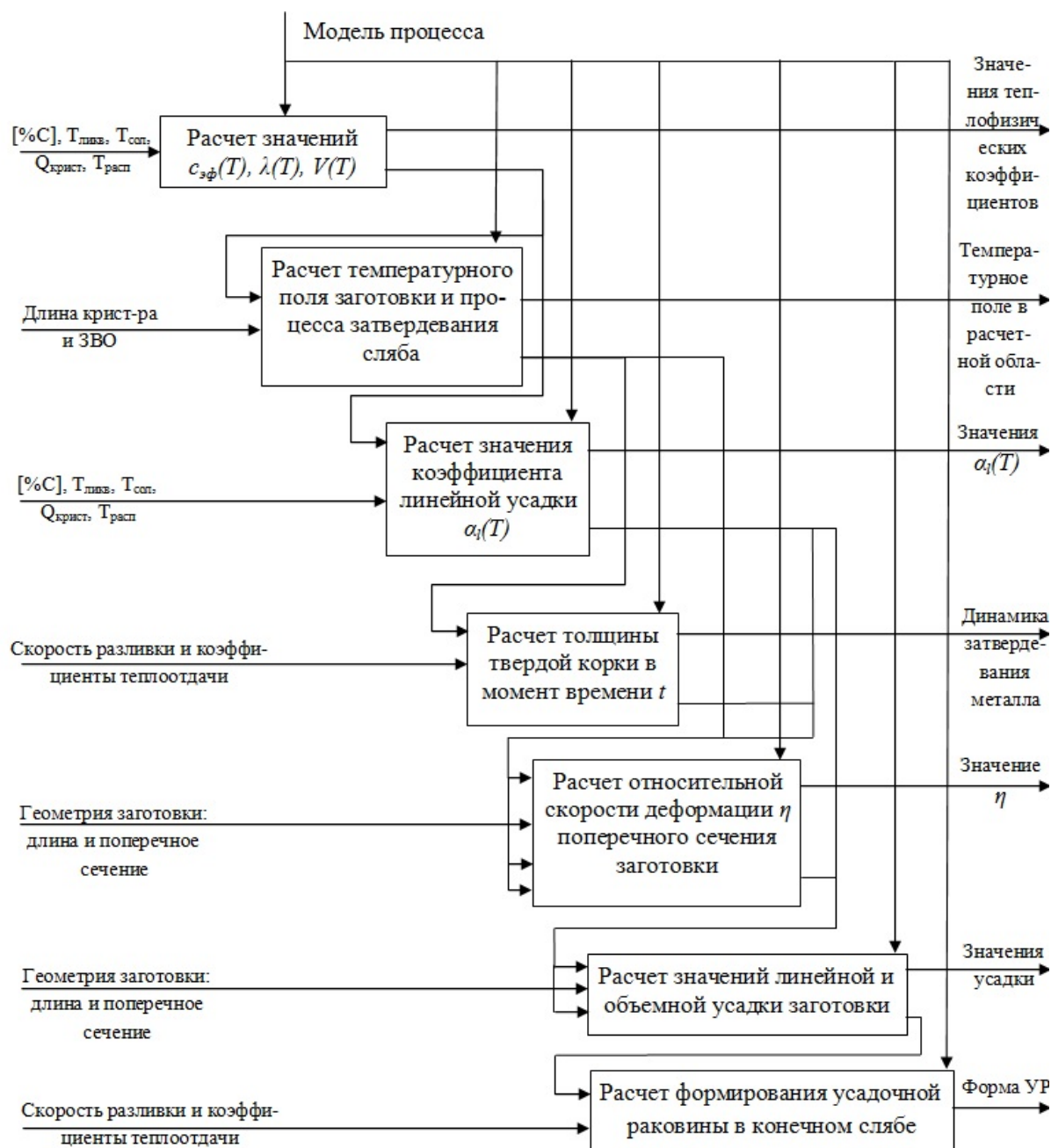


Рисунок 1 – Детализированная диаграмма системы алгоритмов формирования объема и профиля усадочной раковины в конечном слябе

Figure 1 – Detailed diagram of the system of algorithms for forming the volume and profile of the shrinkage cavity in the end slab

Математическое описание задачи затвердевания основано на использовании теории квазиравновесной двухфазной зоны. В основе ее лежит идея о том, что в твердожидкой зоне обе фазы находятся в равновесном состоянии. Для решения данной задачи использовалось уравнение нестационарной теплопроводности:

$$c_{эфф}\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right), 0 \leq t \leq t_k, 0 \leq x \leq B, 0 \leq z \leq h, \quad (1)$$

где  $c_{эфф}$  – эффективная теплоемкость стали;  $\rho$  – плотность стали;  $\lambda$  – теплопроводность расплава;  $B$  – половина толщины сляба, м;  $h$  – высота сляба, м;  $v$  – скорость вытягивания сляба вдоль вертикальной оси, м/мин.

$$c_{эф} = \begin{cases} c, T < T_c, T > T_l, \\ c + \frac{L}{T_l - T_c}, T_c \leq T \leq T_l, \end{cases} \quad (2)$$

где  $c$  – теплоемкость сплава,  $T_c$  и  $T_l$  – температуры солидуса и ликвидуса;  $L$  – теплота затвердевания металла в твердожидкой зоне.

Процесс кристаллизации стали будет проходить по-разному при различном исходном содержании углерода, поэтому для нахождения зависимости  $c_{эф}(T)$  нужно использовать линеаризованную диаграмму Fe-C (Рисунок 2).

