УДК 51-77
DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.008

# Динамическое ценообразование в недвижимости[1]

**Л.Г. Разумовский, М.А. Герасимова, Н.Е. Каренин**✉

*Группа компаний «Ramax», Москва, Российская Федерация*

***Резюме.*** В работе рассматривается математическая модель динамической корректировки цены на недвижимость. Характеристиками модели выступают конечное число объектов недвижимости, фиксированный горизонт продаж, наличие промежуточных планов по продажам и выручке. В построенной модели рассмотрен случай переменного общего спроса, а также добавлен учет меняющейся со временем стоимости денег и роста цены объекта недвижимости по мере его строительной готовности. В работе изучен общий вид ценовой политики и представлен алгоритм нахождения цены в случае переменного общего спроса. Аналогичные построения проведены для модели, учитывающей стоимость денег и рост стоимости недвижимости по мере строительной готовности. Также рассмотрен случай линейной функции эластичности как базового, но в то же время наиболее распространенного случая ее практического использования. Приведены строгие математические доказательства полученных в работе результатов, а также выполнены численные симуляции с использованием реальных данных недвижимости в конкретном городе за 3,5 года с целью сравнения различных подходов к построению ценовой политики. Полученные результаты могут быть использованы для эффективного управления ценами на недвижимость.

***Ключевые слова:*** динамическое ценообразование, недвижимость, корректировка цен, переменный общий спрос, стоимость денег, рост цены, стадии строительства.

***Для цитирования:*** Разумовский Л.Г., Герасимова М.А., Каренин Н.Е. Динамическое ценообразование в недвижимости. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2025;13(1). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1761 DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.008

# Dynamic pricing for real estate[2]

**L.G. Razumovskiy, M.A. Gerasimova, N.E. Karenin**✉

*"Ramax Group", Moskow, the Russian Federation*

***Abstract.*** The paper considers a mathematical model for dynamic price adjustment in real estate. The model is characterized by a finite number of real estate objects, a fixed sales horizon, and the presence of intermediate goals for sales and revenue. The model developed in this work addresses the case of variable total demand, incorporating the time value of money and the increase in real estate objects value as construction progresses. The general structure of pricing policy is studied, and an algorithm for determining prices under variable total demand is presented. Similar constructions are carried out for a model that accounts for the time value of money and the rising property value during construction. The case of a linear elasticity function is also examined as a basic but widely used practical scenario. Rigorous mathematical proofs of the results are provided, along with numerical simulations based on real estate data from a specific city over 3.5 years to compare different approaches to pricing policy formulation. The obtained results can be applied to effectively manage real estate pricing.

[1] Статья была опубликована в виде препринта: Разумовский Л.Г., Герасимова М.А., Каренин Н.Е. 2024. Динамическое ценообразование в недвижимости. arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.12553
[2] The article was previously published as a preprint: Razumovskiy L., Gerasimova M., Karenin N. 2024. Dynamic Pricing for Real Estate. arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2408.12553

***Keywords:*** dynamic pricing, real estate, price adjustment, variable total demand, cost of money, price increase, stages of construction.

***For citation*:** Razumovskiy L.G., Gerasimova M.A., Karenin N.E. Dynamic pricing for real estate. *Modeling, Optimization and Information Technology.* 2025;13(1). (In Russ.) URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/pdf?id=1761 DOI: 10.26102/2310-6018/2025.48.1.008

## Введение

Тема динамического ценообразования в последние годы привлекает значительное внимание различных научных сообществ. В широком смысле динамическое ценообразование относится к процессу определения оптимальных отпускных цен на продукты, товары или услуги в условиях, когда технологии и инфраструктура ценообразования позволяют часто и экономически эффективно корректировать цены. Это особенно актуально для компаний, работающих онлайн или имеющих оффлайн магазины, оснащенные такими технологиями, как электронные дисплеи цен, которые позволяют регулярно обновлять цены. Благодаря развитию цифровых технологий, которые позволяют гибко реагировать на изменения рыночной ситуации, появилась возможность регулярно корректировать цены с минимальными усилиями и затратами.

Исследование и применение методов динамического ценообразования распространились на различные отрасли бизнеса, постоянно демонстрируя значительное увеличение общей выручки. Важнейшим компонентом успеха этих методов является наличие обширных данных о продажах, что часто является естественным побочным продуктом онлайн-торговли и результатом интеграции цифровых технологий в розничные операции.

Данные о продажах, собранные с помощью цифровых технологий, несут ценную информацию о поведении клиентов, в частности, о взаимосвязи отпускных цен с вероятностью приобретения объекта недвижимости (ОН) за данную отпускную цену.

Научные исследования методов анализа данных о продажах, извлечения информации о том, как спрос меняется в зависимости от цены, и разработка стратегий оптимизации общей выручки представляют собой увлекательную и крайне актуальную теоретическую область. Кроме того, овладение эффективными методами динамического ценообразования дает значительное конкурентное преимущество, что делает эту тему крайне важной для участников рынка.

По теме динамического ценообразования существует довольно обширный объем литературы, что вызвано как теоретической значимостью этих исследований, так и их практическим применением. Свой вклад в эту сферу внесли исследователи из разных областей, в том числе менеджмента, прикладной математики, математического моделирования, поведенческой экономики.

Работы по динамическому ценообразованию приводятся и разбираются в ряде обзоров, проведенных исследователями из различных областей науки [1–5]. К этой группе авторов также относятся: Битран и Калдентей [6], Эльмаграби и Кескиноджак [7], Хечинг и Люнг [8], Таллури и ван Ризин [9], Генш и др. [10], Рао [11], Ченаваз и др. [12], Декснит и Лидека [13], Озера и Филлипс [14] и Филлипс [15].

Некоторые обзоры более узконаправлены и фокусируются на статьях, посвященных моделям динамического ценообразования в конкретных отраслях: электроэнергетика [16–18], наземный транспорт [19], воздушный транспорт [20] и другие.

В настоящей работе рассматривается сценарий с ограниченным числом объектов недвижимости и фиксированным горизонтом продаж. Одной из первых публикаций, посвященных этому сценарию, является работа Кинкейда и Дарлинга [21]. Совсем недавно Гальего и ван Ризин также исследовали подобный сценарий в работе [22].

Модель, описанная в [22], послужила отправной точкой для дальнейших исследований. Другие авторы расширяли и модифицировали ее, например, путем введения ограничений на число изменений цены или допустимых вариаций цен [23–25], а также вводя непостоянную функцию общего спроса [26, 27]. Были также работы, рассматривающие несколько торговых точек, работающих параллельно [28], или нескольких продуктов, продаваемых параллельно [29, 30]. В работе [31] Бесбес и Магларас дополнительно рассмотрели промежуточные ограничения на продажи и выручку, которые типичны для рынка недвижимости.

Целью исследования является построение математической модели управления ценами на недвижимость, учитывающей меняющийся во времени общий спрос, переменную стоимость денег и стоимость объектов недвижимости по мере строительной готовности.

Для достижения цели исследования необходимо решить следующие задачи:

− предоставить математическую формализацию построения ценовой политики, максимизирующей итоговую выручку при продаже всех имеющихся в наличии ОН;

− обобщить результат статьи [31] на случай переменного общего спроса, предложив алгоритм нахождения ценовой политики и доказав ее оптимальность;

− модифицировать модель для случая учета меняющейся со временем стоимости денег и стоимости ОН по мере строительной готовности, а также привести алгоритм определения ценовой политики и доказательства оптимальности;

− провести расчет ценовой политики построенной ранее модели для случая линейной функции эластичности;

− провести численные эксперименты, сравнив два подхода к построению ценовой политики (предложенный и обоснованный в статье и альтернативный) для всех рассмотренных ранее модификаций модели и построив для них графики.

## Базовая модель

Чтобы приступить к исследованию задачи оптимизации выручки при продаже ОН, сначала рассмотрим более простую модель, изученную в [31]. Она будет дополнена и улучшена в разделе «Учет стоимости денег и роста цены ОН по мере его строительной готовности».

Рассмотрим процесс продаж, который начинается в момент времени $t = 0$ и должен завершиться в момент времени $t = T$. Обозначим через $S$ общее количество объектов недвижимости, которые должны быть проданы за этот период.

Предполагаем, что общий спрос, являющийся макропараметром, представляет собой непрерывную функцию $\Lambda(t)$ от времени $t$. Функцию общего спроса можно интерпретировать как общий поток потенциальных покупателей.

Также предполагаем, что все объекты недвижимости однородны. Это означает, что цена $p(t)$ одинакова для каждого объекта недвижимости.

