

УДК 519.873; 004.056

DOI: [10.26102/2310-6018/2025.51.4.035](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2025.51.4.035)

Нахождение дисперсии и моментов числа отказов в моделях процессов восстановления технических и информационных систем

В.И. Вайнштейн✉, И.И. Вайнштейн

Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация

Резюме. В работе исследуются модели процессов восстановления с переменными функциями распределения наработок до отказа элементов. Получены аналитические выражения и интегральные уравнения для расчета дисперсии и начальных моментов числа отказов, что позволяет формулировать новые оптимизационные задачи в управлении эксплуатацией технических и информационных систем. Это дает возможность постановкам новых оптимизационных задач стратегий эксплуатации технических и информационных систем, связанных со средним числом отказов, дисперсией числа отказов и средней стоимостью восстановлений. Здесь средней стоимости восстановлений и интенсивности затрат можно придать смысл «цена», среднему числу отказов и коэффициенту готовности смысл «качество», а дисперсии числа отказов и стоимости восстановлений «риск». Например, задача минимизации дисперсии числа отказов при заданных ограничениях на среднее число отказов или среднюю стоимость восстановлений. В качестве примера получено выражение дисперсии числа отказов периодического процесса восстановления второго порядка при экспоненциальном распределении наработок и ее асимптотическое поведение. В работе сформулирована задача об асимптотическом поведении дисперсии числа отказов, исследованная в математической теории надежности для функции восстановления рассматриваемых моделей процессов восстановления.

Ключевые слова: процесс восстановления, функция восстановления, дисперсия, моменты числа отказов, уравнение восстановления.

Для цитирования: Вайнштейн В.И., Вайнштейн И.И. Нахождение дисперсии и моментов числа отказов в моделях процессов восстановления технических и информационных систем. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2025;13(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1804> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.51.4.035

Finding the variance and moments of the number of failures in models of restoration processes of technical and information systems

V.I. Vainshtein✉, I.I. Vainshtein

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, the Russian Federation

Abstract. This article examines models of restoration processes with variable distribution functions of the mean time to failure of elements. Analytical expressions and integral equations are derived for calculating the variance and initial moments of the number of failures, enabling the formulation of new optimization problems in the management of technical and information systems. This enables the formulation of new optimization problems for technical and information system operation strategies related to the average number of failures, the variance of the number of failures, and the average cost of restoration. Here, the average cost of restoration and the cost intensity can be assigned the meaning of "price", the average number of failures and the availability factor the meaning of "quality", and the variance of the number of failures and the cost of restoration the meaning of "risk". For example, consider the problem of minimizing the variance of the number of failures under given constraints on

the average number of failures or the average cost of restoration. As an example, an expression for the variance of the number of failures of a second-order periodic restoration process with an exponential distribution of the mean time and its asymptotic behavior is obtained. The paper formulates the problem of asymptotic behavior of the variance of the number of failures, investigated in the mathematical theory of reliability for the recovery function of the considered models of recovery processes.

Keywords: recovery process, recovery function, variance, moments of failures, recovery equation.

For citation: Vainshtein V.I., Vainshtein I.I. Finding the variance and moments of the number of failures in models of restoration processes of technical and information systems. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2025;13(4). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1804> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.51.4.035

Введение

Научно-технические задачи обеспечения высокой надежности работающих технических и информационных систем имеет особо важное значение, так как отказы (имеющие, как правило, случайный характер) могут приводить к значительным техническим, экономическим, экологическим последствиям.

Мы рассматриваем системы с восстановлением, которые при отказе восстанавливаются, элемент при каждом отказе заменяется на новый или ремонтируется (восстанавливается). Для таких систем (элементов) в математической теории надежности вводится процесс восстановления. Предполагается, что отказы элементов и их восстановления происходят мгновенно (за бесконечно малый промежуток времени).

Пусть X_i случайная наработка элемента от i -го до $i + 1$ -го отказа с функцией распределения $F_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$

Последовательность неотрицательных, независимых случайных величин X_i , с функциями распределения $F_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ называется процессом восстановления.

В реальных условиях эксплуатации (влияние внешней среды, возможность выбора заменяемых элементов с различной ценой и качеством) функции распределения или входящие в них параметры могут меняться.

В теории надежности хорошо изучены две модели процесса восстановления простой и общий. При простом процессе $F_i(t) = F_1(t)$, $i = 2, 3, \dots$, при общем $F_i(t) = F_2(t)$, $i = 3, 4, \dots$

В работе мы рассматриваем модель процесса восстановления порядка (k_1, k_2) [1, 2], у которой две указанные выше модели являются частными случаями, у рассматриваемой модели $F_i(t) = F_j(t)$, если $i - j$ нацело делится на k_2 .