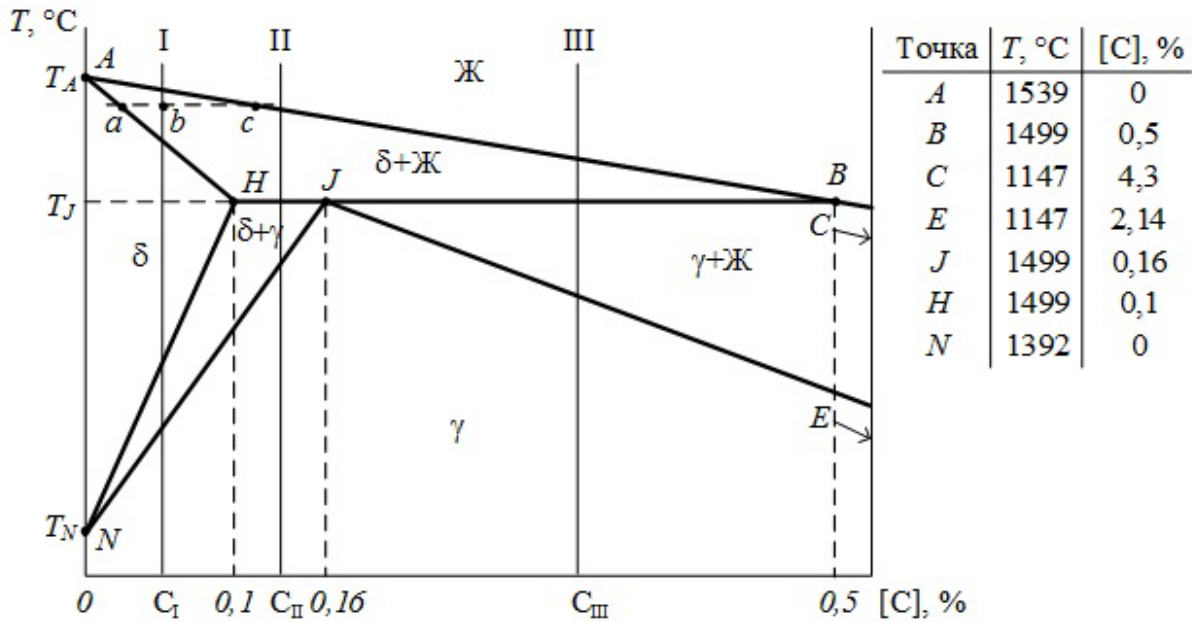


Рисунок 2 – Высокотемпературный участок линеаризованной диаграммы Fe-C  
Figure 2 – High-temperature section of the linearized Fe-C diagram

Значения  $c_{эф}(T)$  определяли для каждой из трех групп сталей: I –  $[\%C] \leq 0,1$ ; II –  $0,1 < [\%C] \leq 0,16$ ; III –  $0,16 < [\%C] \leq 0,5$ :

$$c_I(T) = c_M - \begin{cases} 0, T < T_{NJ}, T_{NH} \leq T < T_{AH}, T \geq T_{AB}, \\ L_{ж-\delta} \frac{d\psi_\delta}{dT}, T_{AH} \leq T < T_{AB}, \\ L_{ж-\gamma} \frac{d\psi_\gamma}{dT}, T_{NJ} \leq T < T_{NH}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $L_{ж-\delta}$  – теплота превращения «жидкая фаза – феррит»;  $L_{\delta-\gamma}$  – теплота превращения «феррит – аустенит»;  $\psi_\delta$  – доля  $\delta$ -феррита в элементарном объеме раствора «жидкость+ $\delta$ -феррит»;  $\psi_\gamma$  – доля аустенита в растворе « $\delta$ -феррит+аустенит»;  $\frac{d\psi_\delta}{dT}$  и  $\frac{d\psi_\gamma}{dT}$  – темп образования  $\delta$ -феррита и аустенита соответственно.

$$c_{II}(T) = c_M + \delta(T - T_J)Q_1 - \begin{cases} 0, T < T_{NJ}, T \geq T_{AB}, \\ L_{ж-\delta} \frac{d\psi_\delta}{dT}, T_J \leq T < T_{AB}, \\ L_{\delta-\gamma} \frac{d\psi_\gamma}{dT}, T_{NJ} \leq T < T_J, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\delta(T)$  – функция Дирака, которую будем аппроксимировать выражением  $\delta(x) \approx \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$ .

$$c_{III}(T) = c_m + \delta(T - T_J)Q_2 - \begin{cases} 0, T < T_{JE}, T \geq T_{AB}, \\ L_{\gamma-\delta} \frac{d\psi_\delta}{dT}, T_J \leq T < T_{AB}, \\ L_{\gamma-\gamma'} \frac{d\psi_{\gamma'}}{dT}, T_{JE} \leq T < T_J. \end{cases} \quad (5)$$

Аналогичным образом определялись зависимости теплопроводности  $\lambda_{\text{эфф}}(T)$  и плотности  $\rho(T)$ , последняя использовалась для расчета удельных объемов фаз  $V(T)$  в зависимости от концентрации углерода.