Введем функцию $v(p)$, которая представляет собой долю тех клиентов от общего потока $\Lambda(t)$, которые намерены приобрести объект недвижимости по цене $p$. Величину $v(p)$ можно рассматривать как вероятность того, что потенциальный покупатель приобретет ОН по цене $p$. Пусть $p^* \coloneqq argmax\big(pv(p)\big)$ – цена, при которой выручка максимальна, и пусть $\overline{p} = \inf\{p: v(p) = 0\} \in (p^*, +\infty]$. Накладываем следующие ограничения на $v(p)$:

1. $v(p)$ – кусочно-дифференцируемая функция.
2. $v'(p) < 0$ для почти всех $p \in (p^*, \overline{p})$.
3. $\frac{v(p)}{v'(p)} + p$ – невозрастающая функция на $(p^*, \overline{p})$.

**Замечание 1.** Пусть $v''(p)$ существует и удовлетворяет условию $v''(p) \leq 0$ почти всюду на $(p^*, p)$, тогда второе условие автоматически выполнено.

$$\left(\frac{v(p)}{v'(p)} + p\right)' = 2 - \frac{v(p)v''(p)}{\left(v'(p)\right)^2} > 0.$$

В данной модели темп продаж и темп накопления выручки в момент времени $t$ могут быть, соответственно, записаны как:

$$v\big(p(t)\big)\Lambda(t), \tag{1}$$

$$p(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t). \tag{2}$$

Суммарное число проданных кв. м $S(t_1)$ и суммарную выручку $R(t_1)$ в момент времени $t_1$ можно представить следующим образом:

$$S(t_1) = S_{p(\cdot)}(t_1) = \int_0^{t_1} v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt, \tag{3}$$

$$R(t_1) = R_{p(\cdot)}(t_1) = \int_0^{t_1} p(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt, \tag{4}$$

где нижним индексом в некоторых случаях будет явно указываться ценовая политика $p(t)$. Удобно ввести следующие обозначения: $S(t_1, t_2) \coloneqq S(t_2) - S(t_1)$ и $R(t_1, t_2) \coloneqq R(t_2) - R(t_1)$.

Цель модели – определить ценовую политику $p_{opt}(t)$, которая обеспечивает максимально возможную выручку в момент времени $T$ с учетом ограничений, которые необходимо выполнить в процессе продаж. Рассматриваются два типа ограничений: целевые показатели продаж и целевые показатели выручки, которые устанавливают нижнюю границу для продаж и выручки, полученных к определенному моменту. Без потери общности будем считать, что эти наборы ограничений заданы в одни и те же моменты времени $\{0 = \tau\_0 < \tau\_1 < \ldots < \tau\_k = T\}$. Указанные ограничения могут быть записаны следующим образом:

$$S(\tau_i) = \int_0^{\tau_i} v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt \geq S_i, \tag{5}$$

$$R(\tau_i) = \int_0^{\tau_i} p(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt \geq R_i, \tag{6}$$

где $S_i$ и $R_i$ – минимальные значения продаж и выручки, которые необходимо достичь к моменту времени $\tau_i$. В этих обозначениях $S_0 = 0$ и $R_0 = 0$, т. е. ограничения при $\tau_0 = 0$ тривиальны. Также удобно предположить, что последнее ограничение на продажи совпадает с общим количеством имеющихся в наличии ОН $S_k = S$. Теперь сформулируем задачу:

$$S(T) = \int_0^{T} v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt = S, \tag{7}$$

$$R(T) = \int_0^{T} p(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt \rightarrow max \tag{8}$$

при условиях (5) и (6).

Сделаем следующие допущения. Во-первых, если число имеющихся ОН не ограничено, то все ограничения будут выполнены, если использовать ценовую политику $p(t) = p^*$:

$$\int_0^{\tau_i} v(p^*)\Lambda(t)dt \geq S_i,$$

$$\int_0^{\tau_i} p^*v(p^*)\Lambda(t)dt \geq R_i.$$

Во-вторых, существует ценовая политика $p(t)$, которая удовлетворяет всем ограничениям при условии, что имеется $S$ объектов недвижимости. Второе предположение означает, что решение задачи существует, а первое предположение, по сути, говорит нам о том, что никакие ограничения на продажи не являются слишком жесткими.

## Базовый алгоритм

В [31] показано, что при $\Lambda(t) = \Lambda = const$ оптимальная ценовая политика $p_{opt}(t)$ является кусочно-постоянной функцией, которая может изменяться только в моменты времени $\tau_i$, притом только в том случае, если соответствующее ограничение выполняется строго. Подробно опишем, как построить представленную оптимальную ценовую политику.

Процесс вычисления $p_{opt}(t)$ итеративный. На первом шаге мы начинаем с $\tau_0 = 0$. В начале каждого шага $p_{opt}(t)$ известна вплоть до некоторого момента времени $\tau_i$. Находим такую цену $p_{\tau_i}$, чтобы она была максимальной и были выполнены следующие условия, при том, что $p_{opt}(t) = p_{\tau_i}$ на отрезке $[\tau_i, T]$:

1) все ограничения выполнены;
2) хотя бы одно ограничение выполняется строго (мы будем называть его *самым жестким ограничением*).

Получаем, что $p_{opt}(t) = p_{\tau_i}$ на $\left[\tau_i, \tau_j\right)$, где $\tau_j$ – момент самого жесткого ограничения. Далее повторяем процедуру, начиная с $\tau_j$, до тех пор, пока $\tau_j < T$.

Опишем процесс нахождения самого жесткого ограничения по истечении времени $\tau_i$ более формально. Пусть $S(\tau_i)$ и $R(\tau_i)$ – это суммарные продажи и выручка к моменту $\tau_i$ соответственно. Для ограничения на продажи $S_k$ в момент времени $\tau_k$ мы находим цену $p_{\tau_i,\tau_k}^{s,S_k-S(\tau_k)}$ такую, что

$$v\left(p_{\tau_i,\tau_k}^{s,S_k-S(\tau_i)}\right) \cdot \frac{1}{\tau_k-\tau_i}\int_{\tau_i}^{\tau_k} \Lambda(t)dt = \frac{S_k-S(\tau_i)}{\tau_k-\tau_i}, \tag{9}$$

то есть цену, которая строго удовлетворяет этому ограничению. Для ограничения на выручку $R_k$ в момент времени $\tau_k$ мы аналогично находим цену $p_{\tau_i,\tau_k}^{r,R_k-R(\tau_k)} > p^*$ такую, что

$$p_{\tau_i,\tau_k}^{r,R_k-R(\tau_i)} \cdot v\left(p_{\tau_i,\tau_k}^{r,R_k-R(\tau_i)}\right) \cdot \frac{1}{\tau_k-\tau_i}\int_{\tau_i}^{\tau_k} \Lambda(t)dt = \frac{R_k-R(\tau_i)}{\tau_k-\tau_i}. \tag{10}$$

Значение оптимальной цены можно найти по формуле:

$$p_{\tau_i} = \min_{k>i}\{p_{\tau_i,\tau_k}^{s,S_k-S(\tau_i)}, p_{\tau_i,\tau_k}^{r,R_k-R(\tau_i)}\}. \tag{11}$$

Заметим, что последний сомножитель в левой части формул (9) и (10) – это ничто иное, как среднее значение $\Lambda(t)$ на интервале $[\tau_i, \tau_k]$. В случае $\Lambda(t) = \Lambda = const$ – это среднее значение также равно $\Lambda$. Было решено представить формулы именно в таком виде, чтобы их можно было легко применить и к случаю непостоянной $\Lambda(t)$. Довольно легко можно определить самое жесткое ограничение на продажи и самое жесткое ограничение на выручку. Индексы этих ограничений можно записать в виде:

$$j_S = \arg\max_{k>i} \frac{S_k - S(\tau_i)}{\tau_k - \tau_i}$$

и

$$j_R = \arg\max_{k>i} \frac{R_k - R(\tau_i)}{\tau_k - \tau_i}.$$

Алгоритм нахождения самого жесткого ограничения проиллюстрирован на Рисунках 1–4.

