

УДК 51-77

DOI: [10.26102/2310-6018/2025.48.1.009](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2025.48.1.009)

## Учет нескольких ценовых групп в задаче динамического ценообразования в недвижимости<sup>1</sup>

Л.Г. Разумовский, М.А. Герасимова, Н.Е. Каренин✉, М.В. Сафро

*Группа компаний «Ратах», Москва, Российская Федерация*

**Резюме.** В статье представлена математическая модель динамического ценообразования для объектов недвижимости, учитывающая наличие нескольких ценовых групп, что расширяет возможности существующих моделей. Разработанная модель решает задачу максимизации интегральной выручки при необходимости выполнения ограничений по выручке и объему продаж. Рассмотрена базовая постановка задачи оптимизации выручки от продажи всех объектов недвижимости к концу периода продаж. Для данной задачи получены теоретические результаты, определяющие общий вид ценовой политики. Предложен способ распределения интегральных целевых показателей по выручке по ценовым группам недвижимости. Также представлена модификация модели, учитывающая стоимость денег и рост стоимости недвижимости по мере строительной готовности. Описан алгоритм построения ценовой политики в условиях наличия нескольких ценовых групп. Проведены численные симуляции, демонстрирующие работу алгоритма. Актуальность разработанной модели определяется необходимостью учитывать наличие нескольких ценовых групп жилья при формировании ценовой политики, а также изменяющуюся во времени стоимость денег и рост стоимости недвижимости по мере завершения строительства. Полученные результаты могут быть использованы для управления ценами на объекты недвижимости в практической деятельности.

**Ключевые слова:** динамическое ценообразование, недвижимость, ценовые группы, максимизация выручки, равномерное вымывание, стоимость денег, стоимость недвижимости.

**Для цитирования:** Разумовский Л.Г., Герасимова М.А., Каренин Н.Е., Сафро М.В. Учет нескольких ценовых групп в задаче динамического ценообразования в недвижимости. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2025;13(1). URL: <https://moitvivr.ru/ru/journal/pdf?id=1741> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.009

## Implementing dynamic pricing across multiple pricing groups in real estate<sup>2</sup>

L.G. Razumovskiy, M.A. Gerasimova, N.E. Karenin✉, M.V. Safro

*"Ratax Group", Moscow, the Russian Federation*

**Abstract.** The article presents a mathematical model of dynamic pricing for real estate that incorporates multiple pricing groups, thereby expanding the capabilities of existing models. The developed model solves the problem of maximizing aggregate cumulative revenue at the end of the sales period while meeting the revenue and sales goals. The basic formulation of the problem of optimizing revenue from the sale of all real estate objects in inventory by the end of the sales period is considered. Theoretical results describing the general form of the pricing policy for this problem are presented. A method is

<sup>1</sup> Статья была опубликована в виде препринта: Разумовский Л.Г., Герасимова М.А., Каренин Н.Е., Сафро М.В. 2024. Учет нескольких ценовых групп в задаче динамического ценообразования в недвижимости. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.07732>

<sup>2</sup> The article was previously published as a preprint: Razumovskiy L., Gerasimova M., Karenin N., Safro M. 2024. Implementing Dynamic Pricing Across Multiple Pricing Groups in Real Estate. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2411.07732>

proposed for distributing aggregate cumulative revenue goals across different for real estate pricing groups. The model is further modified to account for the time value of money and the real estate value increase as construction progresses. The algorithm for constructing a pricing policy for multiple pricing groups is described, and numerical simulations are performed to demonstrate how the algorithm operates. The relevance of the developed model lies in the need to account for multiple pricing groups when forming the pricing policy, as well as the time value of money and the value of real estate increase as construction progresses. The obtained results can be applied to price management of real estate objects in practice.

**Keywords:** dynamic pricing, real estate, pricing groups, revenue maximisation, even inventory absorption, value of money, real estate value.

**For citation:** Razumovskiy L.G., Gerasimova M.A., Karenin N.E., Safro M.V. Implementing dynamic pricing across multiple pricing groups in real estate. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2025;13(1). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1741> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.009

## Введение

Динамическое ценообразование (ДЦО) является одной из важнейших тем в области экономики и управления, поскольку оно предлагает гибкие методы автоматической корректировки цен с учетом различных факторов, таких как изменение спроса, действия конкурентов и изменение ключевой ставки Центробанка. Использование ДЦО позволяет компаниям не только эффективно управлять ресурсами и оптимизировать прибыль, но и своевременно реагировать на изменения рыночных условий, что повышает их конкурентоспособность.

На сегодняшний день модели динамического управления ценами разрабатываются и применяются в различных секторах экономики. Например, в авиаперевозках [1] динамическое ценообразование применяется для управления тарифами, в гостиничном бизнесе [2, 3] – для регулирования стоимости номеров и в пассажирских автоперевозках [4] – для обновления цен на поездки в течение дня.

Для компаний-застройщиков ДЦО также является важным инструментом управления бизнесом. Для недвижимости характерны особенности, которые значительно отличают данную область от всех остальных. Например, продаваемый товар – объекты недвижимости (ОН) – ограничен, невосполним и должен быть реализован к концу периода продаж полностью. Стоит отметить, что для недвижимости период продаж является довольно большим по сравнению, например, с ритейлом<sup>3</sup> [5], и может достигать нескольких лет. Среди наиболее значимых научных исследований в области применения ДЦО в недвижимости можно привести основополагающие работы Кинкейда и Дарлинга [6] и Гальего и ван Ризина [7], которые одни из первых рассматривали задачу ДЦО при фиксированном периоде продаж с ограничениями на продажи и выручку. Дальнейшие вариации и модификации модели встречаются и у других авторов [8–10]. Необходимо упомянуть также работу [11] Бесбеса и Маглареса, в которой математически сформулирована оптимизационная задача нахождения оптимальной ценовой политики и приведено ее решение в случае, когда общий спрос и конверсия известны. В работе [12] приводится обобщение этой модели на случай переменного общего спроса, учитывается стоимость денег и увеличение стоимости ОН по мере строительной готовности.

<sup>3</sup> BenMark G., Klapdor S., Kullmann M., Sundararajan R. How retailers can drive profitable growth through dynamic pricing. McKinsey & Company. URL: <https://www.mckinsey.com/industries/retail/our-insights/how-retailers-can-drive-profitable-growth-through-dynamic-pricing> [Accessed 21st November 2024].

В упомянутых выше исследованиях все объекты комплекса жилья предполагались однородными, т. е. модели в них не различали между собой, например, однокомнатные и двухкомнатные квартиры. Однако, такой подход, с точки зрения практики, вряд ли можно назвать удовлетворительным. В данной работе на конечном промежутке времени  $[0, T]$  рассматривается задача оптимизации выручки при продаже комплекса ОН, который не предполагается однородным, а напротив, делится на  $k$  ценовых групп ( $k > 1$ ). При этом все объекты одной ценовой группы имеют одинаковые характеристики и цену, которая может меняться во времени. Подробно рассмотрены различного рода ограничения на продажи и на выручку, которые естественным образом возникают из требований бизнеса. Также, в работе исследуется случай переменной стоимости денег, которая может быть представлена как монотонно невозрастающая функция времени (характер монотонности вызван инфляцией, инвестиционной активностью и т. д.), и стоимости объектов недвижимости, которая по мере строительства увеличивается.

В работе описана базовая математическая модель максимизации выручки при наличии  $k$  ценовых групп, причем предполагается, что спрос каждой ценовой группы зависит только от цены на объекты данной ценовой группы, т. е. в терминах бизнеса отсутствует процесс «каннибализации» ценовых групп. Формулируется и доказывается результат об общем виде ценовой политики. Выявляется проблема распределения алгоритмом выручки между ценовыми группами. Приводится алгоритм нахождения ценовой политики для каждой ценовой группы. В следующем разделе приводится способ решения проблемы распределения. Затем базовая модель обобщается на случай переменной стоимости денег и растущей по мере строительной готовности стоимости ОН, приводится алгоритм нахождения ценовой политики. В следующем разделе производится демонстрация работы базового алгоритма для случая двух ценовых групп недвижимости: одно- и двухкомнатные квартиры. Далее, предлагается иной подход к распределению показателей интегральной выручки между ценовыми группами, после чего проводится его сравнение с ранее представленным методом. Принцип работы алгоритма демонстрируется в ситуации, когда спрос меняет свое значение для одной из ценовых групп.

Основной вклад авторов данной работы заключается в разработке математической модели, которая учитывает несколько ценовых групп объектов недвижимости, каждая из которых имеет свои цены и собственную функцию спроса. Эта модель позволяет исследовать, как меняется ценовая политика на ОН каждой типологии, то есть цены в зависимости от времени и изменений спроса, учитывая при этом ограничения на выручку и объемы продаж для каждой ценовой группы. Более того, в статье предложена модификация базовой модели с учетом стоимости денег и роста цены ОН по мере строительной готовности, что приближает модель к реальным рыночным условиям.

### Математическая модель

В данном разделе описывается базовая модель ДЦО для случая нескольких ценовых групп ОН, формулируется базовая задача нахождения оптимальной ценовой политики.

Пусть  $p^i(t)$  – цена объекта недвижимости  $i$ -й ценовой группы в момент времени  $t$ ;  $v^i(p)$  – темп продаж объектов ценовой группы  $i$  при цене  $p$ . Фактически,  $v^i(p)$  показывает, сколько объектов ценовой группы  $i$  будет приобретено за единицу времени, если установленная цена будет равна  $p$ .

Скорость приращения выручки от продажи объектов ценовой группы  $i$  стоимостью  $p^i$  при темпе продаж  $v^i(p^i)$  соответственно равна  $p^i \cdot v^i(p^i)$ . Тогда суммарные продажи  $S_{p^i(t)}^i(t)$  и суммарная выручка  $R_{p^i(t)}^i(t)$  от продажи всех ОН  $i$ -й ценовой группы за время от 0 до  $t$  выражаются следующим образом:

$$S_{p^i(t)}^i(t) = S^i(t) = \int_0^t v^i(p^i(\tau)) d\tau,$$

$$R_{p^i(t)}^i(t) = R^i(t) = \int_0^t p^i(\tau) v^i(p^i(\tau)) d\tau.$$

Выручка от продаж всех объектов ценовой группы  $i$  за все время продаж  $T$ :

$$R_{p^i(t)}^i(T) = R^i(T) = \int_0^T p^i(t) v^i(p^i(t)) dt.$$

Однако, в реальных приложениях [13–15] рассматривается не выручка от продажи объектов конкретной ценовой группы, а суммарная выручка от продажи ОН всех ценовых групп, т. е. на практике интерес представляет величина

$$R_{p^i(t)}(t) = R(t) = \sum_{i=1}^k R_{p^i(t)}^i(t),$$

называемая в работе *интегральной выручкой*.