Далее на основании полученных значений теплофизических коэффициентов производился расчет коэффициента линейной усадки  $\alpha_l(T)$ . Поскольку концентрация углерода также сильно влияет на зависимость удельного объема от температуры в системе Fe-C, то подобную зависимость имеет и  $\alpha_l(T)$ . За основу расчета  $\alpha_l(T)$  приняли выражение для объемной усадки из работы [12]:

$$\alpha_V(T) = \frac{dV(T)}{dT} \cdot \frac{1}{V(T)}, \quad (6)$$

где  $V(T)$  – удельный объем сплава, зависящий от температуры;  $\frac{dV(T)}{dT}$  – скорость изменения удельного объема. Значения коэффициента объемной усадки  $\alpha_V(T)$  в дальнейшем используются для расчета глубины усадочной раковины в соответствии со способом, изложенным в работе [11].

Используя значения рассчитанных теплофизических коэффициентов и данные о длине кристаллизатора и секций зон вторичного охлаждения, а также уравнения (1), производилось вычисление температурного поля в расчетной области (Рисунок 3), представляющей собой половину сечения узкой грани непрерывно-литой заготовки.

В начальный момент времени распределение температур равномерно и равно температуре заливаемого металла  $T|_{t=0} = T^0 = const$ .

Здесь  $h_{кр}$  – рабочая высота кристаллизатора, м;  $h_{зво}$  – высота ЗВО, м;  $h_{возд}$  – высота участка слитка, охлаждаемого на воздухе, м;  $h$  – высота расчетной области, м; Г1-Г6 – границы расчетной области; Г1 – условие на оси слитка; Г2 – условие на мениске металла; Г3 – условие на вертикальной охлаждаемой поверхности кристаллизатора ( $0 \leq z \leq h_{кр}$ ); Г4 – условие на вертикальной охлаждаемой поверхности ( $h_{кр} \leq z \leq h_{кр} + h_{зво}$ ); Г5 – условие на вертикальной охлаждаемой поверхности ( $z \geq h_{кр} + h_{зво}$ ); Г6 – условие на нижней плоскости ( $z = h$ ).

Условия на границах области заданы в следующем виде:

1) Г1 – условие на оси заготовки:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (7)$$

2) Г2 – условие на мениске металла. Во время процесса установления граничное условие на мениске металла задается формулой (на мениске металла температура соответствует начальной температуре):

$$T|_{z=0} = T_{оси}^0 - (T_{оси}^0 - T_{л}^0) \left( \frac{x}{B} \right)^2, \quad (8)$$

где  $T_{оси}^0$  – начальная температура расплава;  $T_{л}^0$  – температура ликвидуса;  $B$  – половина толщины сляба.

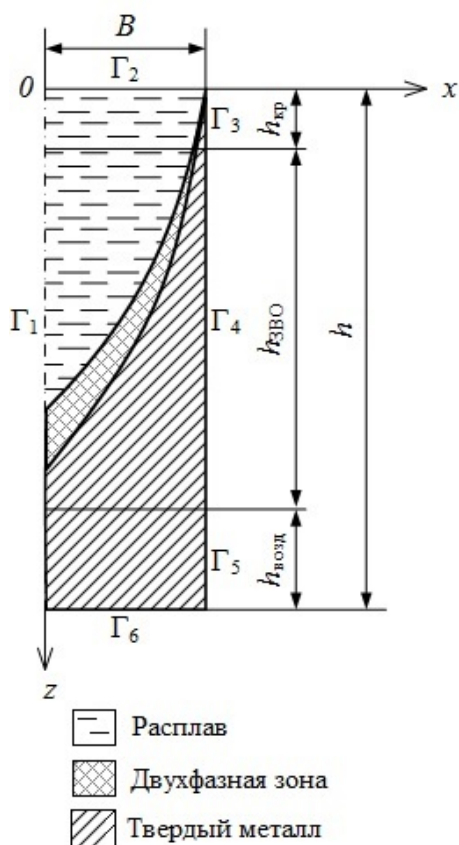


Рисунок 3 – Схема расчетной области  
Figure 3 – Scheme of calculation domain

После процесса установления граничное условие на мениске металла определяется как:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

3) Г3 – условие на кристаллизаторе:

$$\lambda(T_{\text{пов}}) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=B} = \alpha_{\text{кр}} (T_{\text{пов}} - T_{\text{ср}}), \quad (10)$$

где  $\alpha_{\text{кр}}$  – коэффициент теплоотдачи в кристаллизаторе;  $T_{\text{пов}}$  – температура поверхности, °C;  $T_{\text{ср}}$  – температура окружающей среды, °C. Если  $\alpha_{\text{кр}} = 0$ , то используется выражение:

$$\alpha_{\text{кр}} = \sigma_0 \varepsilon (T_{\text{пов}}^2 + T_{\text{ср}}^2) (T_{\text{пов}} + T_{\text{ср}}) + k^4 \sqrt{T_{\text{пов}} - T_{\text{ср}}}, \quad (11)$$

где  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$  – коэффициент излучения абсолютно черного тела;  $\varepsilon = 0,8$  – степень черноты поверхности сляба;  $k$  – эмпирический коэффициент, зависящий от угла наклона охлаждаемой поверхности.

4) Г4 – условие на охлаждаемой поверхности в  $i$ -той секции ЗВО:

$$\lambda(T_{\text{пов}}) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=B} = \alpha_i (T_{\text{пов}} - T_{\text{ср}}), \quad (12)$$

где  $\alpha_i$  – коэффициент теплоотдачи в  $i$ -ой секции ЗВО. При этом, если коэффициент  $\alpha_i$  равен 0, то для его расчета используется выражение (11). В случае «сухого» охлаждения поверхность заготовки охлаждается «на воздухе», в этом случае для коэффициента  $\alpha_i$  используют (11).