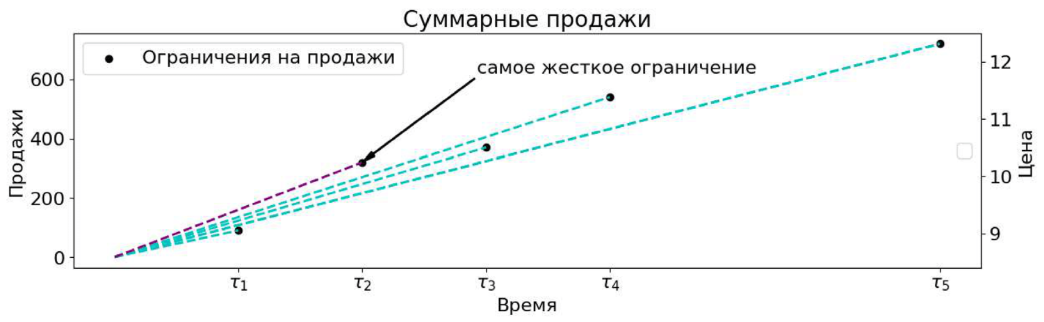


Рисунок 1 – Нахождение первого самого жесткого ограничения
Figure 1 – Finding the first most stringent constraint

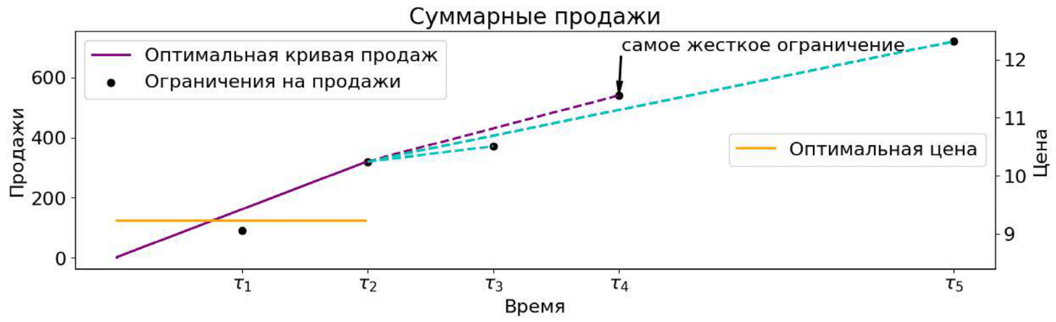


Рисунок 2 – Нахождение второго самого жесткого ограничения
Figure 2 – Finding the second most stringent constraint

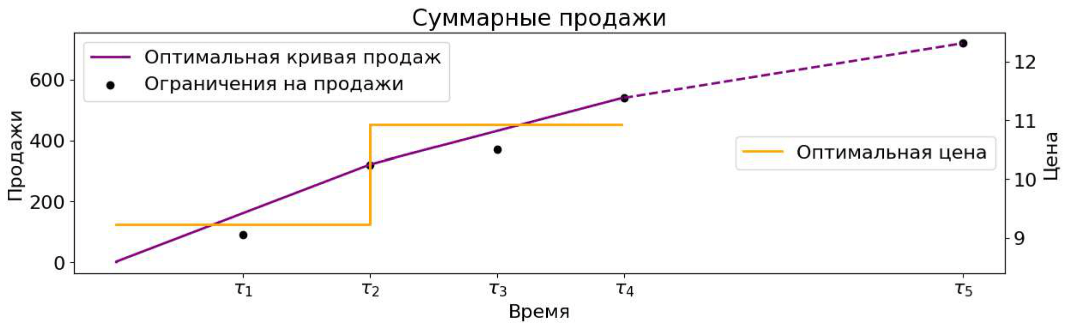


Рисунок 3 – Последнее ограничение на продажи
Figure 3 – The last sales constraint

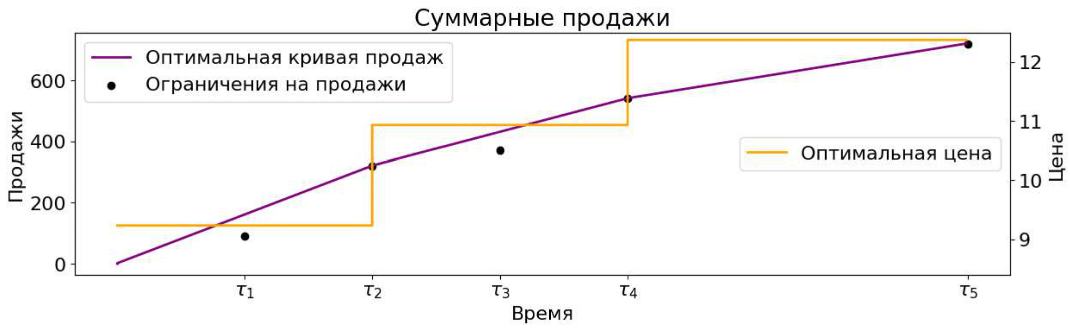


Рисунок 4 – Оптимальная цена и суммарные продажи
Figure 4 – The optimal pricing policy and cumulative sales

## Переменный общий спрос

В разделе «Базовая модель» рассмотрена модель, описанная в [31], которая предполагает, что общий спрос $\Lambda(t)$ постоянен. В этом разделе расширим эту модель, обобщая ее на случай кусочно-непрерывной функции $\Lambda(t)$, и покажем, что по формулам (9)–(11), действительно, строится оптимальная ценовая политика, в том числе и в случае непостоянного общего спроса.

**Теорема 1.** *Пусть общий спрос $\Lambda(t)$ – кусочно-непрерывная функция, тогда оптимальная ценовая политика $p_{opt}(t)$ строится исходя из базового алгоритма.*

Прежде чем приступить к доказательству, отметим, что представленный выше результат – довольно неожиданный: оптимальная цена не зависит от локальных изменений $\Lambda(t)$ и зависит только от некоторых интегральных характеристик $\Lambda(t)$, которые будут указаны далее.

Сначала докажем следующую лемму.

**Лемма 1.** *Предположим, что нет никаких ограничений, кроме требования продать все ОН к моменту времени T. Тогда $p_{opt}(t)$ является постоянной величиной.*

*Доказательство.* Запишем математическую формулировку условия задачи:

$$\int_0^T p(t)\Lambda(t)v\big(p(t)\big)dt \to \max,$$

$$\int_0^T \Lambda(t)v\big(p(t)\big)dt = S.$$

Запишем лагранжиан

$$L(p,q) = \int_0^T p(t)\Lambda(t)v\big(p(t)\big)dt + q\cdot\left[\int_0^T \Lambda(t)v\big(p(t)\big)dt - S\right],$$

где $q$ – множитель Лагранжа. Запишем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial p} = p(t)\Lambda(t)v'\big(p(t)\big) + \Lambda(t)v\big(p(t)\big) + q\cdot\Lambda(t)v'\big(p(t)\big) = 0,$$

то есть,

$$\frac{v(p)}{v'(p)} + p = -q.$$

Заметим, что левая часть – монотонная функция от $p$, поэтому $p(t)$ является постоянной величиной. Что и требовалось доказать.

**Следствие 1.** *$p_{opt}(t)$ постоянна на промежутке между любыми двумя ограничениями.*

*Доказательство.* Оптимальная цена на этом интервале также максимизирует выручку при заданном числе проданных кв. м недвижимости. Это происходит независимо от того, какие ограничения (на продажи или на выручку) находятся на концах интервала. С точностью до сдвига во времени имеем задачу, которая рассматривалась в лемме 1. Таким образом, оптимальная цена постоянна.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим цену $p(t)$, описанную в разделе «Базовый алгоритм», и предположим, что она отличается от $p_{opt}(t)$. Обе функции $p(t)$ и $p_{opt}(t)$ не меняют своих значений в промежутках между ограничениями. Рассмотрим $\tau_i = inf\{t\colon p_{opt}(t) \neq p(t)\}$, пусть $\tau_j > \tau_i$ – момент самого жесткого ограничения после $\tau_i$, а $p_0$ – значение $p(t)$ на интервале $\left[\tau_i, \tau_j\right)$.

Сначала рассмотрим случай

$$S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i,\tau_j) < S_{p_0}(\tau_i,\tau_j). \quad (12)$$

В этом случае самым жестким ограничением в момент времени $\tau_j$ является ограничение на выручку. Согласно лемме 1, оптимальная выручка на $[\tau_i,\tau_j)$ при условии, что количество проданных кв. м ОН равно $S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i,\tau_j)$, определяется постоянной ценой $p_1$. Обратим внимание, что, согласно (12), выполнено неравенство $p_1 > p_0 > p^*$. Отсюда следует, что

$$R_{p_0}(\tau_i,\tau_j) > R_{p_1}(\tau_i,\tau_j) \geq R_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i,\tau_j) \geq R_j - R_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i) = R_{p_0}(\tau_i,\tau_j).$$

Получили противоречие.

Остается разобрать случай

$$S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i,\tau_j) \geq S_{p_0}(\tau_i,\tau_j). \quad (13)$$

По определению самого жесткого ограничения

$$S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i,T) = S - S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i) < S_{p_0}(\tau_i,T),$$

следовательно, поскольку $S(\tau_i,t)$ непрерывна, то существует $t_1 \in (\tau_i,T]$ такое, что

$$S_{p_0}(\tau_i,t_1) = S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i,t_1).$$

Рассмотрим ценовую политику

$$p(t) = \begin{cases} p_0, \text{если } t \in [\tau_i,t_1), \\ p_{opt(t)}, \text{иначе.} \end{cases}$$

При такой цене выполнены все ограничения до $t_1$. Утверждение леммы 1 состоит в том, что ценовая политика $p_0$ дает наибольшую выручку и те же продажи на $[\tau_i,t_1)$, что и $p_{opt}(t)$, поэтому при ценовой политике $p(t)$ все ограничения выполняются также и после $t_1$ и выручка максимальна. Последнее снова приводит к противоречию. Следовательно, изначальное предположение было неверным, и поэтому $p_{opt}(t) = p(t)$.