Введем также обозначение для суммарных продаж и суммарной выручки по каждой ценовой группе, а также для интегральной выручки, накопленный за промежутки времени  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ :

$$S_{p^i(t)}^i(t_1, t_2) = S^i(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} v^i(p^i(t)) dt,$$

$$R_{p^i(t)}^i(t_1, t_2) = R^i(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p^i(t) v^i(p^i(t)) dt,$$

$$R_{p^i(t)}(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^k R^i(t_1, t_2).$$

Обозначим через

$$R_{p_0^i}^{*i}(t_1, t_2) = R^{*i}(t_1, t_2) = p_0^i \cdot v^i(p_0^i) \cdot (t_2 - t_1),$$

$$R_{p_0^i}^*(t_1, t_2) = R^*(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^k R_{p_0^i}^{*i}(t_1, t_2)$$

суммарную выручку для ценовой группы  $i$  и интегральную выручку, накопленные на отрезке  $[t_1, t_2] \subset [0, T]$  при постоянной ценовой политике  $p^1(t) = p_0^1, \dots, p^k(t) = p_0^k$ . Для удобства, также введем обозначения:

$$R_{p_0^i}^{*i}(t) = R^{*i}(t) = R_{p_0^i}^{*i}(0, t),$$

$$R_{p_0^i}^*(t) = R^*(t) = \sum_{i=1}^k R_{p_0^i}^{*i}(t).$$

Далее на протяжении всей работы будем неявно предполагать, что ценовая политика  $(p^1(t), \dots, p^k(t))$  ясна из контекста и опускать ее обозначение нижним индексом в формулах.

Также при нахождении цен необходимо учитывать выполнение ряда ограничений как на суммарное количество проданных ОН по каждой ценовой группе, так и на интегральную выручку от продаж ОН всех имеющихся ценовых групп.

Без потери общности будем считать, что ограничения на продажи и интегральную выручку заданы в одни и те же фиксированные моменты времени  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_l = T$ . Ограничения на продажи объекта  $i$ -й ценовой группы в момент времени  $\tau_j$  обозначим  $S_j^i$ , ограничение на интегральную выручку в момент  $\tau_j$  обозначим  $R_j$ . Тем самым, задачу нахождения оптимальной ценовой политики в условиях множественности ценовых групп ОН можно сформулировать следующим образом:

$$R(T) \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях:

– на промежуточные продажи

$$S^i(\tau_j) \geq S_j^i, \quad 1 \leq j \leq l-1, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (2)$$

– на конечные продажи

$$S^i(T) = S_l^i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad (3)$$

– на интегральную выручку

$$R(\tau_j) \geq R_j, \quad 1 \leq j \leq l. \quad (4)$$

### Общий вид оптимальной ценовой политики

В данном разделе исследуется решение задачи (1)–(4). Сначала рассмотрим более простую ситуацию, когда наложены ограничения только на конечные продажи по каждой ценовой группе, а также, сформулируем и докажем соответствующую теорему.

**Теорема 1.** *Решением задачи (1), (3) для каждого  $i = 1, \dots, k$  является постоянная для всех  $t \in [0, T]$  цена  $p^i(t) = p_0^i$ , такая, что*

$$v^i(p_0^i) = \frac{S_l^i}{T}.$$

*Доказательство.* Так как для любого  $i = 1, \dots, k$  выручка  $R^i(T)$  по каждой ценовой группе – положительная величина, то выражение

$$R(T) = \sum_{i=1}^k R^i(T) = \sum_{i=1}^k \int_0^T p^i(t) v^i(p^i(t)) dt,$$

поскольку ограничения (3) выполняются независимо для каждой ценовой группы, принимает наибольшее значение в том и только в том случае, когда каждое  $R^i(T)$  максимально.

Таким образом, для каждого  $i$  от 1 до  $k$  цена находится как решение следующей задачи:

$$\int_0^T p^i(t) v^i(p^i(t)) dt \rightarrow \max,$$

при

$$\int_0^T v^i(p^i(t)) dt = S_l^i.$$

Согласно [11] решениями этих задач являются постоянные на всем промежутке цены  $(p_0^1, \dots, p_0^k)$ , которые удовлетворяют уравнениям:

$$v^i(p_0^i) = \frac{S_l^i}{T}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Доказанное утверждение фактически означает, что в случае отсутствия дополнительных ограничений оптимальной стратегией, с точки зрения максимизации прибыли, является равномерное вымывание.

На Рисунке 1 схематично изображено утверждение теоремы 1 для случая двух ценовых групп ( $k = 2$ ). Верхние два графика показывают вид кривой суммарных продаж для каждой ценовой группы. График представляет собой прямую линию, отражающую тот факт, что вымывание объектов недвижимости происходит равномерно<sup>4</sup>. Нижний график выручки показывает также, что при равномерных продажах ОН происходит равномерное накопление выручки.

Теперь вид решения общей задачи, когда вдобавок накладываются ограничения на промежуточные продажи и на интегральную выручку, можно получить как следствие теоремы 1.

**Следствие 1.** Пусть  $(p^1(t), \dots, p^k(t))$  – решение задачи (1)–(4). Тогда для  $i = 1, \dots, k$  цена  $p^i(t)$  представляет собой кусочно-постоянную функцию на отрезке  $[0, T]$ , причем смена значений может происходить только в моменты ограничений, которые выполнены строго.

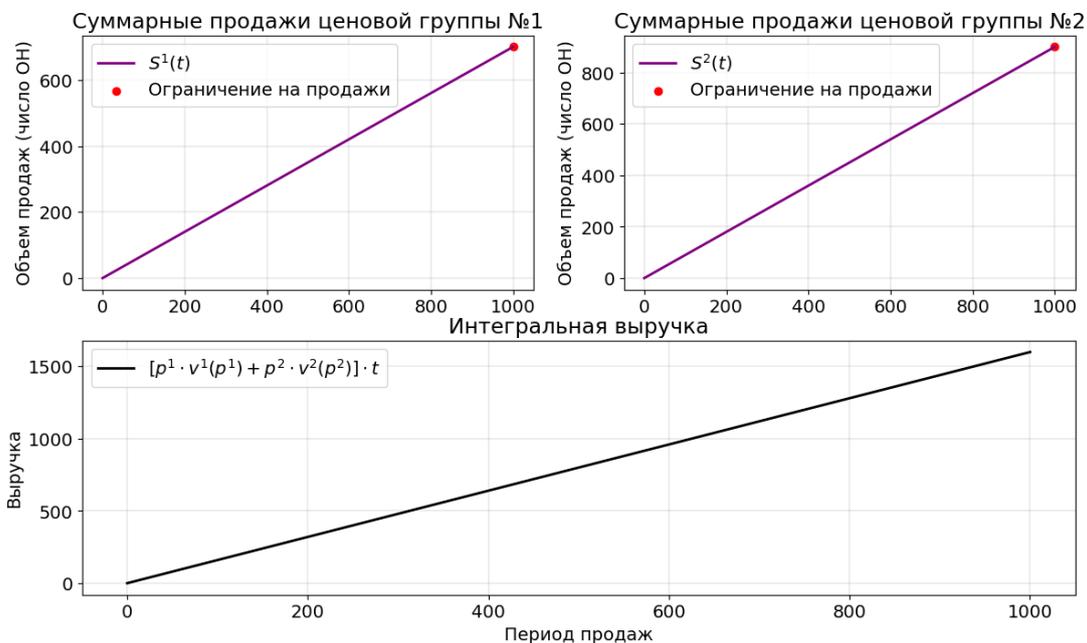


Рисунок 1 – Равномерное вымывание по каждой ценовой группе ОН и соответствующая интегральная выручка

Figure 1 – Even absorption for each pricing group and the corresponding aggregate cumulative revenue

<sup>4</sup> Под равномерным вымыванием мы подразумеваем, что каждая ценовая группа продается равномерно.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный промежуток  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$  времени между ограничениями. Тогда соответствующее ограничение на продажи  $i$ -й ценовой группы будет даваться неравенством  $S^i(\tau_j) \geq S_j^i$ , а ограничение на интегральную выручку – неравенством  $\sum_{i=1}^k R^i(\tau_j) \geq R_j$ . Начальные условия в задаче (1)–(4) формулируются так:  $\forall i = 1, \dots, k \ S^i(0) = 0, R^i(0) = 0$ . Сделав замену переменной  $t \mapsto t - \tau_{j-1}$  и введя новые функции  $\tilde{S}^i, \tilde{R}^i$ , такие, что  $\tilde{S}^i(t) = S^i(\tau_{j-1}) + S^i(t + \tau_{j-1})$  и  $\tilde{R}^i(t) = R^i(\tau_{j-1}) + R^i(t + \tau_{j-1})$ . Тем самым, при фиксированных итоговых продажах  $\tilde{S}^i(\tau_j - \tau_{j-1})$  мы имеем на отрезке  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$  ту же задачу оптимизации, что и (1), (3). Так как, по теореме 1 при ограничениях на промежуточные продажи цена должна быть постоянной на отрезке, то при  $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$  цены  $(p^1(t), \dots, p^k(t))$  будут постоянны.

Осталось показать, что изменение цены происходит только в ограничениях, которые выполнены строго. Для произвольного  $i = 1, \dots, k$  рассмотрим ценовую политику  $p^i(t)$ . Рассмотрим момент  $\tau_j$  изменения цены  $p^i(t)$ . На промежутке  $[\tau_{j-1}, \tau_{j+1}]$  между ограничениями, зафиксируем цены остальных ценовых групп и продажи для данной. Получаем задачу для одной ценовой группы, рассмотренную в [12]. А для нее уже известно, что изменения цены происходят только в ограничениях, которые выполнены строго. Причем при изменении оптимальная цена не понижается.