5) Г5 на охлаждаемой поверхности на воздухе:

$$\lambda(T_{\text{пов}}) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=B} = \alpha_{\Sigma} (T_{\text{пов}} - T_{\text{ср}}), \quad (13)$$

где  $\alpha_{\Sigma}$  – коэффициент теплоотдачи при охлаждении на воздухе и определяется аналогично формуле (11).

6) Г6 на нижней плоскости:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0. \quad (14)$$

Для решения уравнения (1) использовался метод конечных разностей. Аппроксимация частных производных выполнялась по явной схеме, в данном случае  $N$  – количество узлов по высоте заготовки ( $z$ ), а  $M$  – по толщине заготовки ( $x$ ). Дискретизация времени была реализована как  $\Delta t$ . Дискретизация  $\Delta x$  по толщине заготовки:

$$\Delta x = \frac{B}{M}, \quad (15)$$

где  $B$  – половина ширины слябовой заготовки. Дискретизация  $\Delta z$  по высоте слябовой заготовки:

$$\Delta z = \frac{h}{N}, \quad (16)$$

где  $h$  – высота слябовой заготовки.

Координаты точек-реальных узлов находятся по формулам:

$$x_i = (i - 0,5)\Delta x, \quad i = 1..N, \quad (17)$$

$$z_j = (j - 0,5)\Delta z, \quad j = 1..M. \quad (18)$$

Вычисление текущего момента времени:

$$t^n = n \cdot \Delta t. \quad (19)$$

Величина температуры в реальном узле с координатами  $(i,j)$  в текущий момент времени:

$$T(x_i, z_j, t^n) = T_{i,j}^n. \quad (20)$$

Аппроксимация частных производных первого порядка имеет вид:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t}, \quad i = 1..N, j = 1..M, \quad (21)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{i,j} = \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta z}, \quad i = 1..N, j = 1..M. \quad (22)$$

Для аппроксимации частных производных второго порядка по координате  $x$  необходимо ввести промежуточные (фиктивные) узлы. После этого запишем слагаемые правой части уравнения (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i+0,5;j} - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i-0,5;j}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\lambda_{i+0,5;j} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}_{i+0,5;j} - \lambda_{i-0,5;j} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}_{i-0,5;j}}{\Delta x} = \frac{\lambda_{i+0,5;j} \cdot \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} - \lambda_{i-0,5;j} \cdot \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\lambda_{i+0,5;j} \cdot (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - \lambda_{i-0,5;j} \cdot (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta x^2}, \quad i = 1..N, j = 1..M. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{i,j} &= \frac{\left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{i,j+0,5} - \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{i,j-0,5}}{\Delta z} = \\ &= \frac{\lambda_{i,j+0,5} \frac{\partial T}{\partial z}_{i,j+0,5} - \lambda_{i,j-0,5} \frac{\partial T}{\partial z}_{i,j-0,5}}{\Delta z} = \frac{\lambda_{i,j+0,5} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta z} - \lambda_{i,j-0,5} \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta z}}{\Delta z} = \\ &= \frac{\lambda_{i,j+0,5} \cdot (T_{i,j+1} - T_{i,j}) - \lambda_{i,j-0,5} \cdot (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta z^2}, \quad i = 1..N, j = 1..M. \end{aligned} \quad (24)$$

Левая часть и, соответственно, все уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} c_{\text{эф}}(T)\rho(T) \left( \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} + v \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta z} \right) &= \frac{\lambda_{i+0,5;j} \cdot (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - \lambda_{i-0,5;j} \cdot (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{\lambda_{i,j+0,5} \cdot (T_{i,j+1} - T_{i,j}) - \lambda_{i,j-0,5} \cdot (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta z^2}, \quad i = 1..N, j = 1..M. \end{aligned} \quad (25)$$

Отсюда можно получить значение температуры в узле  $(i,j)$  в момент времени  $n+1$ :

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{n+1} &= \frac{\Delta t}{c_{\text{эф}}(T)\rho(T)} \cdot \frac{\lambda_{i+0,5;j} \cdot (T_{i+1,j} - T_{i,j}) - \lambda_{i-0,5;j} \cdot (T_{i,j} - T_{i-1,j})}{\Delta x^2} + \\ &+ \frac{\Delta t}{c_{\text{эф}}(T)\rho(T)} \left( \frac{\lambda_{i,j+0,5} \cdot (T_{i,j+1} - T_{i,j}) - \lambda_{i,j-0,5} \cdot (T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta z^2} \right) - \\ &- v \Delta t \frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{\Delta z} + T_{i,j}^n, \quad i = 1..N, j = 1..M. \end{aligned} \quad (26)$$

Дискретный шаг по времени  $\Delta t$  определяется по условию минимума:

$$\Delta t = \min\{\Delta t_1, \Delta t_2\}. \quad (27)$$

Величина  $\Delta t_1$  определяется из условия устойчивости:

$$\Delta t_1 = \frac{1}{a y \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)_{\max}}, \quad (28)$$

где  $k_y$  – коэффициент устойчивости ( $k_y > 2$ );  $a_{\max}$  – коэффициент теплопроводности,  $\frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$ . Коэффициент  $a_{\max}$  задается выражением:

$$a \frac{\lambda_{\max}}{c_{\min} \min_{\max}}. \quad (29)$$

Значение  $\Delta t_2$  можно найти из условия Куранта для одномерного случая, поскольку движение сляба происходит только вдоль оси  $z$ :

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta z \cdot C}{v}, \quad (30)$$

где  $C$  – число Куранта;  $v$  – скорость вытягивания сляба,  $\text{м/мин}$ . Для обеспечения устойчивости данной конечно-разностной схемы должно выполняться условие  $C < 1$ .