## Учет стоимости денег и роста цены ОН по мере его строительной готовности

Стоимость денег – это фундаментальный финансовый принцип, который утверждает, что сумма денег сегодня имеет большую ценность, чем в будущем из-за ее потенциала приносить доход со временем и из-за инфляции. Иными словами, деньги, имеющиеся сейчас, ценнее такой же суммы, полученной в будущем, потому что их можно инвестировать и потенциально увеличить их стоимость.

Функция $\varphi(t)$ определяет объективную ценность единицы денег в момент времени $t$, так называемую (временную) стоимость денег. В этом разделе мы дополним базовую модель учетом стоимости денег.

Функция стоимости денег вносит изменения в способ расчета выручки. Вместо того, чтобы рассчитывать выручку как интеграл от темпа изменения выручки, нужно вычислить и максимизировать интеграл темпа накопления выручки, помноженной на стоимость денег. Для удобства будем использовать те же обозначения, которые использовали ранее для расчета выручки:

$$R(t_1) = \int_0^{t_1} \varphi(t)p(t)v(p(t))\Lambda(t)dt. \quad (14)$$

Рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом:

$$R(T) \to max, \quad (15)$$

$$S(T) = S, \tag{16}$$

$$R(\tau_i) \geq R_i, \tag{17}$$

$$S(\tau_i) \geq S_i. \tag{18}$$

Заметим, что здесь $R_i$ – это наименьшее значение суммарной выручки, которой необходимо достичь к моменту времени $\tau_i$.

## Изменение цены ОН по мере его строительной готовности

Еще одной отличительной чертой рынка недвижимости является то, что продажи во многих случаях начинаются задолго до завершения строительства. Покупатели нередко приобретают недвижимость за год или два до того, как она будет пригодна для заселения. Такая практика по своей сути сопряжена с определенными рисками и может быть неудобной для покупателей. В результате они, как правило, готовы платить больше за объекты, которые находятся на более поздней стадии строительства, чем за объекты, находящиеся на более ранних стадиях. Математически это можно описать, используя монотонно возрастающую функцию $\kappa(t)$, которая показывает, во сколько раз больше клиент готов заплатить за тот же объект недвижимости в момент времени $t$ по сравнению с тем, сколько он был готов заплатить за него в начале строительства при аналогичных обстоятельствах.

Чтобы правильно учесть $\kappa(t)$, мы должны рассмотреть $v(p,t)$ – меняющуюся со временем вероятность приобретения ОН. Функция $\kappa(t)$ влияет на то, как именно изменяется $v(p,t)$:

$$v(\kappa(t)p, t) = v(p, 0). \tag{19}$$

Удобно обозначить ценовую политику через $\hat{p}(t)$ и использовать вспомогательную величину $p(t) = \frac{\hat{p}(t)}{\kappa(t)}$ во всех формулах. Кроме того, будем обозначать $v(p)$ вместо $v(p, 0)$.

Перепишем формулы для темпа продаж и темпа получения выручки следующим образом:

$$v(\hat{p}(t), t)\Lambda(t) = v(\kappa(t)p(t), t)\Lambda(t) = v(p(t), 0)\Lambda(t) = v\big(p(t)\big)\Lambda(t), \tag{20}$$

$$\varphi(t)\hat{p}(t)v(\hat{p}(t), t)\Lambda(t) = \varphi(t)\kappa(t)p(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t) = \zeta(t)p(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t), \tag{21}$$

где $\zeta(t) := \varphi(t)\kappa(t)$ – обобщенная функция стоимости денег. Получаем ту же задачу оптимизации, что и раньше, но с $\zeta(t)$ вместо $\varphi(t)$ в формуле (14). Не теряя общности, будем записывать решение задачи, учитывающей обобщенную стоимость денег, в терминах предыдущей задачи, т. е. обозначать $\varphi(t)$ вместо $\zeta(t)$. Но будем иметь в виду, что полученное решение будет применимо и к этому, более общему, случаю.

## Максимизация выручки при наличии одного ограничения по продажам

Сначала рассмотрим задачу максимизации выручки на интервале $[0, T]$ при отсутствии ограничений на выручку и с единственным ограничением на продажи: все ОН должны быть проданы к моменту времени $T$. Имеет место следующая формула:

$$p_{\mathrm{opt}}(t) = \arg\max_{p(\cdot)} \int_0^T \varphi(t)p(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt \tag{22}$$

при ограничениях на продажи на отрезке $[0, T]$:

$$\int_0^T v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt = S. \tag{23}$$

Для того, чтобы найти необходимые условия максимума, запишем лагранжиан системы:

$$L(p,q)=\int_0^T \varphi(t)p(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt+q\left[\int_0^T v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt-S\right], \tag{24}$$

где $q$ – множитель Лагранжа. Напишем уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial p}=\varphi(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t)+\varphi(t)p(t)v'\big(p(t)\big)\Lambda(t)+qv'\big(p(t)\big)\Lambda(t)=0, \tag{25}$$

поскольку $v'\big(p(t)\big)\neq 0$, его можно переписать в виде

$$\frac{v\big(p(t)\big)}{v'\big(p(t)\big)}+p(t)=-\frac{q}{\varphi(t)}\cdot \tag{26}$$

Решение уравнения (26) при произвольной эластичности $v(p)$ не может быть найдено аналитически, однако его все-таки можно получить для некоторых конкретных функций $v(p)$. Важно отметить, что при непостоянной $\varphi(t)$ правая часть (26) также непостоянна, поэтому оптимальная ценовая политика $p_{opt}(t)$ больше не будет кусочно-постоянной.

### Случай линейной эластичности $v(p)$

Нас больше всего будет интересовать линейная эластичность $v(p)$:

$$v(p)=\begin{cases}1,\text{если } a-b\cdot p>1,\\ 0,\text{если } a-b\cdot p<0,\\ a-b\cdot p,\text{иначе.}\end{cases}$$

Несложными вычислениями можно получить, что в этой модели $v(p^*)=1$, если $a\geq 2$, и $v(p^*)<1$ в противном случае. Поскольку практически невозможно одновременно устанавливать максимальную цену и занимать весь доступный рынок, рассмотрим только случай $a<2$. Заметим, что в этом случае $p^*=\frac{a}{2b}$ и $v(p)=a-bp$ на $[p^*,\overline{p}]$, поэтому мы можем использовать $a-bp$ вместо $v(p)$.

Из условия (26) вытекает, что

$$\frac{a-b\cdot p(t)}{-b}+p(t)=-\frac{q}{\varphi(t)}, \tag{28}$$

или

$$p(t)=\frac{1}{2}\left[\frac{a}{b}-\frac{q}{\varphi(t)}\right]. \tag{29}$$

Обозначим функцию $p(t)$, заданную по этой формуле для $q=q_0$, через $p_{q_0}(t)$. Важно отметить, что рассматривается только $q\leq 0$, поскольку $p(t)\geq p^*$.

Найдем значение эластичности при $p=p(t)$:

$$v\big(p(t)\big)=a-b\cdot p(t)=\frac{1}{2}\left[a+\frac{q\cdot b}{\varphi(t)}\right]. \tag{30}$$

Из условия (23) следует, что

$$aK(0,T)+qbI(0,T)=2S,$$

где $I(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\Lambda(t)dt}{\varphi(t)}$ и $K(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\Lambda(t)dt$.

Следовательно,

$$q=q_{0,T}^{s,S}=\frac{2S-aK(0,T)}{bI(0,T)}. \tag{31}$$

В формуле выше индексы указывают на то, что $q_{0,T}^{s,S}$ соответствует суммарному количеству проданных кв. м недвижимости $S$ на промежутке $[0, T]$.

На Рисунке 5 для случая постоянного общего спроса, одного ограничения на продажи в момент времени $T = 1000$ и линейно убывающей функции $\varphi(t)$ наглядно представлено сравнение двух функций цены. Одна из них (желтая кривая) построена алгоритмом, который не берет в расчет стоимость денег и устанавливает цену постоянной на всем интервале продаж, поскольку в данном случае нет никаких влияющих на ценообразование факторов кроме ограничения на конечные продажи. Другая функция цены (фиолетовая кривая) установлена алгоритмом, который учитывает убывающую со временем стоимость денег. По мере убывания стоимости денег растет цена, так как необходимо равномерно продавать кв. м недвижимости, компенсировать все меньшую стоимость денег и обеспечить выполнение ограничения в конце периода продаж.