В случаях $(1, 1)$ имеем простой (обычный), $(2, 1)$ – общий (запаздывающий) процесс [1, 3], в случае $(k, 1)$ имеем процесс восстановления k -го порядка, а для случая $(1, k)$ – периодический процесс k -го порядка [1, 2].

Важное значение в прикладных и теоретических задачах теории надежности имеет хорошо изученная для указанных моделей функция восстановления $H(t)$ (среднее число отказов $N(t)$ до момента времени t):

$$H(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t), \quad (1)$$

где $F^{(n)}(t)$ – кратная свертка всех функций распределения $F_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ [1, 3].

$$F^{(n)}(t) = (F^{(n-1)} \cdot F_n)(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x) dF_n(x), \quad F^{(1)}(t) = F_1(t).$$

В теории вероятностей наряду с математическим ожиданием важное значение имеет и дисперсия случайных величин. В теории надежности, возможно с отсутствием необходимых для этого задач, дисперсия числа отказов практически не встречается.

Отметим, для примера, две монографии по различным задачам теории надежности, в том числе с проведением профилактических восстановлений, дисперсия числа отказов не возникает [4, 5].

В связи с сформулированными далее в работе оптимизационными задачами, связанными со средним, дисперсией числа отказов и средней стоимости восстановлений, целью работы является построение метода вычисления дисперсии и моментов числа отказов для рассматриваемой модели процесса восстановления порядка (k_1, k_2) . Отметим, что их вычисление является непростой вычислительной задачей.

Материалы и методы

Вычисление дисперсии числа отказов $D(N(t))$ процесса восстановления порядка (k_1, k_2) . Для простого и общего процесса восстановления порядка k и периодического второго порядка формулы для дисперсии имеются в [6, 7].

Для простого процесса

$$D(N(t)) = 2 \int_0^t HF_1(t-x)dHF_1(x) + HF_1(t) - H^2F_1(t),$$

для общего

$$D(N(t)) = 2 \int_0^t HF_1F_2(t-x)dHF_2(x) + HF_1F_2(t) - H^2F_1F_2(t).$$

Здесь $HF(t)$ – функции восстановления простого процесса с функцией $F(t)$, $HFG(t)$ – функции восстановления общего процесса с первой функцией распределения $F(t)$, второй и последующими $G(t)$.

Запишем формулу для дисперсии:

$$D(N(t)) = E(N^2(t)) - E^2(N(t)) = E(N^2(t)) - H^2(t).$$

С учетом [1]

$$P(N(t) = n) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t),$$

получаем

$$\begin{aligned} E(N^2(t)) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P(N(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)) = \\ &= F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - (n-1)^2) F^{(n)}(t) = F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) F^{(n)}(t) = \\ &= -H(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n F^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Обозначив

$$d_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n F^{(n)}(t),$$

получаем

$$D(N(t)) = -H(t) + 2d_1(t) - H^2(t). \quad (2)$$

Видим, что вычисление дисперсии $D(N(t))$ сводится к нахождению функций $d_1(t)$ и $H(t)$.

Пусть наработки $Y_i = X_{k_1-1+i}$, $i = 1, 2, \dots, k_2$ задают периодическую часть процесса порядка (k_1, k_2) , $\Phi_i(t) = F_{k_1-1+i}(t)$ их функции распределения и $\Phi^{(k_2)}(t)$ – свертка всех функций распределения $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, k_2$.

Запишем необходимое для дальнейшего интегральное уравнение восстановления для функции $H(t)$ рассматриваемого процесса восстановления порядка (k_1, k_2) .

Пусть $k_1 > 1$. Последовательно имеем:

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} F^{(n)}(t) + \sum_{n=k_1+k_2}^{\infty} F^{(n)}(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} F^{(n)}(t) + ((F_{k_1} \cdot F_{k_1+1} \cdot \dots \cdot F_{k_1+k_2-1}) \cdot \sum_{n=k_1}^{\infty} F^{(n)})(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} F^{(n)}(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)})(t) - \sum_{n=1}^{k_1-1} (F^{(n)} \cdot \Phi^{(k_2)})(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} F^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{k_1-1} (F^{(n)} \cdot \Phi^{(k_2)})(t) + (H \cdot \Phi^{(k_2)})(t). \end{aligned}$$

При $k_1 = 1$

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{n=1}^{k_2} F^{(n)}(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)})(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_2} F^{(n)}(t) + (H \cdot \Phi^{(k_2)})(t). \end{aligned}$$

Окончательно

$$H(t) = Z_0(t) + \int_0^t H(t-x) d\Phi^{(k_2)}(x), \quad (3)$$

где при $k_1 > 1$

$$Z_0(t) = \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} F^{(n)}(t) - ((\sum_{n=1}^{k_1-1} F^{(n)}) \cdot \Phi^{(k_2)})(t),$$

при $k_1 = 1$

$$Z_0(t) = \sum_{n=1}^{k_2} F^{(n)}(t).$$

Заметим, что интегральное уравнение восстановления для функции $H(t)$ с другой формой записи функции $Z_0(t)$ имеется в [1].