В начальный момент времени  $n=0$  температурное поле заполняется согласно начальному условию:

$$T_{i,j}^0 = T^0, \quad (31)$$

где  $i = 0..N + 1; j = 0..M + 1$ .

Вычисление значений температуры в промежуточных узлах производится при помощи граничных условий:



1) при  $x=0$  (условие Г1):

$$\frac{T_{1,j} - T_{0,j}}{\Delta x} = 0, \quad (32)$$

откуда

$$T_{0,j} = T_{1,j}, j = 1..M; \quad (33)$$

2) при  $z=0$  (условие Г2) во время процесса установления температура в промежуточных узлах рассчитывается по формуле:

$$T_{i,0} = 2 \cdot T^0 - T_{i,1}, i = 1..N, \quad (34)$$

после процесса установления:

$$T_{i,0} = T_{i,1}; \quad (35)$$

3) при  $x=B$  (условие Г3):

$$T_{N+1,j} = \frac{(1-\chi)T_{N,j} + 2\chi T_{cp}}{1+\chi}, j = 1..M, \quad (36)$$

где коэффициент  $\chi$ :

$$\chi = \frac{\alpha_{кр} \Delta x}{2\lambda(T)}; \quad (37)$$

4) при  $x=B$  (условие Г4) расчетная формула аналогична формуле (36), при этом коэффициент  $\chi$  имеет вид:

$$\chi = \frac{\alpha_i \Delta x}{2\lambda(T)}; \quad (38)$$

5) при  $x=B$  (условие Г5) расчетная формула аналогична формуле (36), при этом коэффициент  $\chi$  имеет вид:

$$\chi = \frac{\alpha_{ст} \Delta x}{2\lambda(T)}; \quad (39)$$

6) при  $z=h$  расчетная формула примет вид:

$$T_{i,M+1} = 2 \cdot T_{i,M} - T_{i,M-1}, i = 1..N. \quad (40)$$

Расчет линейной усадки непрерывной заготовки на технологической линии МНЛЗ производится для четверти сечения (Рисунок 4), при этом предполагается, что граница окончательного затвердевания определяется изотермой солидуса. На Рисунке 4:  $\xi_{шг}$  – толщина корки широкой грани,  $\xi_{уг}$  – толщина корки узкой грани,  $A$  и  $B$  – половины широкой и узкой граней соответственно.

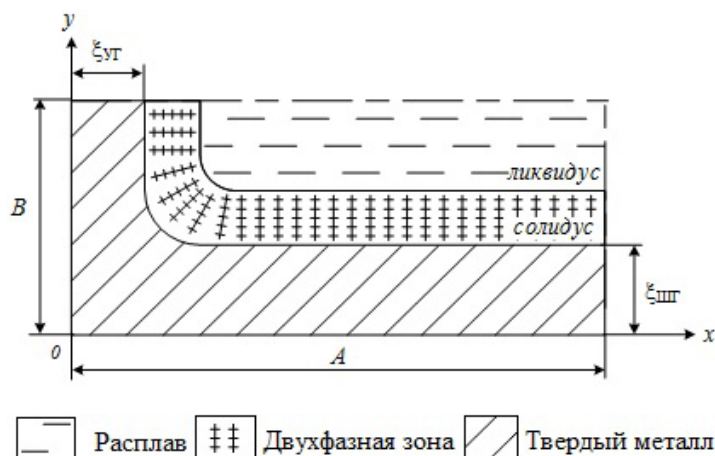


Рисунок 4 – Схема расчетного сечения заготовки  
Figure 4 – Scheme of the calculated cross-section of the workpiece

В процессе используются в качестве входных данных как исходная информация о длине и поперечном сечении заготовки, так и полученные значения теплофизических коэффициентов и коэффициента усадки, а также информация о температурном поле металла по сечению заготовки. Ниже приведено выражение для расчета суммарной усадки широкой и узкой граней [10]:

широкая грань:

$$\eta_{\Sigma ш} = \int_0^t \frac{1}{\xi_{шг}} \int_0^{A(t)} \int_0^{\xi_{шг}} \alpha(T) \dot{T} dy dx dt, \quad (41)$$

узкая грань:

$$\eta_{\Sigma у} = \int_0^t \frac{1}{\xi_{уг}} \int_0^{B(t)} \int_0^{\xi_{уг}} \alpha(T) \dot{T} dy dx dt, \quad (42)$$

где  $\xi_{шг}$  и  $\xi_{уг}$  – толщина слоя кристаллизованной стали широкой и узкой грани соответственно, мм;  $\alpha(T)$  – коэффициент линейной усадки, град<sup>-1</sup>;  $\dot{T}$  – темп снижения / возрастания температуры в точке  $x$  в момент времени  $t$ , град/с;  $A(t)$  и  $B(t)$  – изменение половин размеров граней по длине МНЛЗ.

Тогда длина и толщина заготовки при затвердевании вычисляются с использованием ранее найденных значений  $\eta$ :

$$x_A^{n+1} = 2A(1 - \eta_{\Sigma ш}^{n+1}), \quad (43)$$

$$x_B^{n+1} = 2B(1 - \eta_{\Sigma у}^{n+1}). \quad (44)$$

В предложенной модели формирования усадочной раковины непрерывно-литой заготовки на МНЛЗ используются следующие входные параметры:

а) концентрация углерода, температуры ликвидуса и солидуса, теплота кристаллизации, температура расплава;

б) длина кристаллизатора и секций зоны вторичного охлаждения;

в) режимы разливки и охлаждения заготовки;

г) длина и площадь поперечного сечения непрерывной заготовки.