На Рисунке 6 изображены кривые темпов продаж для ценовой политики без учета и с учетом стоимости денег, соответственно. Напомним, что темп продаж характеризует быстроту реализации кв. м. недвижимости, т. е. чем выше темп продаж, тем больше квартир продается в единицу времени и тем скорее число имеющихся в наличии кв. м недвижимости закончится.

Если алгоритм ценообразования не учитывает стоимость денег, то в таком случае темп продаж представляет собой постоянную величину на всем промежутке $[0, T]$ (желтая кривая). Это обусловлено тем, что при ограничениях только на конечные продажи и отсутствии учета стоимости денег алгоритм рассчитывает цену таким образом, чтобы за равные промежутки времени продавалось одно и то же число кв. м недвижимости. Тем самым, в данном случае постоянство темпа продаж отражает тот факт, что данный алгоритм устанавливает такую (постоянную) цену, при которой происходят равномерные продажи ОН на всем отрезке $[0, T]$.

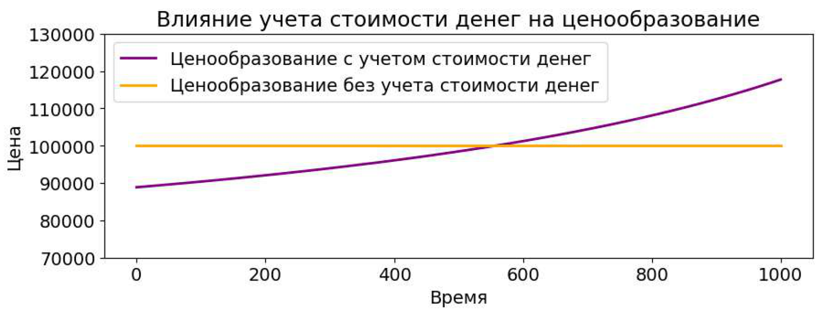


Рисунок 5 – Сравнение двух ценовых политик
Figure 5 – Comparison of the two pricing policies

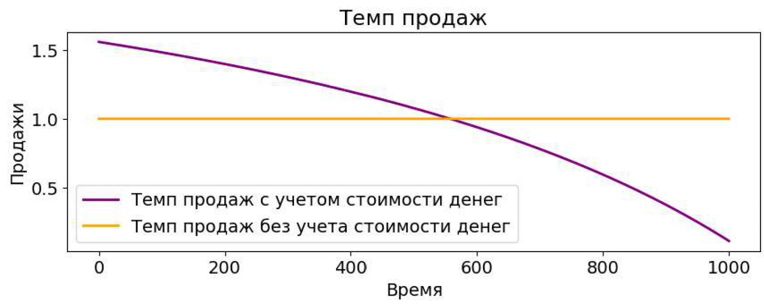


Рисунок 6 – Сравнение темпов продаж
Figure 6 – Comparison of sales rates

Напротив, в случае, когда алгоритм учитывает стоимость денег (фиолетовая кривая), темп продаж убывает со временем, поскольку в данном случае выгоднее совершать продажи на ранней стадии, когда стоимость денег более высокая. Действительно, вначале установленная алгоритмом оптимальная цена ниже, чем на конце интервала, потому и ОН реализуются быстрее, отчего и темп продаж сначала высокий. Однако, затем по мере убывания стоимости денег и в связи с необходимостью выполнять ограничение на конечные продажи, повышается цена, что приводит к падению спроса и что, в свою очередь, уже приводит к уменьшению числа продаваемых ОН в единицу времени.

## Минимизация продаж при ограничениях на выручку

Рассмотрим оптимизационную задачу, двойственную описанной в разделе «Максимизация выручки при наличии одного ограничения по продажам», т. е. задачу минимизации продаж при заданной суммарной выручке $R$ в конечный момент времени $T$. Рассуждения, аналогичные доказательству следствия 1, говорят о том, что оптимальная ценовая политика для этой задачи также удовлетворяет (26). Единственная разница заключается в том, что для вычисления константы $q$ необходимо использовать

$$\int_0^T \varphi(t)p(t)v\big(p(t)\big)\Lambda(t)dt = R.$$

Если $v(p)$ линейна, то можем воспользоваться

$$p(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{b} - \frac{q}{\varphi(t)}\right],$$

$$v\big(p(t)\big) = \frac{1}{2}\left[a + \frac{q \cdot b}{\varphi(t)}\right]$$

и получить

$$\frac{a^2}{b}J(0,T) - q^2 bI(0,T) = 4R,$$

где $J(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \Lambda(t)\varphi(t)dt$. Так как $q < 0$, мы можем заключить, что

$$q = q_{0,T}^{r,R} = -\sqrt{\frac{a^2 J(0,T) - 4Rb}{b^2 I(0,T)}}. \tag{32}$$

В формуле выше индексы указывают на то, что $q_{0,T}^{r,R}$ соответствует суммарной выручке $R$ на промежутке $[0, T]$.

## Оптимальная ценовая политика при учете стоимости денег для случая линейной эластичности

Оптимальную ценовую политику $p_{opt}(t)$ с учетом стоимости денег $\varphi(t)$ можно построить аналогично той, что уже построена для более простой модели.

Обратим внимание на очень важное свойство $p_q(t)$. Согласно определению (29), $p_q(t)$ – это монотонно убывающая функция от $q$ для любого фиксированного $t$. Это означает, что минимальная цена соответствует максимальному значению $q$ и наоборот.

Процесс построения $p(t)$ является итеративным. На первом шаге начинаем с $\tau_0 = 0$. В начале каждого шага нам известна функция $p(t)$ до некоторого $\tau_i$. Находим максимальное значение $q$ из значений, вычисленных с использованием (31) и (32) по формуле:

$$q_{\tau_i} = \max_{j>i}\left\{q_{\tau_i,\tau_j}^{s,S_j-S_{p(\cdot)}(\tau_i)}, q_{\tau_i,\tau_j}^{r,R_j-R_{p(\cdot)}(\tau_i)}\right\} \quad (33)$$

и определяем самое жесткое ограничение – ограничение, соответствующее $q_{\tau_i}$. Если самое жесткое ограничение задано в момент времени $\tau_j$, определяем $p(t) = p_{q_{\tau_i}}(t)$ на $[\tau_i, \tau_j)$ и переходим к следующему шагу.

**Теорема 2.** *Оптимальная ценовая политика $p_{opt}(t)$ может быть найдена с помощью описанного выше алгоритма.*

Доказательство почти в точности совпадает с доказательством теоремы 1.

*Доказательство.* Рассмотрим ценовую политику $\overline{p}(t)$, приведенную выше, и предположим, что она отличается от $p_{opt}(t)$.

Для этих функций цены верна формула (29) на интервалах между ограничениями. Рассмотрим $\tau_i = \inf\{t: p_{opt}(t) \neq \overline{p}(t)\}$, пусть $\tau_j > \tau_i$ – момент, в который задано самое жесткое ограничение после $\tau_i$, а $q_0$ – соответствующее значение $q$ для $\overline{p}(t)$ на интервале $[\tau_i, \tau_j)$.

Вначале рассмотрим случай

$$S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i, \tau_j) < S_{p_{q_0}(\cdot)}(\tau_i, \tau_j). \quad (34)$$

В этом случае самым жестким ограничением в момент времени $\tau_j$ является ограничение по выручке. Согласно результатам раздела «Максимизация выручки при наличии одного ограничения по продажам», оптимальная выручка на интервале $[\tau_i, \tau_j)$, при условии, что число проданных кв. м равно $S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i, \tau_j)$, определяется по формуле (29) с константой $q = q_1$. Заметим, что, согласно (34), выполняется неравенство $p_{q_1}(t) > p_{q_0}(t) > p^*$. Из этого следует, что

$$\mathrm{R}_{\mathrm{p}_{\mathrm{q}_0}(\cdot)}(\tau_\mathrm{i}, \tau_\mathrm{j}) > \mathrm{R}_{\mathrm{p}_{\mathrm{q}_1}(\cdot)}(\tau_\mathrm{i}, \tau_\mathrm{j}) \geq \mathrm{R}_{\mathrm{p}_{\mathrm{opt}}(\cdot)}(\tau_\mathrm{i}, \tau_\mathrm{j}) \geq \mathrm{R}_\mathrm{j} - \mathrm{R}_{\mathrm{p}_{\mathrm{opt}}(\cdot)}(\tau_\mathrm{i}) = \mathrm{R}_{\mathrm{p}_{\mathrm{q}_0}(\cdot)}(\tau_\mathrm{i}, \tau_\mathrm{j}).$$

Противоречие.