### Особенности ограничений на выручку в задаче с несколькими ценовыми группами

Следствие 1 указывает лишь на то, какой вид должна иметь оптимальная цена и в какие моменты времени она может меняться. Однако, в нем ничего не говорится о том, как именно устанавливать цены. В работе [12] была исследована задача оптимизации выручки в предположении, что все ОН однородны, то есть при числе ценовых групп  $k = 1$ . В данной ситуации момент ограничения избирался в качестве момента изменения цены, если ограничение являлось *самым жестким*, то есть требующим меньшей цены для выполнения среди всех ограничений от данного момента и до конца интервала продаж.

Основным свойством самых жестких ограничений для случая одной ценовой группы было то, что, во-первых, именно в них происходило новое изменение цены, а во-вторых, по их значениям находились величины предыдущих изменений цены. В данном разделе среди ограничений также будут выделены те, специальные ограничения, которые позволят установить момент и величину изменения цен.

**Определение.** Пусть  $p^1(t), \dots, p^k(t)$  – решение задачи (1), (3). Обременяющими будем называть те ограничения на выручку, для которых выполняется неравенство:

$$R^*(t) < R_j. \quad (5)$$

При наличии обременяющих ограничений в определенные моменты времени  $\tau_j$  выручка должна быть больше, чем была бы при равномерном вымывании. Также, заметим, что добавление необременяющих ограничений на выручку при ограничениях на конечные продажи не меняет решения, – оно будет даваться равномерным вымыванием и, более того, той же формулой.

**Определение.** Пусть  $j = 1, \dots, l$  и  $\tau_{j_c}$  – текущий момент времени. Предположим, что найдется  $j_c < j \leq l$ , такой, что  $R(\tau_{j_c}) + R^*(\tau_{j_c}, \tau_j) < R_j$ , множество таких индексов обозначим через  $J$ . Тогда ограничение  $R_{j^*}$ , такое, что  $j^* =$

$\arg \max_{j \in J} \frac{R_j - R(\tau_{j_c}) - R^*(\tau_{j_c}, \tau_j)}{\tau_j - \tau_{j_c}}$ , называется самым жестким ограничением (СЖО), а  $\tau_{j^*}$  – моментом самого жесткого ограничения.

Таким образом, самое жесткое обременяющее ограничение требует наибольшей скорости получения выручки.

В работе [12] приведен точный алгоритм для нахождения оптимальной ценовой политики в условиях однородности ОН. Заметим, что в случае нескольких ценовых групп вряд ли существует аналогичный алгоритм. Для того, чтобы показать это, рассмотрим случай двух ценовых групп и одного обременяющего ограничения в размере  $R$  в момент времени  $\tau \in (0, T)$ . Обозначим соответствующие функции спроса через  $v^1(p^1)$  и  $v^2(p^2)$ . Поскольку обременяющее ограничение единственное, оно является самым жестким, и, согласно следствию 1, оптимальными функциями цены для каждой ценовой группы являются кусочно-линейные функции  $p^1(t), p^2(t)$  со сменой значений в момент задания ограничения, т. е. для  $i = 1, 2$

$$p^i(t) = \begin{cases} p_0^i, & \text{если } t \in [0, \tau], \\ p_1^i, & \text{если } t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

Тогда решением оптимизационной задачи (1), (3), (4) является ценовая политика  $(p^1(t), p^2(t))$ , максимизирующая интегральную выручку

$$p_1^1 v^1(p_1^1) \tau + p_2^1 v^1(p_2^1) (T - \tau) + p_1^2 v^2(p_1^2) \tau + p_2^2 v^2(p_2^2) (T - \tau)$$

и удовлетворяющая условиям

$$v_1^i(p_1^i) \tau + v_2^i(p_2^i) (T - \tau) = S_i^i, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$p_1^1 v^1(p_1^1) \tau + p_1^2 v^2(p_1^2) \tau = R. \quad (7)$$

Теперь методом множителей Лагранжа найдем необходимое условие оптимальности ценовой политики  $(p^1(t), p^2(t))$ . Составим лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p_1^1, p_2^1, p_1^2, p_2^2, q^1, q^2, q^3) = & \\ = & (p_1^1 v^1(p_1^1) \tau + p_2^1 v^1(p_2^1) (T - \tau) + p_1^2 v^2(p_1^2) \tau + p_2^2 v^2(p_2^2) (T - \tau)) + \\ + & q^1 (v^1(p_1^1) \tau + v^1(p_2^1) (T - \tau) - S_1^1) + q^2 (v^2(p_1^2) \tau + v^2(p_2^2) (T - \tau) - S_2^2) + \\ + & q^3 (p_1^1 v^1(p_1^1) \tau + p_1^2 v^2(p_1^2) \tau - R). \end{aligned}$$

Таким образом, приравнивая частные производные  $\mathcal{L}$  к нулю, получим для  $i = 1, 2$

$$v^i(p_1^i) + p_1^i \frac{dv^i}{dp^i}(p_1^i) + q^i \frac{dv^i}{dp^i}(p_1^i) + q^3 \left( v^i(p_1^i) + p_1^i \frac{dv^i}{dp^i}(p_1^i) \right) = 0,$$

$$v^i(p_2^i) + p_2^i \frac{dv^i}{dp^i}(p_2^i) + q^i \frac{dv^i}{dp^i}(p_2^i) = 0.$$

Тем самым, даже в простейшем случае для нахождения ценовой политики необходимо решить систему из семи нелинейных уравнений. Сложность системы и количество уравнений растут при увеличении количества ценовых групп и при добавлении промежуточных ограничений. Очевидно, что невозможно аналитически решить данную задачу. Поэтому в работе мы не приводим точных алгоритмов нахождения оптимальной ценовой политики. Вместо этого мы предлагаем так называемые эвристические, или квази-оптимальные, алгоритмы нахождения ценовой политики.

На основании ранее введенных понятий и доказанных утверждений рассмотрим квазиоптимальный алгоритм нахождения ценовой политики.

1. Устанавливаем шаг  $m = 0$  и индекс шага  $j_m = 0$ .
2. На шаге с номером  $m$  для каждой ценовой группы  $i$  находим такую цену  $p_m^i$ , что она является решением соответствующей задачи для одной ценовой группы при наличии только ограничений на промежуточные и конечные продажи.
3. Для каждого  $j > j_m$  находим интегральную выручку  $R^*(\tau_{j_m}, \tau_j) = R_{p_m}^*(\tau_{j_m}, \tau_j)$  и составляем множество  $J_m = \{j \in (j_m, l] | R^*(\tau_{j_m}, \tau_j) < R_j\}$  индексов обременяющих ограничений.
4. Если  $J_m$  непусто, т. е. если на промежутке  $[\tau_{j_m}, T]$  есть обременяющие ограничения:
  - 4.1. то полагаем  $j_* = \arg \max_{j \in J} \frac{R_j - R(\tau_{j_c}) - R^*(\tau_{j_c}, \tau_j)}{\tau_j - \tau_{j_c}}$  – индекс самого жесткого ограничения,  $R_{j_*}$  – самое жесткое ограничение, а  $\tau_{j_*}$  – момент самого жесткого ограничения, т. е. следующий момент пересчета цен; перейти к п. 5;
  - 4.2. иначе на промежутке  $[\tau_{j_m}, T]$  устанавливаются цены  $p_m^1, \dots, p_m^k$ , алгоритм заканчивает свою работу.
5. Производится пересчет цен – решается уравнение

$$\sum_{i=1}^k p_m^i \cdot v^i(p_m^i) = \frac{R_{j_*} - R^*(\tau_{j_m})}{\tau_{j_*} - \tau_{j_m}}. \quad (8)$$

6. Цены  $(p_m^1, \dots, p_m^k)$ , найденные в п. 5, устанавливаются на всем промежутке  $[\tau_{j_m}, \tau_{j_*}]$ .
7. Если  $\tau_{j_*} < T$ , то  $m \leftarrow m + 1, j_m \leftarrow j_*$ , перейти к п. 2.

Представим наглядно основную часть работы данного алгоритма. Для простоты будем считать, что ограничения на продажи заданы только на конце периода продаж при  $T = 1000$  и в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  определены ограничения  $R_1, R_2, R_3$  на интегральную выручку. Схема работы алгоритма представлена на Рисунках 2–4. На первом шаге (Рисунок 2) при моменте времени  $\tau = 0$  текущего начального шага выбраны цены на ОН каждой ценовой группы согласно п. 2 алгоритма. Далее, рассчитывается кривая ожидаемых продаж, которая на графике изображена в виде пунктирной прямой, соединяющей точки  $(0, 0)$  и  $(T, R^*(T))$ . Эта кривая соответствует равномерному вымыванию объектов недвижимости каждой ценовой группы.

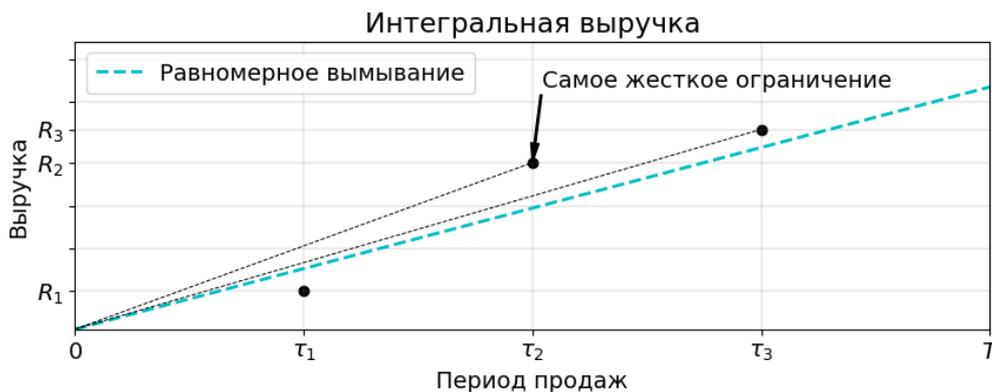


Рисунок 2 – Первый шаг: поиск самого жесткого ограничения

Figure 2 – First step: finding the most stringent constraint

Однако, как можно видеть на графике, два финансовых ограничения, а именно  $R_2$  и  $R_3$ , не удастся выполнить за счет равномерного вымывания. Поэтому, переходя ко

второму шагу (Рисунок 3), выполняется поиск самого жесткого ограничения среди обременяющих  $R_2$  и  $R_3$ . На графике ограничение  $R_2$  в момент времени  $\tau_2$  является самым жестким, и поэтому, согласно алгоритму, происходит минимально возможное отклонение от равномерного вымывания, чтобы было выполнено данное ограничение.