Получим интегральное уравнение для функции $d_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t)$ рассматриваемого процесса восстановления.

При $k_1 > 1$

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} nF^{(n)}(t) + \sum_{n=k_1+k_2}^{\infty} nF^{(n)}(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} nF^{(n)}(t) + \sum_{n=k_1}^{\infty} (k_2+n)(\Phi^{(k_2)} \cdot F^{(n)})(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} nF^{(n)}(t) - (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{k_1-1} (k_2+n)F^{(n)})(t) + \\ &\quad + k_2(\Phi^{(k_2)} \cdot H)(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot d_1)(t). \end{aligned}$$

Учитывая (3),

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} nF^{(n)}(t) - (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{k_1-1} (k_2+n)F^{(n)})(t) - k_2 \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} F^{(n)}(t) + \\ &\quad + k_2((\sum_{n=1}^{k_1-1} F^{(n)}) \cdot \Phi^{(k_2)})(t) + k_2 H(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot d_1)(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} nF^{(n)}(t) - (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{k_1-1} nF^{(n)})(t) - k_2 \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} F^{(n)}(t) + \\ &\quad + k_2 H(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot d_1)(t). \end{aligned}$$

При $k_1 = 1$

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{k_2} nF^{(n)}(t) + \sum_{n=k_2+1}^{\infty} nF^{(n)}(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_2} nF^{(n)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (k_2+n)(\Phi^{(k_2)} \cdot F^{(n)})(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_2} nF^{(n)}(t) + k_2(\Phi^{(k_2)} \cdot H)(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot d_1)(t). \end{aligned}$$

Учитывая (3),

$$d_1(t) = \sum_{n=1}^{k_2} nF^{(n)}(t) - k_2 \sum_{n=1}^{k_2} F^{(n)}(t) + k_2 H(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot d_1)(t).$$

Получили интегральное уравнение для нахождения $d_1(t)$:

$$d_1(t) = Z_1(t) + \int_0^t d_1(t-x) d\Phi^{(k_2)}(x), \quad (4)$$

при $k_1 > 1$

$$Z_1(t) = \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} nF^{(n)}(t) - (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{k_1-1} nF^{(n)})(t) - \\ - k_2 \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} F^{(n)}(t) + k_2 H(t),$$

при $k_1 = 1$

$$Z_1(t) = \sum_{n=1}^{k_2} nF^{(n)}(t) - k_2 \sum_{n=1}^{k_2} F^{(n)}(t) + k_2 H(t).$$

Получили, что для вычисления искомой дисперсии нужно вначале определить функцию восстановления $H(t)$ и функцию $d_1(t)$, решая вначале интегральное уравнение (3), а затем интегральное уравнение (4). Отметим, что эти интегральные уравнения отличаются только функциями $Z_0(t), Z_1(t)$.

Рассмотрим эти уравнения. По форме они соответствуют уравнению восстановления для функции восстановления общего процесса [1, 8]:

$$HF_1F_2(t) = F_1(t) + \int_0^t HF_1F_2(t-x) dF_2(x). \quad (5)$$

Учитывая еще соотношение [1, 8]

$$HF_1F_2(t) = F_1(t) + \int_0^t HF_2(t-x) dF_1(x), \quad (6)$$

можно, как это приводится в [1, 8] при выводе соотношений (5), (6), записать решения интегральных уравнений (3), (4):

$$H(t) = Z_0(t) + \int_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x) dZ_0(x), \\ d_1(t) = Z_1(t) + \int_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x) dZ_1(x). \quad (7)$$

Здесь $H\Phi^{(k_2)}(t)$ – функция восстановления простого процесса с функцией распределения $\Phi^{(k_2)}(t)$, которая определяется из интегрального уравнения [1]:

$$H\Phi^{(k_2)}(t) = \Phi^{(k_2)}(t) + \int_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x) d\Phi^{(k_2)}(x). \quad (8)$$

Из выражений для функций $Z_0(t), Z_1(t)$ и из формулы (2) следует, что для вычисления искомой дисперсии требуется нахождение функции восстановления $H\Phi^{(k_2)}(t)$ и вычисление конечного числа интегралов.