Нам остается разобрать случай

$$S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i, \tau_j) \geq S_{p_{q_0}(\cdot)}(\tau_i, \tau_j). \quad (35)$$

По определению самого жесткого ограничения,

$$S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i, T) = S - S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i) < S_{p_{q_0}(\cdot)}(\tau_i, T),$$

следовательно, поскольку $S(\tau_i, t)$ непрерывна, то существует $t_1 \in (\tau_i, T]$ такое, что

$$S_{p_{q_0}(\cdot)}(\tau_i, t_1) = S_{p_{opt}(\cdot)}(\tau_i, t_1).$$

Рассмотрим ценовую политику

$$p(t) = \begin{cases} p_{q_0}(t), \text{ если} t \in [\tau_i, t_1), \\ p_{opt}(t), \text{ иначе.} \end{cases}$$

По определению самого жесткого ограничения, при такой ценовой политике все ограничения до $t_1$ выполняются. Результаты раздела «Максимизация выручки при наличии одного ограничения по продажам» позволяют заключить, что ценовая политика $p_{q_0}(\cdot)$ обеспечивает большую выручку и такие же продажи на $[\tau_i, t_1)$, как и $p_{opt}(t)$. Кроме того, при цене $p(t)$ выполнены все ограничения после момента $t_1$ и обеспечивается наибольшая выручка. Снова приходим к противоречию. То есть наше предположение было неверным, следовательно, $p_{opt}(t) = \overline{p}(t)$. Теорема доказана.

## Численные эксперименты

Для того, чтобы проиллюстрировать результаты статьи, в этом разделе рассмотрим несколько симуляций, в которых сравниваются различные стратегии ценообразования.

Во всех симуляциях функция общего спроса $\Lambda(t)$ (Рисунок 7) получена из исторических данных о продажах недвижимости в конкретном городе. В общей сложности за $T = 1260$ дней (3,5 года) необходимо продать $1000$ объектов. Предполагаем, что дополнительных ограничений на продажи нет, и рассматриваем шесть промежуточных ограничений на выручку с интервалом в $180$ дней. В каждой симуляции сравниваются две разные стратегии.

В первой симуляции (Рисунки 8–10) сравниваем оптимальную стратегию, описанную в данной статье, с альтернативной стратегией, приоритетом которой является выполнение ближайшего ограничения. В этой симуляции $\varphi(t) = \kappa(t) = 1$. Оптимальная стратегия приносит выручку примерно на 3 % выше, чем альтернативная. Заметим, что, в общем, оптимальная стратегия значительно превосходит любую другую простую стратегию.

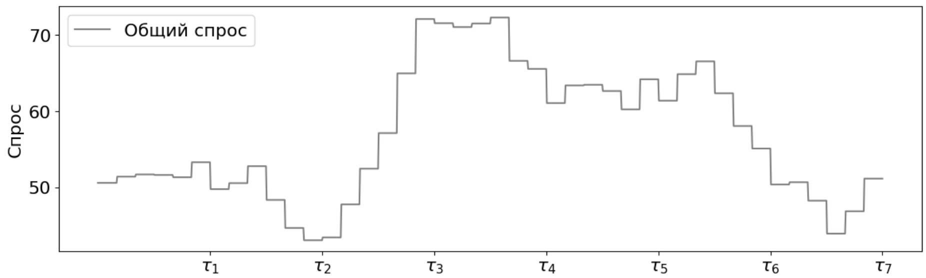


Рисунок 7 – Общий спрос
Figure 7 – Total demand

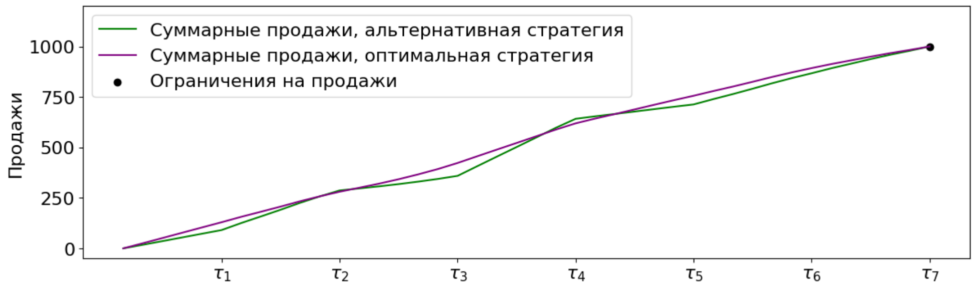


Рисунок 8 – Симуляция 1, суммарные продажи
Figure 8 – Simulation 1, cumulative sales

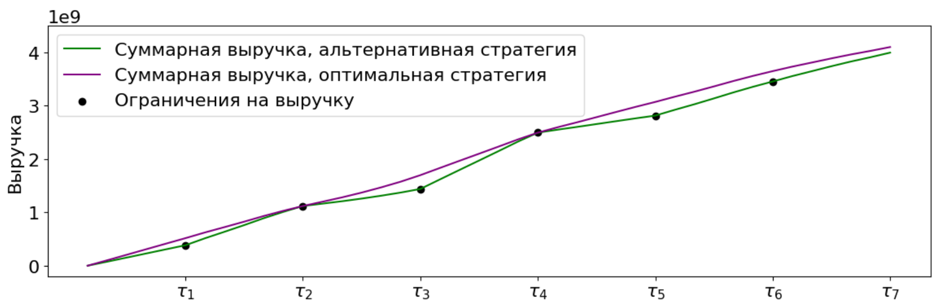


Рисунок 9 – Симуляция 1, суммарная выручка
Figure 9 – Simulation 1, cumulative revenue

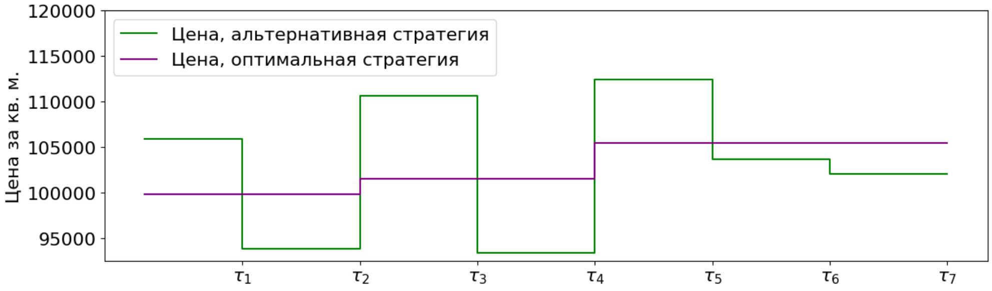


Рисунок 10 – Симуляция 1, цена
Figure 10 – Simulation 1, price

Вторая симуляция (Рисунки 11–13) демонстрирует важность учета стоимости денег $\varphi(t)$. В этой симуляции $\varphi(t)$ уменьшается экспоненциально, в то время как $\kappa(t) = 1$ остается постоянной. Альтернативный алгоритм не учитывает $\varphi(t)$, тогда как оптимальный алгоритм ее учитывает. Хотя разница в ценовых политиках меньше по сравнению с первой симуляцией, это все равно приводит к существенной разнице в итоговой выручке в размере 0,5 %.

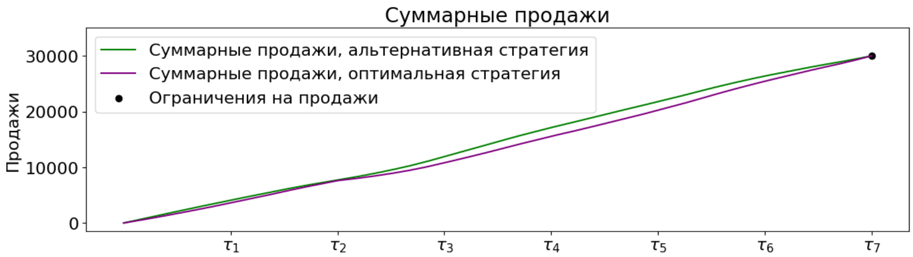


Рисунок 11 – Симуляция 2, суммарные продажи
Figure 11 – Simulation 2, cumulative sales

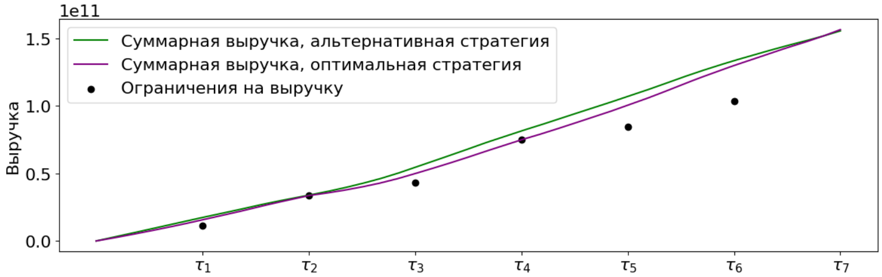


Рисунок 12 – Симуляция 2, суммарная выручка
Figure 12 – Simulation 2, cumulative revenue