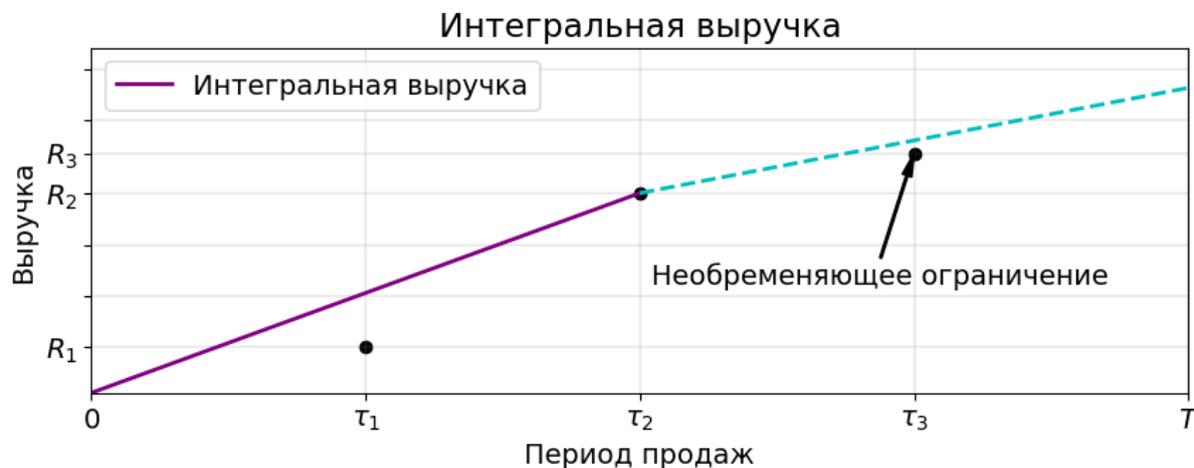


Рисунок 3 – Второй шаг: движение к ограничению и поиск нового самого жесткого ограничения

Figure 3 – Second step: approaching the constraint and identifying the next most stringent constraint

Дальше назначается новый текущий момент  $\tau \leftarrow \tau_2$  и снова происходит определение цен согласно п. 2. Затем, производится расчет и построение кривой ожидаемых продаж (прерывистая линия). Теперь равномерным вымыванием можно достигнуть выполнения всех оставшихся ограничений на интегральную выручку, поэтому алгоритм оставляет уже найденные цены, и мы получаем итоговый график интегральной выручки (Рисунок 4).

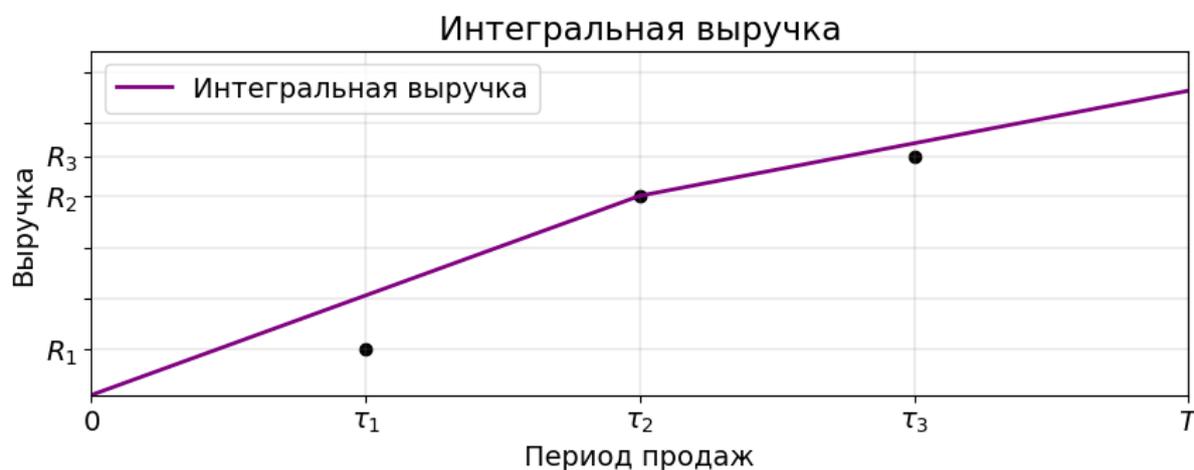


Рисунок 4 – Третий шаг: построена кривая интегральной выручки, алгоритм завершен

Figure 4 – Third step: aggregate cumulative revenue curve completed, algorithm finished

К сожалению, как в случае одной ценовой группы, получить аналитическое выражение единственного решения уравнения (8) в случае многих ценовых групп уже не представляется возможным. Эту проблему мы называем *проблемой распределения*. Ей посвящен следующий раздел.

## Распределение интегральных ограничений по ценовым группам

Точное решение проблемы распределения, поставленной в предыдущем разделе, довольно сложно и требует нахождения решения системы нелинейных уравнений. Поскольку функции спроса  $v^1, \dots, v^k$  заранее неизвестны, а само понятие функции спроса может использоваться только на относительно коротких временных интервалах, возникает возможность приближенного решения данной проблемы в виде алгоритмов обратной связи, в основу которых полагаются исторические данные продаж. В данном разделе мы опишем возможный подход к проблеме распределения.

Введем для удобства некоторые обозначения. Пусть фиксирован шаг  $m$  алгоритма и номер ценовой группы  $i \in \{1, \dots, k\}$ , тогда

$$\Delta R_m := R(\tau_{j_*}) - R^*(\tau_{j_m}, \tau_{j_*}), \quad \Delta \tau_m := \tau_{j_*} - \tau_{j_m}.$$

Величина  $\Delta R_m$  показывает, насколько сильно обременяющее ограничение  $R_{j_*}$  превосходит выручку, которая может быть достигнута равномерным вымыванием от момента  $\tau_{j_m}$  к моменту  $\tau_{j_*}$ . То есть,  $\Delta R_m$  тем больше, чем менее применима стратегия равномерного вымывания. Величина  $\Delta \tau_m$  показывает лишь продолжительность между текущим моментом времени  $\tau_{j_m}$  и моментом обременяющего ограничения  $\tau_{j_*}$ .

К проблеме распределения можно подойти следующим образом. Будем распределять ограничения на выручку пропорционально возможности получения большей выручки, т. е. пропорционально разнице между ожидаемой выручкой, которую возможно получить при равномерном вымывании, и максимально возможной. Тем самым, сведем, наконец, задачу максимизации интегральной выручки по многим ценовым группам к задаче для одной. Сформулируем этот подход формально.

Пусть на  $m$ -ом шаге алгоритма в п. 2 получены цены  $p_m^1, \dots, p_m^k$ ; напомним, что ожидаемая выручка, приобретенная на промежутке  $[\tau_{j_m}, \tau_{j_*}]$ , для  $i$ -й ценовой группы есть величина

$$R^{*i}(\tau_{j_m}, \tau_{j_*}) = p_m^i \cdot v^i(p_m^i) \cdot (\tau_{j_*} - \tau_{j_m}),$$

а величиной

$$R^*(\tau_{j_m}, \tau_{j_*}) = \sum_{i=1}^k R^{*i}(\tau_{j_m}, \tau_{j_*})$$

дается интегральная ожидаемая выручка к моменту  $\tau_{j_*}$ . Максимально возможная выручка по каждой ценовой группе  $i = 1, \dots, k$  определяется по формуле

$$\widetilde{R}^i(\tau_{j_m}, \tau_{j_*}) := P_m^{i*} \cdot v^i(P_m^{i*}) \cdot (\tau_{j_m} - \tau_{j_*}),$$

где  $P_m^i = \arg \max p_m^i \cdot v^i(p_m^i)$ . В свою очередь, интегральная максимально возможная выручка равна

$$\widetilde{R}(\tau_{j_m}, \tau_{j_*}) = \sum_{i=1}^k \widetilde{R}^i(\tau_{j_m}, \tau_{j_*}).$$

Обозначим через  $\eta_m^i$  выражение

$$\frac{\widetilde{R}^i(\tau_{j_m}, \tau_{j_*}) - R^{*i}(\tau_{j_m}, \tau_{j_*})}{\widetilde{R}(\tau_{j_m}, \tau_{j_*}) - R^*(\tau_{j_m}, \tau_{j_*})}.$$

Очевидно, для любого  $i = 1, \dots, k$  верно, что  $\eta_m^i \geq 0$  и  $\eta_m^1 + \dots + \eta_m^k$ .

Тогда определим распределенную на  $i$ -ую ценовую группу часть недополученной выручки по следующей формуле:

$$\Delta R_m^i = \eta_m^i \Delta R_m.$$

Будем на  $m$ -ом шаге алгоритма в п. 5 пересчитывать цены, находя их, как и в случае одной ценовой группы, из уравнений

$$p_m^i \cdot v^i(p_m^i) = \frac{R^{*i}(\tau_{jm}, \tau_{j*}) + \Delta R_m^i}{\Delta \tau_m}. \quad (9)$$

### Учет стоимости денег и роста цены объекта недвижимости

Рассмотрим улучшение базовой модели, в котором будут учтены меняющаяся со временем стоимость денег и растущая стоимость ОН в зависимости от стадии строительства. Для случая одной ценовой группы в статье [12] были приведены результаты сравнения работы алгоритмов, в которых не учитывались эти параметры и в которых учитывались. Было показано, что алгоритм с учетом стоимости денег позволяет получать бóльшую выручку. Отталкиваясь от этих результатов для единственной ценовой группы, построим в данном разделе модификацию текущей модели с многими ценовыми группами, чтобы при построении ценовой политики она опиралась на стоимость денег и рост цены ОН в период строительства.