Рассчитываемые выходные параметры:

а) глубина усадочной раковины;

б) температурное поле в расчетной области;

в) динамика затвердевания металла в расчетной области;

г) значения теплофизических коэффициентов  $c_{эф}(T)$  и  $\lambda(T)$ , а также  $\rho(T)$ ;

д) значение коэффициента линейной  $\alpha_l(T)$  и объемной  $\alpha_v(T)$  усадки;

е) относительная скорость деформации  $\eta$ .

Краткий алгоритм расчета динамики формирования усадочной раковины в конечном слябе выглядит следующим образом:

1. Ввод исходных данных:  $T_{ликв}$ ,  $T_{сол}$ ,  $Q_{крист}$ ,  $T_{расп}$ , [%C], длина кристаллизатора и секций ЗВО, коэффициенты теплоотдачи, скорость разливки, поперечное сечение и длина сляба.

2. Расчет значений теплофизических коэффициентов  $c_{эф}(T)$ ,  $\lambda(T)$ ,  $V(T)$ .

3. Расчет объемной усадки  $\Delta V$ .

4. Расчет температурного поля металла по уравнению (2) для каждого момента времени, используя метод конечных разностей с использованием явной схемы аппроксимации частных производных.

5. Расчет значений линейной усадки  $\alpha_l(T)$ .

6. Расчет значений суммарной усадки широкой и узкой граней сляба  $\eta_{\Sigma ш}$  и  $\eta_{\Sigma у}$  соответственно.

7. Построение профиля усадочной раковины.

## Верификация

Предлагаемая модель формирования усадочной раковины в конечном слябе реализована в виде компьютерной программы. Проверка адекватности выполнена путем сравнения расчетной глубины раковины с экспериментальными данными [13]. При верификации приняты следующие исходные данные: толщина слитка  $B=0,2$  м, высота слитка  $h=6,5$  м, начальная температура  $T_0=1520$  °С, температура окружающей среды  $T_{cp}=30$  °С, температура ликвидуса  $T_{л}=1500$  °С, температура солидуса  $T_c=1450$  °С, количество узлов по толщине 20, количество узлов по высоте 2500, скорость разливки  $v = 0,4$  м/мин, поперечное сечение составляет  $200 \times 1200$  мм. Длины кристаллизатора и секций зоны вторичного охлаждения, а также коэффициенты теплоотдачи по секциям приведены в Таблицах 1 и 2.

Таблица 1 – Размер кристаллизатора и секций ЗВО

Table 1 – Size of crystallizer and sections of secondary cooling system

Секция	Кристаллизатор	секция №1	секция №2	секция №3	секция №4	секция №5
Длина, м	1,00	0,3	0,7	1,35	1,45	1,7

Таблица 2 – Коэффициенты теплоотдачи по секциям

Table 2 – Heat transfer coefficients by sections

V, м/мин	Кристаллизатор	секция №1	секция №2	секция №3	секция №4	секция №5
0,4	462,5	331	257	243	234	0

Глубина усадочной раковины конусообразной формы, рассчитанная по предлагаемой модели, составила  $0,35$  м (Рисунок 5); при этом согласно экспериментальным данным [13] средняя глубина раковины на выборке из 26 слябов составляет  $0,353$  м.