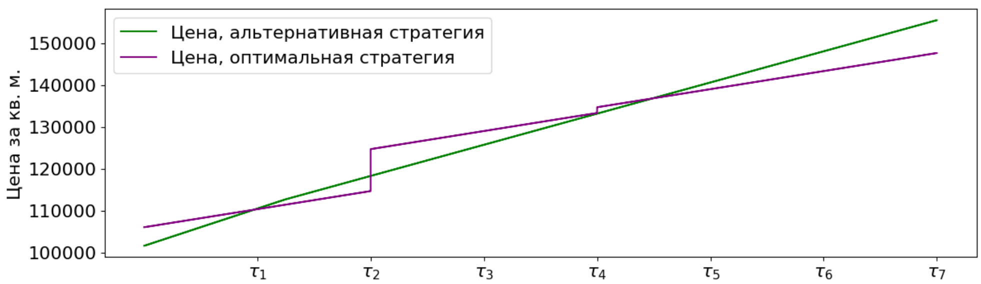


Рисунок 13 – Симуляция 2, цена
Figure 13 – Simulation 2, price

В третьей симуляции (Рисунки 14–16) исследуется влияние $\kappa(t)$ на формирование ценовой политики, продажи и выручку. Рассматривается случай, при котором $\kappa(t)$ линейно возрастает, в то время как $\varphi(t) = 1$ остается постоянной. Альтернативный алгоритм в момент времени $t$ использует текущее значение $v(p, t)$, но не учитывает то, как эта функция будет изменяться дальше. За счет последнего предположения альтернативный алгоритм получает некоторое преимущество, поскольку на практике любой алгоритм будет реагировать с задержкой из-за необходимости сбора достаточного количества данных для обновления своей оценки эластичности $\hat{v}(p)$. Как и в предыдущей симуляции, оптимальный алгоритм приносит примерно на 0,4 % больше выручки, чем альтернативный.

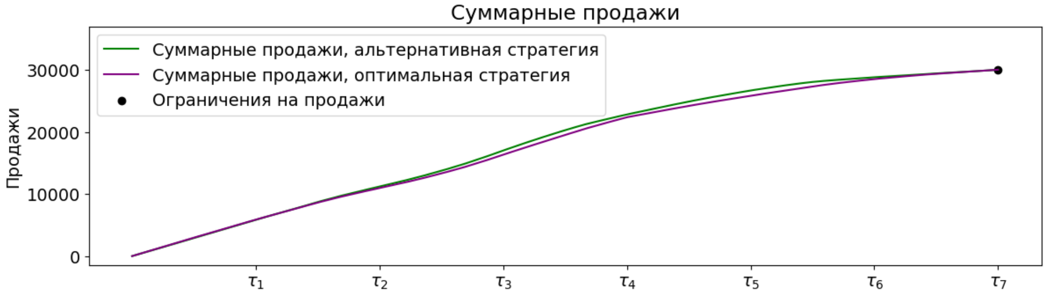


Рисунок 14 – Симуляция 3, суммарные продажи
Figure 14 – Simulation 3, cumulative sales

Несмотря на то, что проведенные симуляции только теоретически демонстрируют превосходство оптимальной ценовой политики, они показывают, что в реальности любой алгоритм, который пытается имитировать оптимальную политику и учитывает $\varphi(t)$ и $\kappa(t)$, как правило, будет приносить значительно бо́льшую выручку, чем алгоритмы, основанные на других принципах.

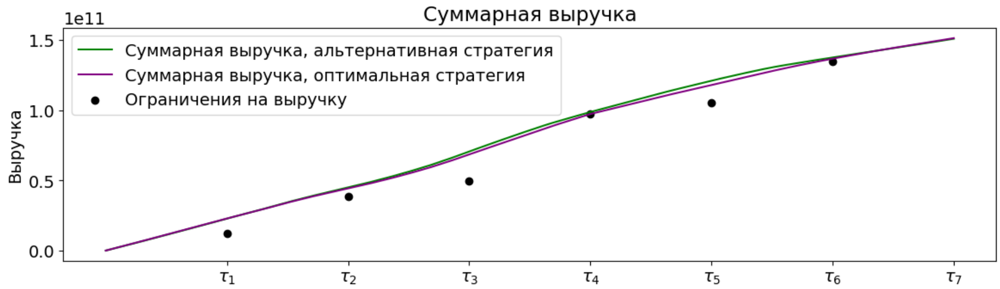


Рисунок 15 – Симуляция 3, суммарная выручка
Figure 15 – Simulation 3, cumulative revenue

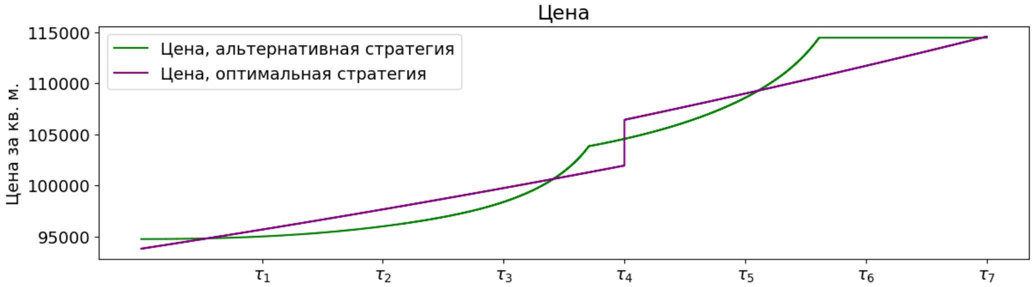


Рисунок 16 – Симуляция 3, цена
Figure 16 – Simulation 3, price

## Основные результаты

Основным результатом, полученным в рамках данной статьи, является формулировка задачи нахождения ценовой политики, обеспечивающей максимум суммарной выручки и выполнение всех ограничений в условиях непостоянства общего спроса. Предложен алгоритм построения этой оптимальной ценовой политики и приводим доказательство ее оптимальности.

Кроме того, дополнена ранее упомянутая модель, в нее включена стоимость денег и рост цены ОН по мере его строительной готовности. Сформулированы две оптимизационные задачи нахождения ценовой политики: первая из них – задача максимизации суммарной выручки при фиксированном количестве проданных кв. м, вторая – задача минимизации числа проданных кв. м недвижимости в условиях фиксированной общей выручки. Для случая линейной функции эластичности даны явные формулы для оптимальной ценовой политики и доказана ее оптимальность.

В работе приведено доказательство того, что ценовая политика для базовой модели является кусочно-постоянной функцией со сменой значений только в моменты, в которых ограничения выполнены строго. Доказывается, что при изменяющейся со временем стоимости денег и при росте стоимости недвижимости по мере строительной готовности константы $q_{\tau_i}$ также представляют собой кусочно-постоянные функции времени со сменой значений в моменты строгого выполнения ограничений. Данные доказательства являются новыми и требуют нетривиального подхода для учета непостоянства общего спроса, стоимости денег и стоимости недвижимости по мере строительной готовности. Это подчеркивает оригинальность и теоретическую ценность полученных результатов.

Проведены численные эксперименты с использованием данных об общем спросе за прошлые периоды, с целью сравнения базовой ценовой политики с политикой, учитывающей стоимость денег и рост цены ОН по мере его строительной готовности. С практической точки зрения эти симуляции показывают, что любая политика с обратной связью, формирующаяся с учетом этих факторов, значительно превосходит ценовую политику, в которой данные показатели не учитываются.

## Дальнейшие пути развития модели

В данной статье была рассмотрена базовая модель и ее улучшения, учитывающие переменный общий спрос, стоимость денег и рост цены ОН по мере его строительной готовности. Однако были рассмотрены только полностью детерминированные модели ценообразования: как общий спрос, так и эластичность являются известными функциями. В этом разделе обсудим возможные пути дальнейшего улучшения модели.

**Множественные типологии.** В работе предполагалось, что все объекты недвижимости однородны, что, как правило, не соответствует действительности. На практике в одном жилом комплексе представлено несколько ценовых групп, например, однокомнатные и двухкомнатные квартиры. Модель, учитывающая несколько ценовых групп, будет рассмотрена в последующих работах.

**Мягкие ограничения.** На данный момент рассматриваются только «жесткие» ограничения. То есть, требуется, чтобы все ограничения гарантированно выполнялись. Однако, рассмотрение «мягких» ограничений, при которых за несоблюдение каждого ограничения взимается некоторый штраф, скорее всего, позволило бы модели стать более приближенной к реальности.