Будем считать, что стоимость денег на протяжении всего периода продаж  $[0, T]$  является невозрастающей функцией от времени  $\varphi(t)$ . Таким образом, суммарная выручка для  $i$ -й ценовой группы за период времени от 0 до  $t$  записывается так:

$$R^i(t) = \int_0^t \varphi(\tau) \cdot p^i(\tau) \cdot v^i(p^i(\tau)) d\tau.$$

В свою очередь, интегральная выручка с учетом стоимости денег будет выглядеть следующим образом:

$$R(t) = \sum_{i=1}^k R^i(t) = \sum_{i=1}^k \int_0^t \varphi(\tau) \cdot p^i(\tau) \cdot v^i(p^i(\tau)) d\tau.$$

Может быть поставлена следующая задача оптимизации:

$$R(T) = \sum_{i=1}^k \int_0^T \varphi(t) \cdot p^i(t) \cdot v^i(p^i(t)) dt \rightarrow \max \quad (10)$$

при ограничениях вида (2)–(4):

$$\begin{aligned} S^i(\tau_j) &\geq S_j^i, \quad 1 \leq j \leq l-1, \quad 1 \leq i \leq k, \\ S^i(T) &= S_i^i, \quad 1 \leq i \leq k, \\ R(\tau_j) &\geq R_j, \quad 1 \leq j \leq l. \end{aligned}$$

При  $\varphi(t) \equiv 1$ , т. е. когда деньги не меняют своей стоимости в период продаж, мы приходим в точности к базовой постановке задачи оптимизации выручки.

Стоимость ОН в зависимости от стадии строительства можно считать монотонно возрастающей функцией  $\kappa(t)$ , которая показывает, во сколько раз больше покупатель готов платить за каждый ОН в момент времени  $t$ , чем в начале продаж. Ввести эту величину в нашу модель, удобно рассмотрев семейство  $v_t^i(p)$ ,  $i = 1, \dots, k$  функций спроса, зависящих от времени  $t$ , для которых для  $t \in [0, T]$  выполняется:

$$v_t^i(\kappa(t)p^i) = v_0^i(p^i). \quad (11)$$

Удобно будет использовать  $v^i(p) := v_0^i(p), i = 1, \dots, k$ . Обозначим через  $\widehat{p}^1(t), \dots, \widehat{p}^k(t)$  цены и введем вспомогательные величины  $p^i(t) := \frac{\widehat{p}^i(t)}{\kappa(t)}, i = 1, \dots, k$ . Тогда для любого  $i = 1, \dots, k$  верно, что

$$v_t^i(\widehat{p}^i(t)) = v_t^i(\kappa(t)p(t)) = v_0^i(p(t)) = v^i(p(t)), \quad (12)$$

$$\varphi(t)\widehat{p}^i(t)v_t^i(\widehat{p}^i(t)) = \varphi(t)\kappa(t)p^i(t)v^i(p(t)) = \zeta(t)p^i(t)v^i(p^i(t)), \quad (13)$$

где  $\zeta(t) := \varphi(t)\kappa(t)$  – так называемая обобщенная функция стоимости денег. Получаем, что в таких обозначениях задача максимизации прибыли с учетом  $\kappa(t)$  сводится к уже рассмотренной задаче с заменой  $\varphi(t)$  на  $\zeta(t)$ . Ровно в таком виде мы и будем ее решать, для удобства используя  $\varphi(t)$  вместо  $\zeta(t)$ .

Опишем теперь, как выглядит решение поставленной выше задачи. Сперва рассмотрим случай наличия только ограничений на конечные продажи.

**Теорема 2.** *Решением задачи (10), (3) для каждого  $i = 1, \dots, k$  является такая цена  $p^i(t)$ , что*

$$p^i(t) + \left[ v^i(p^i(t)) \right] \cdot \left[ \frac{dv^i}{dp^i}(p^i(t)) \right]^{-1} = -\frac{q^i}{\varphi(t)}, \quad (14)$$

где числа  $q^1, \dots, q^k$  находятся подстановкой цен  $p^1(t), \dots, p^k(t)$  в уравнения (3).

*Доказательство.* Как и в доказательстве теоремы 1 имеем задачу на  $k$  ценовых групп, которая распадается на  $k$  задач для одной ценовой группы  $i \in \{1, \dots, k\}$ :

$$R^i(T) = \int_0^T \varphi(t)p^i(t)v^i(p^i(t)) dt \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$S^i(T) = \int_0^T v^i(p^i(t)) dt = S^i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Соответствующая каждому  $i$  задача решается методом Лагранжа. Функционал Лагранжа для каждого  $i = 1, \dots, k$  выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}^i = \mathcal{L}^i(p^i(t); q^i) = \int_0^T \varphi(t)p^i(t)v^i(p^i(t)) dt + q^i \cdot \left( \int_0^T v^i(p^i(t)) dt - S^i \right).$$

Тогда необходимым условием того, что пара  $p^i(t), q^i$  является экстремалью функционала  $\mathcal{L}^i$  будут два уравнения:  $\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial p^i} = 0, \frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial q^i} = 0$ . Таким образом, решением задачи (10), (3) для каждого  $i = 1, \dots, k$  является такая функция  $p^i(t)$  и такое число  $q^i$ , что

$$\begin{cases} \varphi(t)v^i(p^i(t)) + \varphi(t)p^i(t) \frac{dv^i}{dp^i}(p^i(t)) + q^i \cdot \frac{dv^i}{dp^i}(p^i(t)) = 0, \\ \int_0^T v^i(p^i(t)) dt - S^i = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Теорема доказана.

Заметим, что в общем случае невозможно получить аналитическое решение системы (15), так как она представляет собой систему из  $2k$  нелинейных уравнений. Однако для применения алгоритма на практике этого и не требуется, поскольку решение имеет смысл искать только для конкретных функций спроса  $v^i$ . Например, в качестве аппроксимации функции спроса можно взять линейную функцию:

$$v^i(p^i) = a^i - b^i \cdot p^i, \quad i = 1, \dots, k, \quad (16)$$

параметры  $a^i$  и  $b^i$  которой можно оценивать на основе данных продаж.

Тогда задачу (10), (3) можно явно решить. Подставляя  $v^i(p^i(t)) = a^i - b^i p^i(t)$  в первое уравнение из системы (15) и находя  $q^i$  из второго уравнения, получаем, что

$$p^i(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{a^i}{b^i} - \frac{q^i}{\varphi(t)} \right], \quad (17)$$

$$q^i = \frac{2S_{I(0,T)}^i - a^i T}{b^i I(0,T)}, \quad (18)$$

где  $I(\tau_{(1)}, \tau_{(2)}) = \int_{\tau_{(1)}}^{\tau_{(2)}} \frac{dt}{\varphi(t)}$ .

Полученный результат верен в случае, если нет обременяющих ограничений (5). В случае наличия таких ограничений необходимо корректировать константы  $q^i$ .

Следующий результат является следствием из теоремы 2.

**Следствие 2.** Пусть  $(p^1(t), \dots, p^k(t))$  – решение задачи (10), (2)–(4) с функциями спроса вида (16). Тогда для  $i = 1, \dots, k$  константы  $q^1, \dots, q^k$  представляют собой кусочно-постоянные функции на отрезке  $[0, T]$ , причем смена значений может происходить только в моменты ограничений, которые выполнены строго.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольный промежуток времени  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$  между ограничениями. Соответствующее ограничение на продажи  $i$ -й ценовой группы будет даваться неравенством  $S^i(\tau_j) \geq S_j^i$ , а ограничение на интегральную выручку – неравенством  $\sum_{i=1}^k R^i(\tau_j) \geq R_j$ . Начальные условия в задаче (10), (2)–(4) формулируются так:  $\forall i = 1, \dots, k S^i(0) = 0, R^i(0) = 0$ . Сделав замену переменной  $t \mapsto t - \tau_{j-1}$  и введя новые функции  $\tilde{S}^i, \tilde{R}^i$ , такие, что  $\tilde{S}^i(t) = S^i(\tau_{j-1}) + S^i(t + \tau_{j-1})$  и  $\tilde{R}^i(t) = R^i(\tau_{j-1}) + R^i(t + \tau_{j-1})$ .

Тем самым, при фиксированных итоговых продажах  $\tilde{S}^i(\tau_j - \tau_{j-1})$  мы имеем на отрезке  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$  ту же задачу оптимизации, что и (10), (3). Согласно теореме 2 и формуле (15) константы  $q^1, \dots, q^k$  будут постоянны на промежутке  $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ .

Зафиксируем произвольный номер  $i = 1, \dots, k$  и рассмотрим ценовую политику  $p^i(t)$ . Рассмотрим момент  $\tau_j$  изменения константы  $q^i$  в формуле (18). На промежутке  $[\tau_{j-1}, \tau_{j+1}]$  между ограничениями, зафиксируем цены остальных ценовых групп и продажи для данной. Получаем задачу для одной ценовой группы, рассмотренную в [12].

А для нее уже известно, что изменения констант  $q^1, \dots, q^k$  происходят только в ограничениях, которые выполнены строго.

#### Алгоритм

1. Устанавливаем текущий шаг  $m = 0$ , индекс текущего шага  $j_m = 0$ .
2. На шаге с номером  $m$  из системы (15) находим константы  $q_m^1, \dots, q_m^k$ , такие, что она является решением соответствующей задачи для одной ценовой группы при наличии только ограничений на промежуточные и конечные продажи.
3. Для каждого  $j > j_m$  находим интегральную выручку  $R(\tau_{j_m}, \tau_j) = R_{p_m}(\tau_{j_m}, \tau_j)$ , где  $p_m^i$  – цена, соответствующая константе  $q_m^i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Далее составляем множество  $J_m = \{j \in (j_m, l] \mid R(\tau_{j_m}, \tau_j) < R_j\}$  индексов ограничений, которые не были выполнены при найденных в п. 2 константах.
4. Будем считать, что в  $J_m$  элементы упорядочены, т. е. расположим их в порядке возрастания и присвоим им номера:  $j^{(1)} < \dots < j^{(|J_m|)}$ .
5. Пусть  $s = 1$ . Вычислим значения констант  $q_m^1, \dots, q_m^k$  на промежутке  $[\tau_{j_m}, \tau_{j^{(s)}}]$  при условии, что

$$\sum_{i=1}^k \int_0^{\tau_{j^{(s)}}} \frac{\varphi(t)}{4} \left[ \frac{a_m^i}{b_m^i} - \frac{q_m^i}{\varphi(t)} \right] \left[ a_m^i + \frac{q_m^i b_m^i}{\varphi(t)} \right] dt = R_{j^{(s)}}. \quad (19)$$

5.1. Затем проверяем, выполняются ли все ограничения при текущих значениях констант.