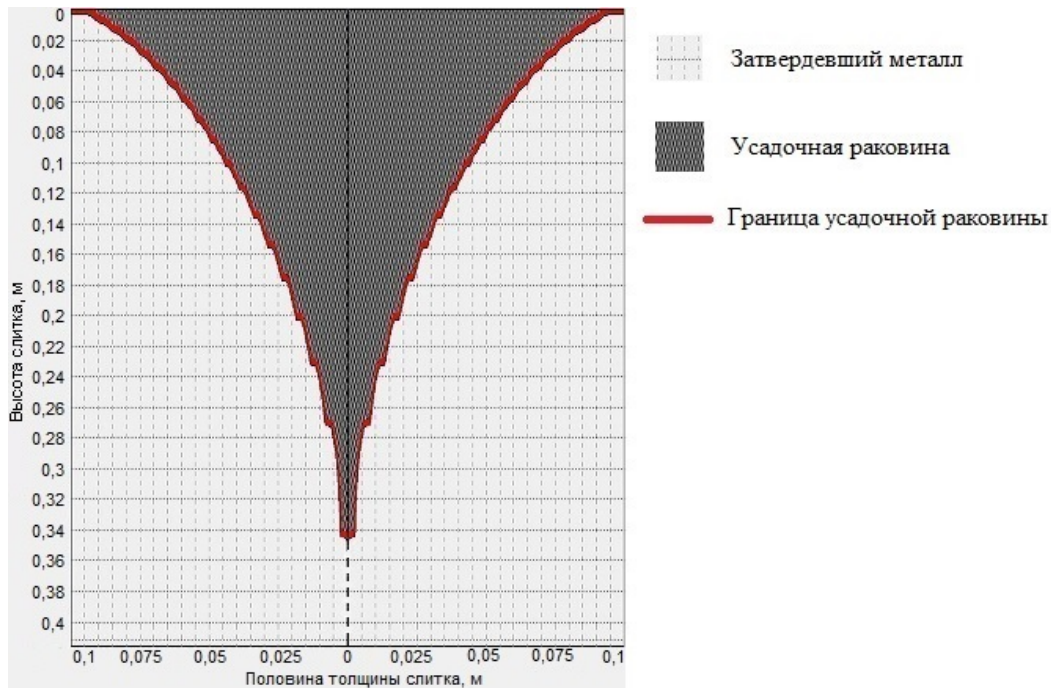


Рисунок 5 – Расчетный профиль усадочной раковины

Figure 5 – Calculated profile of shrinkage cavity

Погрешность конечного решения зависит от количества узлов расчетной области, поэтому далее исследовано влияние количества узлов по высоте и толщине сляба на погрешность расчета глубины усадочной раковины. Данные по количеству узлов и достигнутой погрешности приведены в Таблицах 3 и 4, а также на Рисунке 6 (а и б). Максимальные значения количества узлов были выбраны из условия погрешности расчета 5 %; относительная погрешность расчета определялась по формуле:

$$\delta = \frac{|h_{\text{расчет}} - h_{\text{эксп}}|}{h_{\text{эксп}}} \cdot 100\%, \quad (45)$$

где  $h_{\text{расчет}}$  и  $h_{\text{эксп}}$  – глубина усадочной раковины, рассчитанная по предложенной модели и измеренная экспериментально соответственно.

При задании количества узлов по высоте  $N$  и толщине  $M$  принято условие  $\Delta x < \Delta z$ .

Таблица 3 – Зависимость глубины усадочной раковины от числа узлов по высоте  
Table 3 – Dependence of the shrinkage cavity depth on the number of nodes by height

Число узлов по высоте, $N$	2500	2000	1500	1000	500	200
Глубина усадочной раковины, м (расчет)	0,35	0,33	0,32	0,31	0,31	0,3
Глубина усадочной раковины, м (эксперимент)	0,353	0,353	0,353	0,353	0,353	0,353
Относительная погрешность, %	0,85	6,52	9,35	12,18	12,18	15,01

Таблица 4 – Зависимость глубины усадочной раковины от числа узлов по толщине  
Table 4 – Dependence of the shrinkage cavity depth on the number of nodes by thickness

Число узлов по толщине, $M$	20	19	18	17
Глубина усадочной раковины, м (расчет)	0,35	0,35	0,37	0,41
Глубина усадочной раковины, м (эксперимент)	0,353	0,353	0,353	0,353
Относительная погрешность, %	0,85	0,85	4,82	16,15

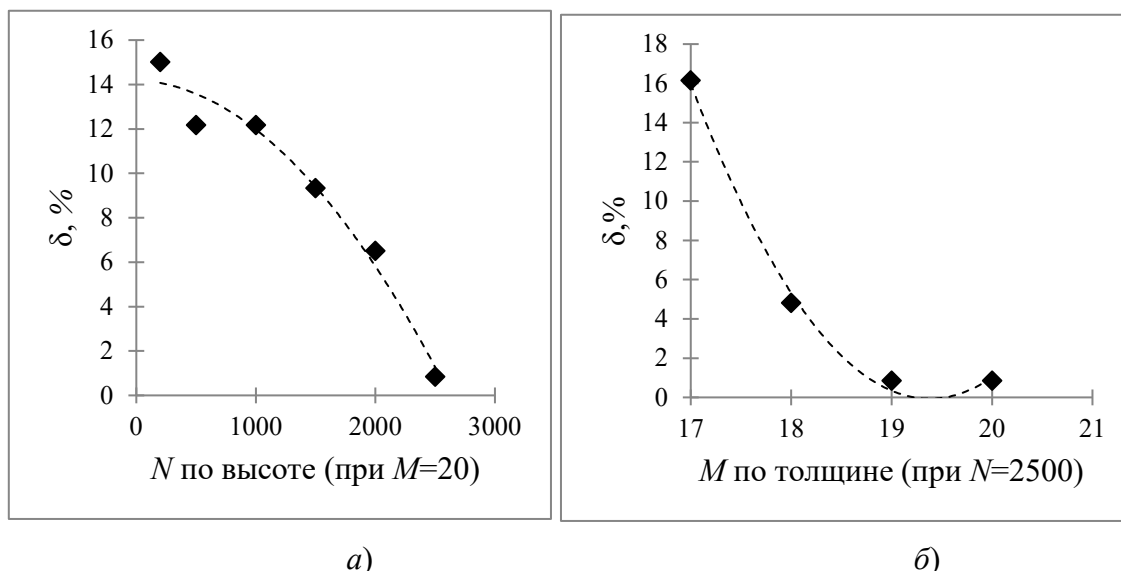


Рисунок 6 – Зависимость относительной погрешности от числа узлов по высоте (а) и толщине (б) заготовки

Figure 6 – Dependence of the relative error on the number of nodes by height (a) and thickness (b) of the workpiece

На Рисунке 6 видно, что при увеличении количества узлов как по высоте, так и по ширине, относительная погрешность расчета  $\delta$  уменьшается, и не превысит допустимого значения 5 % при количестве узлов по высоте  $N > 2500$ , по толщине  $M > 19$ .