**Прогнозирование общего спроса**. В настоящей статье предполагалось, что нам известна функция общего спроса $\Lambda(t)$. Для успешного применения описанных методы в реальных ситуациях необходимо уметь строить прогноз общего спроса. А на него в свою очередь влияет множество факторов, например, уровень экономической активности, курс национальной валюты, демографические факторы и ставка по ипотеке. Для прогнозирования общего спроса можно использовать различные методы машинного обучения. Причем данные не обязательно должны быть от конкретного девелопера, так как макроэкономические факторы влияют на всех застройщиков одинаковым образом.

**Прогнозирование эластичности.** В реальных ситуациях наряду с общим спросом также необходимо прогнозировать эластичность $v(p)$. Одним из возможных подходов является использование моделей дискретного выбора. Такие модели обычно используются для моделирования поведения покупателей. Применяя их с учетом исторических данных о продажах, можно в режиме реального времени прогнозировать функцию $v(p)$. Особенно перспективными в этом контексте выглядят модели дискретного выбора на основе сиамских нейронных сетей.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES


1. Araman V.F., Caldentey R. Revenue Management with Incomplete Demand Information. In: *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science.* Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.; 2010. pp. 1–17. https://doi.org/10.1002/9780470400531.EORMS0728
2. Aviv Y., Vulcano G. Dynamic List Pricing. In: *The Oxford Handbook of Pricing Management: Chapter 23.* Oxford: Oxford University Press; 2012. pp. 522–584. https://doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199543175.013.0023
3. Christ S. *Operationalizing Dynamic Pricing Models: Bayesian Demand Forecasting and Customer Choice Modeling for Low Cost Carriers.* Wiesbaden: Gabler Verlag; 2011. 351 p. https://doi.org/10.1007/978-3-8349-6184-6
4. Chen M., Chen Z.-L. Recent Developments in Dynamic Pricing Research: Multiple Products, Competition, and Limited Demand Information. *Production and Operations Management.* 2015;24(5):704–731. https://doi.org/10.1111/poms.12295
5. Den Boer A.V. Dynamic pricing and learning: Historical origins, current research, and new directions. *Surveys in Operations Research and Management Science.* 2015;20(1):1–18. https://doi.org/10.1016/j.sorms.2015.03.001
6. Bitran G., Caldentey R. An Overview of Pricing Models for Revenue Management. *Manufacturing & Service Operations Management.* 2003;5(3):203–229. https://doi.org/10.1287/msom.5.3.203.16031
7. Elmaghraby W., Keskinocak P. Dynamic pricing in the presence of inventory considerations: Research overview, current practices, and future directions. *IEEE Engineering Management Review.* 2003;31(4):47–47. https://doi.org/10.1109/EMR.2003.24939
8. Heching A., Leung Y.T. Product Pricing in the e-Business Era. In: *Supply Chain Management on Demand: Strategies and Technologies, Applications.* Berlin, Heidelberg: Springer; 2005. pp. 65–96. https://doi.org/10.1007/3-540-27354-9_4
9. Talluri K.T., Ryzin G.J. *The Theory and Practice of Revenue Management.* New York: Springer; 2004. 713 p. https://doi.org/10.1007/b139000
10. Gönsch J., Klein R., Steinhardt C. Dynamic Pricing – State-of-The-Art. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Ergänzungsheft 3 'Operations Research in der Betriebswirtschaft'.* 2009;3:1–40.
11. Rao V.R. *Handbook of Pricing Research in Marketing.* Cheltenham: Edward Elgar Publishing Limited; 2009. 616 p.

12. Chenavaz R., Carrier L.-P., Etienne L., Paraschiv C. Dynamic Pricing in Management Science. *Journal of Economics Studies and Research.* 2011;2011. https://doi.org/10.5171/2011.283281
13. Deksnyte I., Lydeka Z. Dynamic Pricing and Its Forming Factors. *International Journal of Business and Social Science.* 2012;3(23):213–220.
14. Özer Ö., Phillips R. *The Oxford Handbook of Pricing Management.* Oxford: Oxford University Press; 2012. 976 p.
15. Phillips R.L. *Pricing and Revenue Optimization.* Stanford: Stanford University Press; 2021. 472 p.
16. Faruqui A., Sergici S. Household response to dynamic pricing of electricity: a survey of 15 experiments. *Journal of Regulatory Economics.* 2010;38(2):193–225. https://doi.org/10.1007/s11149-010-9127-y
17. Khan A.R., Mahmood A., Safdar A., Khan Z.A., Khan N.A. Load forecasting, dynamic pricing and DSM in smart grid: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews.* 2016;54:1311–1322. https://doi.org/10.1016/j.rser.2015.10.117
18. Dutta G., Mitra K. A literature review on dynamic pricing of electricity. *Journal of the Operational Research Society.* 2017;68(10):1131–1145. https://doi.org/10.1057/s41274-016-0149-4
19. Saharan S., Bawa S., Kumar N. Dynamic pricing techniques for Intelligent Transportation System in smart cities: A systematic review. *Computer Communications.* 2020;150:603–625. https://doi.org/10.1016/j.comcom.2019.12.003
20. McAfee R.P., Te Velde V. Dynamic Pricing in the Airline Industry. In: *Handbooks in Information Systems: Chapter 11.* 2006. pp. 527–569. https://doi.org/10.1016/S1574-0145(06)01011-7
21. Kincaid W.M., Darling D.A. An inventory pricing problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1963;7(2):183–208. https://doi.org/10.1016/0022-247X(63)90047-7
22. Gallego G., Van Ryzin G. Optimal Dynamic Pricing of Inventories with Stochastic Demand over Finite Horizons. *Management Science*. 1994;40(8):999–1020. https://doi.org/10.1287/MNSC.40.8.999
23. Feng Y., Gallego G. Optimal Starting Times for End-of-Season Sales and Optimal Stopping Times for Promotional Fares. *Management Science.* 1995;41(8):1371–1391. https://doi.org/10.1287/mnsc.41.8.1371
24. Bitran G.R., Mondschein S.V. Periodic Pricing of Seasonal Products in Retailing. *Management Science*. 1997;43(1):64–79. https://doi.org/10.1287/MNSC.43.1.64
25. Feng Y., Xiao B. A Continuous-Time Yield Management Model with Multiple Prices and Reversible Price Changes. *Management Science*. 2000;46(5):644–657. https://doi.org/10.1287/mnsc.46.5.644.12050
26. Feng Y., Gallego G. Perishable Asset Revenue Management with Markovian Time Dependent Demand Intensities. *Management Science.* 2000;46(7):941–956. https://doi.org/10.1287/mnsc.46.7.941.12035
27. Zhao W., Zheng Y.-S. Optimal Dynamic Pricing for Perishable Assets with Nonhomogeneous Demand. *Management Science.* 2000;46(3):375–388. https://doi.org/10.1287/mnsc.46.3.375.12063
28. Bitran G., Caldentey R., Mondschein S. Coordinating Clearance Markdown Sales of Seasonal Products in Retail Chains. *Operations Research.* 1998;46(5):609–624. https://doi.org/10.1287/opre.46.5.609
29. Gallego G., Van Ryzin G. A Multiproduct Dynamic Pricing Problem and Its Applications to Network Yield Management. *Operations Research.* 1997;45(1):24–41. https://doi.org/10.1287/opre.45.1.24

30. Kleywegt A.J. An Optimal Control Problem of Dynamic Pricing. *Working paper, School of Industrial Engineering, Georgia Institute of Technology.* 2001.
31. Besbes O., Maglaras C. Dynamic Pricing with Financial Milestones: Feedback-Form Policies. *Management Science*. 2012;58(9):1715–1731.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Разумовский Лев Григорьевич,** кандидат технических наук, президент ГК, Группа компаний «Ramax», Москва, Российская Федерация.
*e-mail:* lev.razumovskiy@ramax.com
ORCID: 0009-0009-7857-3101

**Lev G. Razumovskiy,** Candidate of Engineering Sciences, President, "Ramax Group", Moscow, the Russian Federation.

**Герасимова Мария Алексеевна,** кандидат физико-математических наук, руководитель Центра перспективных решений, Группа компаний «Ramax», Москва, Российская Федерация.
*e-mail:* mariya.gerasimova@ramax.com

**Mariya A. Gerasimova,** Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Head of R&D Center, "Ramax Group", Moscow, the Russian Federation.

**Каренин Николай Евгеньевич,** математик-программист, Группа компаний «Ramax», Москва, Российская Федерация.
*e-mail:* nikolay.karenin@ramax.com
ORCID: 0009-0000-1317-2512

**Nikolay E. Karenin,** programming mathematician, "Ramax Group", Moscow, the Russian Federation.

*Статья поступила в редакцию 02.12.2024; одобрена после рецензирования 16.12.2024; принята к публикации 20.01.2025.*

*The article was submitted 02.12.2024; approved after reviewing 16.12.24; accepted for publication 20.01.2025.*