5.2. Если хотя бы одно ограничение не выполнено (с индексом  $j^{(s)}$ ), то меняем  $s$  на  $s'$  и пересчитываем константы до тех пор, пока не будут выполнены все ограничения; иначе, выполняем присваивание  $j^* \leftarrow j^{(s)}$  и переходим к п. 6.

6. На промежутке  $[\tau_{j_m}, \tau_{j^*}]$  устанавливаем цены, исходя из системы (15).

7. Если  $\tau_{j^*} < T$ , то  $m \leftarrow m + 1$ ,  $j_m \leftarrow j^*$ , перейти к п. 2.

До конца неясным остается только п. 5, который снова приводит к проблеме распределения интегрального ограничения по выручке по ценовым группам, описанной ранее. С учетом стоимости денег эта задача не становится проще, однако можно воспользоваться эвристикой – распределяем разницу между ограничением и ожидаемой выручкой при текущих значениях констант пропорционально максимально возможному увеличению выручки по сравнению с ожидаемой для каждой ценовой группы. Альтернативно, если число ограничений на интегральную выручку невелико, можно использовать различные модификации метода Монте-Карло.

### Сравнение способов решения проблемы распределения

В данном разделе наглядно демонстрируется работа базового алгоритма. Сначала введем в рассмотрение новый способ распределения выручки между ценовыми группами, который в отличие от приведенного ранее распределяет выручку не соответственно разности максимально возможной выручки и ожидаемой по каждой ценовой группы, а пропорционально текущему приросту выручки.

В качестве примера предположим, что за период продаж  $T = 10$  происходит реализация ОН двух ценовых групп: одно- и двухкомнатных квартир. В моменты времени  $[2, 4, 6, 8]$  определены ограничения на конечные продажи для однокомнатных 550 и для двухкомнатных 600, а также ограничения на интегральную выручку  $[0, 80000, 90000, 0, 100000]$ . Для первой ценовой группы задаем цену 90, а для второй – 100. Спрос для каждой ценовой группы предполагается линейным и имеющим следующий закон: для первой ценовой группы

$$\begin{cases} 300, & \text{если } a^1 - b^1 \cdot p > 300, \\ 0, & \text{если } a^1 - b^1 \cdot p < 0, \\ 300 \cdot (a^1 - b^1 \cdot p), & \text{иначе,} \end{cases}$$

и для второй ценовой группы

$$\begin{cases} 500, & \text{если } a^2 - b^2 \cdot p > 500, \\ 0, & \text{если } a^2 - b^2 \cdot p < 0, \\ 500 \cdot (a^2 - b^2 \cdot p), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Коэффициенты  $a^1, b^1$  подобраны так, чтобы интервал допустимых цен был  $[20, 120]$ , а  $a^2, b^2$  – так, чтобы допустимые цены лежали в  $[90, 110]$ .

Напомним, что через  $R^{*i}(\tau_{(1)}, \tau_{(2)})$  мы обозначаем выручку для  $i$ -й ценовой группы, полученную равномерным вымыванием в промежутке времени  $[\tau_{(1)}, \tau_{(2)}]$ , а через  $R^i(\tau)$  – накопленную к моменту времени  $\tau$  выручку за продажу ОН  $i$ -й ценовой группы. Соответственно, через  $R^*(\tau_{(1)}, \tau_{(2)})$  обозначаем интегральную выручку  $\sum_{i=1}^k R^{*i}(\tau_{(1)}, \tau_{(2)})$  и через  $R(\tau)$  – интегральную выручку  $\sum_{i=1}^k R^i(\tau)$ .

Теперь опишем второй способ решения задачи распределения. Пусть разница между интегральной выручкой, накопленной при текущей цене, и при равномерном вымывании записывается следующим образом:

$$\Delta R(\tau(2)) = R(\tau(2)) - R^*(\tau(2), \tau(1)).$$

Тогда альтернативный способ предполагает следующее распределение выручки между ценовыми группами:

$$\Delta R^i(\tau(2)) = \frac{R^i(\tau(2))}{R^*(\tau(2), \tau(1))} \Delta R(\tau(2)), \quad i = 1, \dots, k.$$

Далее, цена  $p^i$  на объекты  $i$ -й ценовой группы в момент  $\tau(2)$  находится из уравнения:

$$p^i \cdot v^i(p^i) = \frac{1}{\tau(2) - \tau(1)} \Delta R^i(\tau(2)).$$

На Рисунках 5, 6 изображены цены для первой и второй ценовых групп, соответственно. На каждом графике построены две кривые: фиолетовая – цена, полученная первым способом; зеленая – цена, полученная альтернативным способом.

На Рисунках 7, 8 представлены кривые, отражающие суммарные продажи по каждой ценовой группы. Как видно из графика на Рисунке 9 до момента времени  $\tau_2$  кривые неотличимы, но так как в момент  $\tau_3$  ограничения на выручку стали обременяющими, то после перераспределения разницы целевого показателя выручки в момент времени  $\tau_3$  и ожидаемой выручкой между ценовыми группами кривые стали различаться. Точнее, интегральная выручка по первому методу равна 117839,78, а для альтернативного метода – 114889,51. Тем самым, алгоритм распределения выручки, предложенный нами ранее, обеспечивает на 2,5 % больше выручки по сравнению с альтернативным алгоритмом.

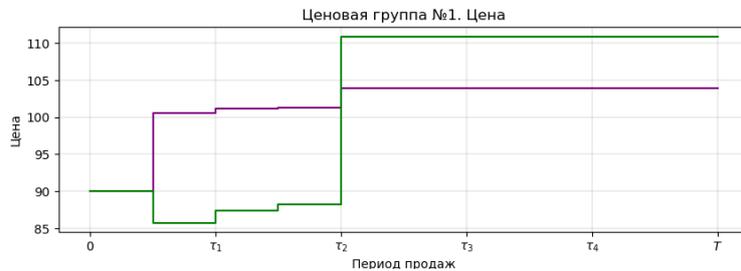


Рисунок 5 – Сравнение цен на ОН первой ценовой группы  
 Figure 5 – Comparison of pricing policies for RE objects in the first pricing group

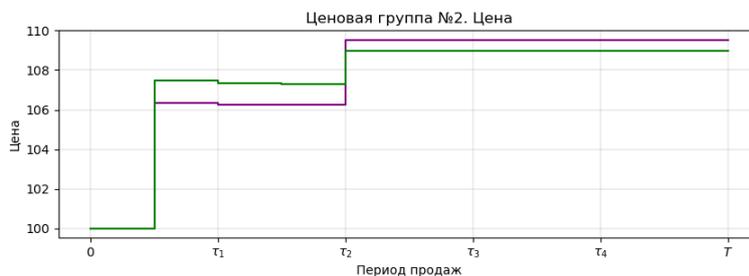


Рисунок 6 – Сравнение цен на ОН второй ценовой группы  
 Figure 6 – Comparison of sales curves for the second pricing group

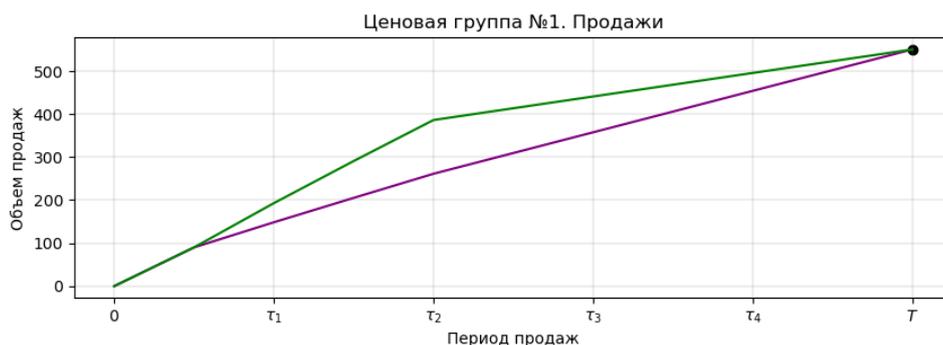


Рисунок 7 – Сравнение объемов продаж ОН первой ценовой группы  
Figure 7 – Comparison of sales curves for the first pricing group

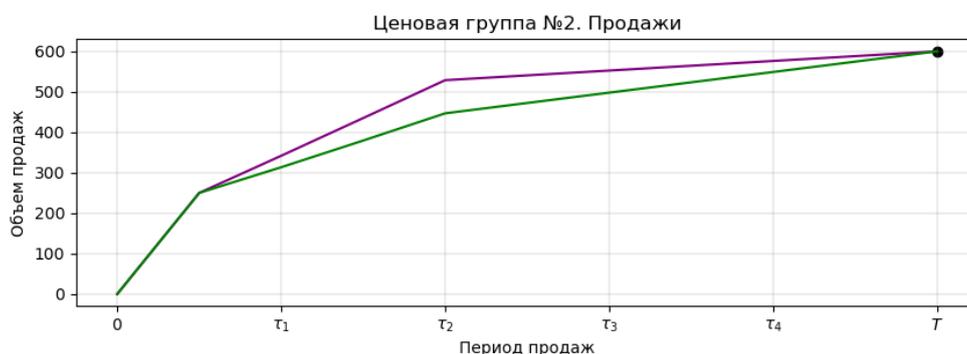


Рисунок 8 – Сравнение цен на ОН второй ценовой группы  
Figure 8 – Comparison of sales curves for the second pricing group