### Заключение

Разработанная модель позволяет учитывать влияние физических параметров и технологических режимов на процесс формирования усадочной раковины в конечном слябе при разливке на МНЛЗ. Верификация показала, что точность возрастает при увеличении количества узлов как по высоте, так и по толщине. Зависимость относительной ошибки от количества узлов по толщине проявляется более сильно. Разработанную модель предполагается использовать в конвертерных цехах металлургических предприятий для совершенствования технологии разливки конечных слябов с целью уменьшения потерь металла, связанных с усадкой в конечном слябе.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Смирнов А.Н., Макулов С.Л., Сафонов В.М., Цупрун А.Ю. *Крупный слиток*. Донецк: Вебер; 2009. 278 с.
2. Дюдкин Д.А., Крупман Л.И., Максименко Д.М. *Усадочные раковины в стальных слитках и заготовках*. Москва: Металлургия; 1983. 137 с.
3. Марченко И.К., Бровман М.Я. *Производство крупных стальных слитков*. Москва: Металлургия; 1980. 240 с.
4. Хасин Г.А. О математическом моделировании процесса формирования поверхностных слоев слитка. *Известия высших учебных заведений. Черная Металлургия*. 1987;(8):133–135.
5. Zou J., Tseng A.A. Microscopic modeling of fundamental phase transformations in continuous castings of steel. *Metallurgical Transactions A*. 1992;23(2):457–467. <https://doi.org/10.1007/BF02801163>
6. Девятков Д.Х., Пантелеев И.И. Определение коэффициентов теплоотдачи в зоне вторичного охлаждения МНЛЗ с помощью идентифицируемой математической модели. *Известия высших учебных заведений. Черная Металлургия*. 1999;(8):62–65.
7. Данилов В.Л., Кораблин А.И. Математическая модель деформирования непрерывнолитых стальных слябов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 1989;(12):142–145.
8. Okamura K. Buckling analysis of continuously cast slabs using a 3D plastic creep model. *Tetsu-to-Hagane*. 1987;(12):175.
9. Кабаков З.К., Габелая Д.И., Чуев А.А. Способ расчета скорости деформации при проведении «мягкого» обжата для компенсации усадки непрерывнолитой заготовки с целью снижения осевой рыхлости. В сборнике: *Металлургия: технологии, инновации, качество: Труды XXIII Международной научно-практической конференции, 23–25 ноября 2022 года, Новокузнецк, Россия*. Новокузнецк: Сибирский государственный индустриальный университет; 2022. С. 261–267.
10. Габелая Д.И., Кабаков З.К., Чуев А.А. Исследование и расчет усадочных процессов в непрерывнолитой заготовке при разливке на слябовой МНЛЗ. *Металлург*. 2023;(7):19–22. [https://doi.org/10.52351/00260827\\_2023\\_07\\_19](https://doi.org/10.52351/00260827_2023_07_19)  
Gabelaia D.I., Kabakov Z.K., Chuev A.A. Investigation and calculating of shrinkage processes in a continuously cast billet during casting on a slab caster. *Metallurg*. 2023;(7):19–22. (In Russ.). [https://doi.org/10.52351/00260827\\_2023\\_07\\_19](https://doi.org/10.52351/00260827_2023_07_19)

11. Кабаков З.К., Габелая Д.И., Чуев А.А. Математическая модель формирования усадочной раковины непрерывнолитой заготовки на МНЛЗ. В сборнике: *Интеллектуально-информационные технологии и интеллектуальный бизнес (ИНФОС-2022): Материалы Тринадцатой Международной научно-технической конференции, 29–30 июня 2022 года, Вологда, Россия*. Вологда: Вологодский государственный университет; 2022. С. 14–18.
12. Thomas V.G., Ojeda C. Ideal Taper Prediction for Slab Casting. In: *2003 ISSTech Steelmaking Conference, 27–30 April 2003, Indianapolis, USA*. Warrendale: ISS-AIMEPA; 2003. pp. 295–308.
13. Дюдкин Д.А. Условия формирования концевой части непрерывного слитка. В сборнике: *Проблемы стального слитка: Труды III конференции по слитку*. Москва: Металлургия; 1969. С. 375–381.

### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Кабаков Зотей Константинович**, доктор технических наук, профессор, кафедра металлургии, машиностроения и технологического оборудования, Череповецкий государственный университет, Череповец, Российская Федерация.  
*e-mail*: [zkkabakov@chsu.ru](mailto:zkkabakov@chsu.ru)

**Zotej K. Kabakov**, doctor of Technical Sciences, Professor, Metallurgy, Mechanical Engineering and Technological Equipment Department, Cherepovets State University, Cherepovets, the Russian Federation.

**Габелая Давид Ивлериевич**, кандидат технических наук, доцент, кафедра металлургии, машиностроения и технологического оборудования, Череповецкий государственный университет, Череповец, Российская Федерация.  
*e-mail*: [digabelaia@chsu.ru](mailto:digabelaia@chsu.ru)  
ORCID: [0000-0001-5761-1396](https://orcid.org/0000-0001-5761-1396)

**David I. Gabelaja**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Metallurgy, Mechanical Engineering and Technological Equipment Department, Cherepovets State University, Cherepovets, the Russian Federation.

**Чуев Антон Андреевич**, старший преподаватель, кафедра математики и информатики, Череповецкий государственный университет, Череповец, Российская Федерация.  
*e-mail*: [aachuev@chsu.ru](mailto:aachuev@chsu.ru)  
ORCID: [0000-0002-4060-6117](https://orcid.org/0000-0002-4060-6117)

**Anton A. Chuev**, Assistant Professor, Mathematics and Informatics Department, Cherepovets State University, Cherepovets, the Russian Federation.

*Статья поступила в редакцию 29.10.2024; одобрена после рецензирования 19.11.2024; принята к публикации 21.11.2024.*

*The article was submitted 29.10.2024; approved after reviewing 19.11.2024; accepted for publication 21.11.2024.*