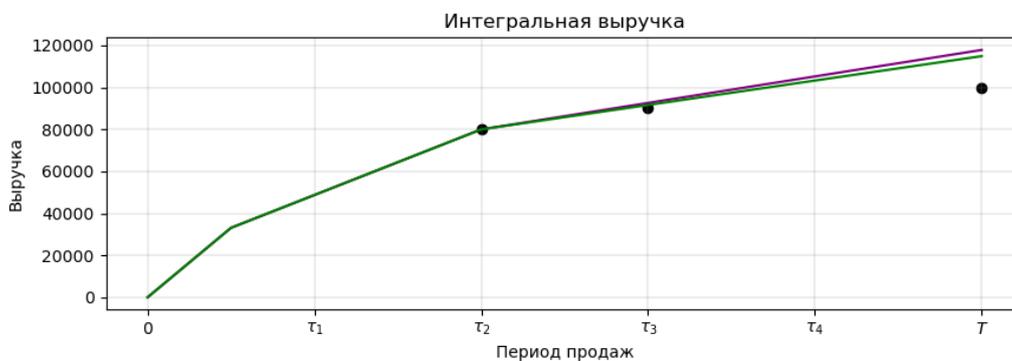


Рисунок 9 – Интегральная выручка  
Figure 9 – Aggregate cumulative revenue

### Визуализация поведения алгоритма в условиях изменившегося спроса

Теперь рассмотрим ситуацию, при которой функция спроса может измениться за период продаж  $T = 10$ . Также предполагается, что в моменты времени  $[2, 4, 6, 8]$  определены ограничения на конечные продажи для однокомнатных 55 и для двухкомнатных 60 и на интегральную выручку  $[2500, 4000, 8000, 9500]$ . Для первой ценовой группы задаем цену 90, а для второй – 100. Для наглядности будем считать, что: а) за весь период произошло только одно изменение и б) спрос изменился только на объекты одной из двух ценовых групп (в нашем примере на однокомнатные квартиры). Более точно, пусть мы имеем следующие функции спроса для каждой ценовой группы  $i = 1, 2$  равны, соответственно:

$$\begin{cases} 20 \cdot (a^1 - b^1 \cdot p), & \text{если } t \in [0, \tau_3], \\ 4 \cdot (a^1 - b^1 \cdot p), & \text{если } t \in (\tau_3, T], \end{cases}$$

$$v^2(p) = 12 \cdot (a^2 - b^2 \cdot p).$$

Причем, для примера взято резкое падение спроса на ОН первой ценовой группы с целью продемонстрировать, что алгоритм даже при таких обстоятельствах способен стабильно отреагировать на рынок и соответствующим образом скорректировать ценовую политику. В момент изменения спроса на первую ценовую группу цены на ОН обеих ценовых групп будут скорректированы. На Рисунках 10, 11 представлены графики изменения цен на объекты каждой ценовой группы. На каждом рисунке в момент времени  $\tau_3$  происходит изменение спроса, и фиолетовая кривая показывает такую цену, если бы спрос оставался прежним, а красная – обновленную ценовую политику. Заметим, что, хотя спрос изменился только на ОН первой ценовой группы, цены были скорректированы как для нее, так и для второй ценовой группы. Это вызвано тем, что алгоритм каждый раз, когда определяет момент изменения цены, распределяет выручку между всеми ценовыми группами. Однако этому есть и вполне практическое объяснение. Так как спрос на объекты первой ценовой группы снизился, то с целью выполнить планы по объемам продаж и по выручке необходимо скорректировать цены как на ОН первой ценовой группы (понизить ее, чтобы получить большую конверсию в связи с меньшим спросом), так и на ОН второй ценовой группы, чтобы компенсировать падение спроса.

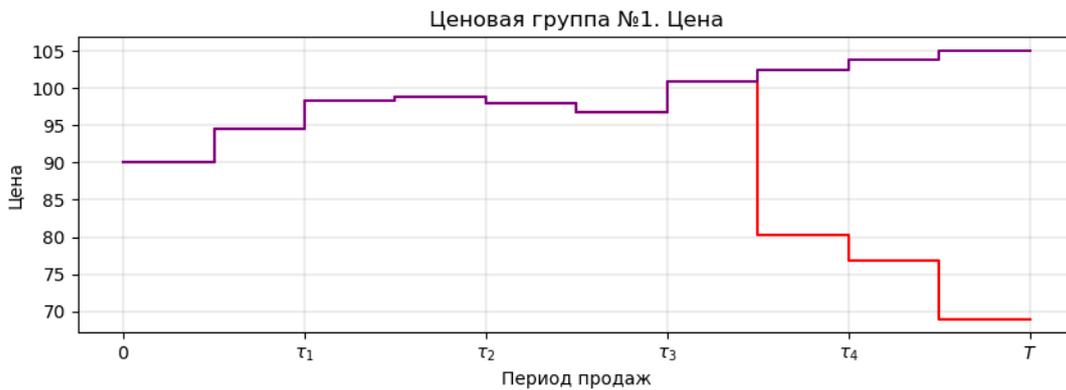


Рисунок 10 – Цены для ценовой группы № 1  
Figure 10 – Pricing policy for pricing group 1

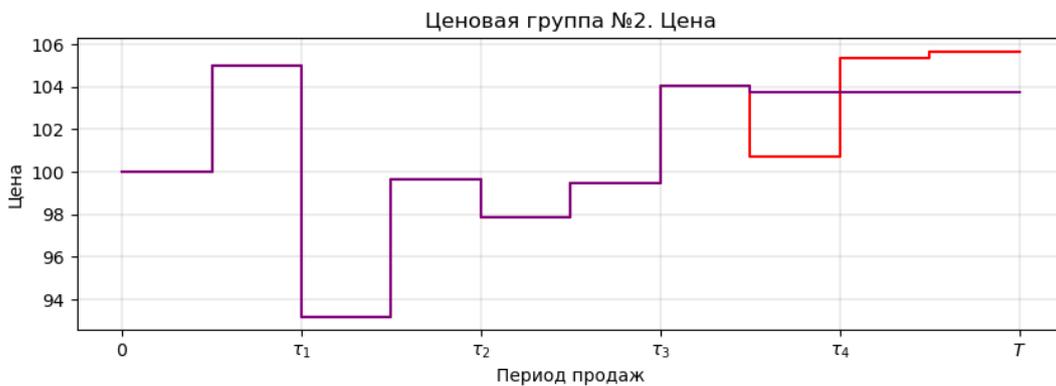


Рисунок 11 – Цены для ценовой группы № 2  
Figure 11 – Pricing for pricing group 2

На Рисунках 12, 13 представлены соответствующие графики кривых продаж, на которых видно, как меняются суммарные продажи при снижении спроса. На Рисунке 12 заметно, что после момента времени  $\tau_3$ , когда спрос на ОН первой ценовой группы снизился, кривая продаж также снизилась, поскольку спрос сократился. Однако благодаря тому, что алгоритм понизил цены на однокомнатные квартиры, удалось с наименьшими потерями поддержать темп продаж, а также выполнить все ограничения.

На Рисунке 14 изображен график интегральной выручки. Хотя в конце периода продаж в ситуации изменившегося спроса обнаруживается меньшая выручка по сравнению с постоянным спросом, все финансовые ограничения выполнены и темпы с минимальными потерями удалось выдержать.

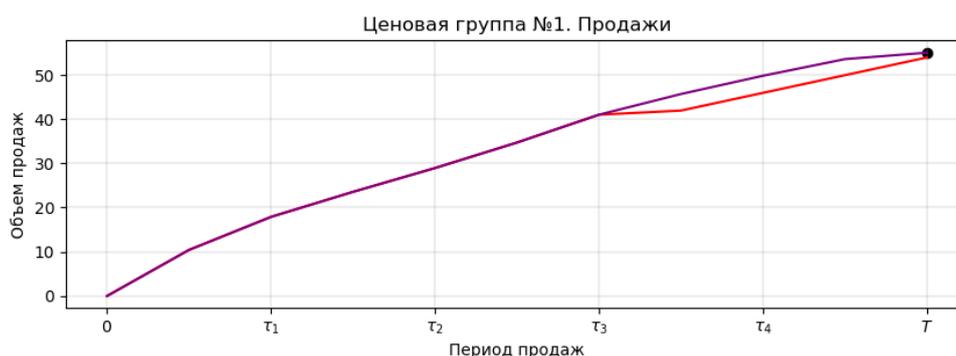


Рисунок 12 – Суммарные продажи для ценовой группы № 1  
Figure 12 – Cumulative sales for pricing group 1

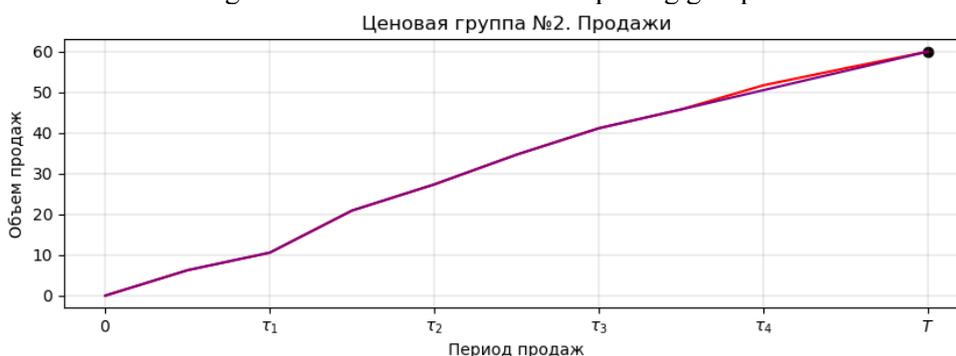


Рисунок 13 – Суммарные продажи для ценовой группы № 2  
Figure 13 – Cumulative sales for pricing group 2

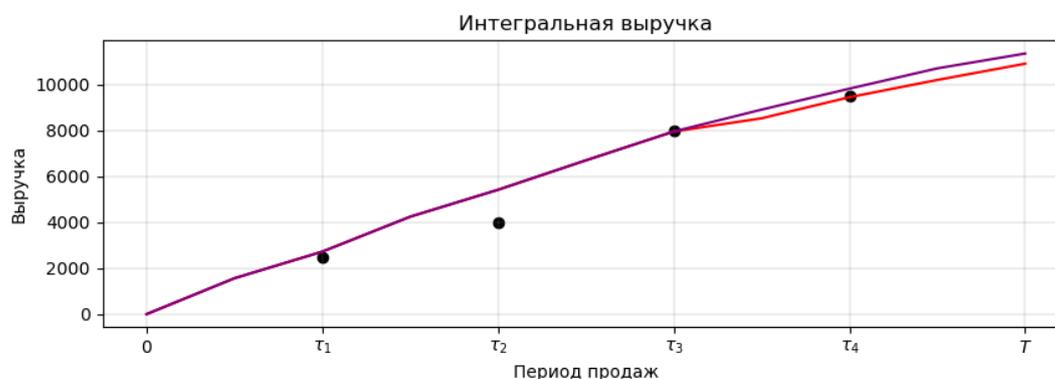


Рисунок 14 – Интегральная выручка  
Figure 14 – Aggregate cumulative revenue

Приведем далее наглядную иллюстрацию того, как алгоритм перераспределяет выручку между ценовыми группами в связи с изменениями спроса. На Рисунке 15 изображена диаграмма, показывающая, как изменилась доля «недополученной» выручки (как в алгоритме, разница между максимальной и ожидаемой выручкой в момент времени  $t_3$ ) при изменении спроса. На нем можно видеть, что перед моментом времени  $t_3$  доля выручки, приходящаяся на первую ценовую группу, была почти в два раза больше, чем на вторую ценовую группу, что было связано с тем, что спрос на ОН первой ценовой группы был существенно выше. Однако после того, как спрос на объекты ценовой группы № 1 понизился, возросла значимость ценовой группы № 2, спрос на которую остался прежним.

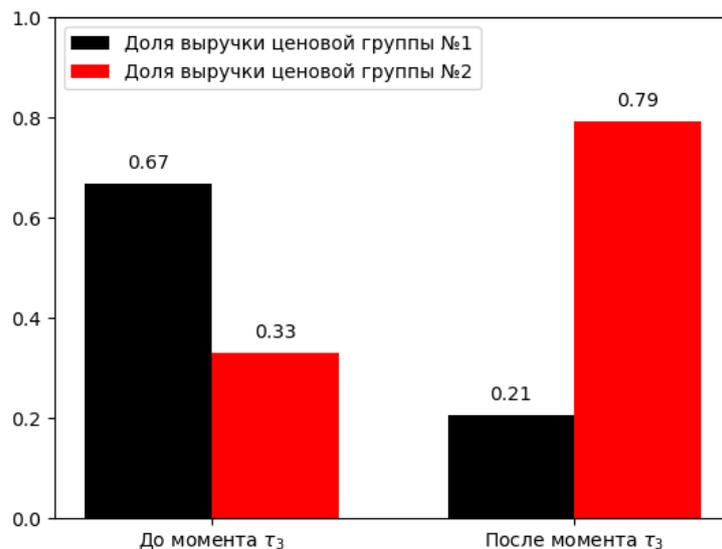


Рисунок 15 – Распределение выручки между ценовыми группами в виде диаграмм  
 Figure 15 – Revenue distribution between pricing groups

### Дальнейшие пути развития модели

На данный момент требуется, чтобы суммарные продажи и интегральная выручка была больше или равна целевых показателей по продажам и выручке. Однако, на практике нередко происходит ситуация, когда либо при сложившейся на рынке обстановке невозможно достичь полного выполнения планов, либо невыполнение ограничения не выходит за рамки некоторых разумных границ. Поэтому некоторым улучшением модели и повышением ее результативности мог бы стать учет «мягких ограничений», которые в отличие от рассматриваемых в работе, могут нарушаться, если это повышает итоговую выручку с учетом штрафа за нарушение ограничения.

Добавление в модель учета возможности бронирования объектов недвижимости сделало бы ценообразование более точным. Бронирования обеспечивают предварительный спрос и влияют на формирование цен: если определенный объем объектов забронирован, спрос и цена на оставшиеся могут корректироваться.

Включение в модель учета рассрочки и других альтернативных вариантов оплаты позволило бы еще более приблизить модель к реальности. При этом модель будет учитывать изменения денежного потока в условиях растянутого графика платежей и регулировать цены на оставшиеся объекты, исходя из ожидаемого поступления платежей. Использование такой модели создаст дополнительное преимущество на конкурентном рынке, особенно в периоды снижения покупательской способности.

## Заключение

В данной статье были рассмотрены модели динамического управления ценами, которые принимают в расчет несколько ценовых групп недвижимости. В работе была сформулирована и изучена базовая модель ценообразования в условиях наличия нескольких ценовых групп. Далее эта модель была модифицирована, что позволило учитывать меняющуюся во времени стоимость денег и рост стоимости недвижимости по мере строительной готовности. Были получены и доказаны теоретические результаты об общем виде ценовой политики как для базовой модели, так и для ее модификации.

Также, в работе был приведен алгоритм, позволяющий находить ценовую политику для базовой модели, а также алгоритм для определения цен в условиях переменной стоимости денег и роста стоимости ОН по мере строительной готовности. Представлена процедура распределения интегральных показателей по выручке между ценовыми группами объектов недвижимости. Предложенные подходы формируют гибкий метод для управления ценами на недвижимость, позволяя компании адаптировать стратегию в зависимости от спроса и экономических условий.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Fiig T., Le Guen R., Gauchet M. Dynamic pricing of airline offers. *Journal of Revenue and Pricing Management*. 2018;17(3):381–393. <https://doi.org/10.1057/s41272-018-0147-z>
2. Rust J., Cho S. Optimal Dynamic Hotel Pricing. EconPapers. URL: <https://econpapers.repec.org/paper/redsed018/179.htm> [Accessed 12th August 2024].
3. Bayoumi A.E.-M., Saleh M., Atiya A.F., Aziz H.A. Dynamic pricing for hotel revenue management using price multipliers. *Journal of Revenue and Pricing Management*. 2012;12(3):271–285. <https://doi.org/10.1057/rpm.2012.44>
4. Qian X., Ukkusuri S.V. Time-of-Day Pricing in Taxi Markets. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2017;18(6):1610–1622. <https://doi.org/10.1109/TITS.2016.2614621>
5. Riseth A.N. Dynamic pricing in retail with diffusion process demand. *IMA Journal of Management Mathematics*. 2019;30(3):323–344. <https://doi.org/10.1093/imaman/dpz003>
6. Kincaid W.M., Darling D.A. An inventory pricing problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1963;7(2):183–208. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(63\)90047-7](https://doi.org/10.1016/0022-247X(63)90047-7)
7. Gallego G., Van Ryzin G. Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons. *Management Science*. 1994;40(8):999–1020. <https://doi.org/10.1287/mnsc.40.8.999>
8. Feng Y., Gallego G. Optimal Starting Times for End-of-Season Sales and Optimal Stopping Times for Promotional Fares. *Management Science*. 1995;41(8):1371–1391. <https://doi.org/10.1287/mnsc.41.8.1371>
9. Bitran G.R., Mondschein S.V. Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing. *Management Science*. 1997;43(1):64–79. <https://doi.org/10.1287/mnsc.43.1.64>
10. Feng Y., Xiao B. A Continuous-Time Yield Management Model with Multiple Prices and Reversible Price Changes. *Management Science*. 2000;46(5):644–657. <https://doi.org/10.1287/mnsc.46.5.644.12050>
11. Besbes O., Maglaras C. Dynamic Pricing with Financial Milestones: Feedback-Form Policies. *Management Science*. 2012;58(9):1715–1731. <https://doi.org/10.1287/mnsc.1110.1513>

12. Razumovskiy L., Gerasimova M., Karenin N. Dynamic Pricing for Real Estate. arXiv. URL: <https://arxiv.org/abs/2408.12553> [Accessed 22nd August 2024].
13. Faruqui A., Sergici S. Household response to dynamic pricing of electricity: a survey of 15 experiments. *Journal of Regulatory Economics*. 2010;38(2):193–225. <https://doi.org/10.1007/s11149-010-9127-y>
14. Saharan S., Bawa S., Kumar N. Dynamic pricing techniques for Intelligent Transportation System in smart cities: A systematic review. *Computer Communications*. 2020;150:603–625. <https://doi.org/10.1016/j.comcom.2019.12.003>
15. McAfee R.P., Te Velde V. Dynamic Pricing in the Airline Industry. In: *Handbooks in Information Systems: Chapter 11*. 2006. pp. 527–567. [https://doi.org/10.1016/S1574-0145\(06\)01011-7](https://doi.org/10.1016/S1574-0145(06)01011-7)

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Разумовский Лев Григорьевич**, кандидат технических наук, президент ГК, Группа компаний «Рамакс», Москва, Российская Федерация.

*e-mail:* [lev.razumovskiy@ramax.com](mailto:lev.razumovskiy@ramax.com)

ORCID: [0009-0009-7857-3101](https://orcid.org/0009-0009-7857-3101)

**Lev G. Razumovskiy**, Candidate of Engineering Sciences, President, "Ramax Group", Moscow, the Russian Federation.

**Герасимова Мария Алексеевна**, кандидат физико-математических наук, руководитель Центра перспективных решений, Группа компаний «Рамакс», Москва, Российская Федерация.

*e-mail:* [mariya.gerasimova@ramax.com](mailto:mariya.gerasimova@ramax.com)

**Mariya A. Gerasimova**, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Head of R&D Center, "Ramax Group", Moscow, the Russian Federation.

**Каренин Николай Евгеньевич**, математик-программист, Группа компаний «Рамакс», Москва, Российская Федерация.

*e-mail:* [nikolay.karenin@ramax.com](mailto:nikolay.karenin@ramax.com)

ORCID: [0009-0000-1317-2512](https://orcid.org/0009-0000-1317-2512)

**Nikolay E. Karenin**, programming mathematician, "Ramax Group", Moscow, the Russian Federation.

**Сафро Михаил Владимирович**, кандидат физико-математических наук, математик-разработчик, Группа компаний «Рамакс», Москва, Российская Федерация.

*e-mail:* [msafro@ramax.com](mailto:msafro@ramax.com)

ORCID: [0009-0007-8758-1555](https://orcid.org/0009-0007-8758-1555)

**Mikhail V. Safro**, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, mathematical developer, "Ramax Group", Moscow, the Russian Federation.

*Статья поступила в редакцию 21.11.2024; одобрена после рецензирования 18.12.2024; принята к публикации 20.01.2025.*

*The article was submitted 21.11.2024; approved after reviewing 18.12.24; accepted for publication 20.01.2025.*