В качестве примера получим выражение дисперсии числа отказов периодического процесса восстановления второго порядка (случай $k_1 = 1, k_2 = 2$) при экспоненциальном распределении наработок:

$$F_1(t) = 1 - e^{-\alpha_1 t}, \quad F_2(t) = 1 - e^{-\alpha_2 t}.$$

В соответствии с (2), (3), (7)

$$D(N(t)) = -2F_1(t) + 3H(t) + 4 \int_0^t HF^{(2)}(t-x) dH(x) - \\ - 2 \int_0^t HF^{(2)}(t-x) dF_1(x) - H^2(t).$$

Учитывая представление для функции восстановления $H(t)$ рассматриваемого

периодического процесса второго порядка [1]

$$H(t) = F_1(t) + \int_0^t HF^{(2)}(t-x)dF_1(x) + HF^{(2)}(t),$$

получаем

$$D(N(t)) = 4 \int_0^t HF^{(2)}(t-x)dH(x) + 2HF^{(2)}(t) + H(t) - H^2(t). \quad (9)$$

Функции восстановления $HF^{(2)}(t)$, $H(t)$, входящие в (9), известны [1]:

$$HF^{(2)}(t) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}t - \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}(1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}),$$

$$H(t) = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}t + \frac{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}(1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}).$$

После интегрирования в (9), получаем

$$D(N(t)) = \frac{4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}t + \frac{8\alpha_1^2\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}te^{-(\alpha_1+\alpha_2)t} + \\ + \frac{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1^2-8\alpha_1\alpha_2+3\alpha_2^2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^4}(1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}) - \frac{\alpha_1^2(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^4}(1 - e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t})^2.$$

Отсюда следует асимптотическое поведение рассматриваемой дисперсии:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (D(N(t)) - \frac{4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}t) = \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)(3\alpha_2-7\alpha_1)}{(\alpha_1+\alpha_2)^4},$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(N(t))}{t} = \frac{4\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^3}.$$

Следует отметить, что также из явного представления дисперсии числа отказов при общем процессе с экспоненциальными распределениями [7], следует ее асимптотическое поведение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (D(N(t)) - \alpha_2 t) = \frac{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{\alpha_1^2}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D(N(t))}{t} = \alpha_2.$$

Отметим еще, что асимптотическое поведение функции восстановления с произвольными функциями распределения при процессе порядка (k_1, k_2) имеет линейный характер [1, 9].

Здесь возникают новые задачи о асимптотическом поведении дисперсии числа отказов в процессе порядка (k_1, k_2) , известные для функции восстановления [1, 9].

Вычисление начальных моментов $v_k(t) = E(N^k(t))$ числа отказов. Обозначим $d_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k F^{(n)}(t)$. Из определения функции восстановления (1):

$$v_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(N(t) = n) = H(t) = d_0(t).$$

Из (2):

$$v_2(t) = E(N^2(t)) = -H(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} nF^{(n)}(t) = -d_0(t) + 2d_1(t),$$

$d_1(t)$ определяется из интегрального уравнения (4). Далее

$$v_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k P(N(t) = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k (F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)) = \\ = F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} (n^k - (n-1)^k) F^{(n)}(t) = F_1(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F^{(n)}(t) \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i n^{k-i} = \\ = F_1(t) + \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i \sum_{n=2}^{\infty} n^{k-i} F^{(n)}(t) = \\ = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-i} F^{(n)}(t) + F_1(t) (1 - \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i).$$

Учитывая равенство $(1 - \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i) = 0$, которое следует из равенства $(n-1)^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i n^{k-i}$ при $n=1$, получаем

$$v_k(t) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} C_k^i d_{k-i}(t).$$

Таким образом, вычисление начальных моментов числа отказов сводится к вычислению $d_{k-i}(t)$, $i=1, 2, \dots, k$. Учитывая $d_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t) = H(t)$, в соответствии с (3), запишем:

$$d_0(t) = Z_0(t) + \int_0^t d_0(t-x) d\Phi^{(k_2)}(x). \quad (10)$$

Аналогично вычислению $d_1(t)$, последовательно получаем ($k > 1$):

$$\begin{aligned} d_k(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^k F^{(n)}(t) = \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} n^k F^{(n)}(t) + \sum_{n=k_1+k_2}^{\infty} n^k F^{(n)}(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} n^k F^{(n)}(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=k_1}^{\infty} (n+k_2)^k F^{(n)})(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} n^k F^{(n)}(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n+k_2)^k F^{(n)})(t) - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{k_1-1} (n+k_2)^k (F^{(n)} \cdot \Phi^{(k_2)})(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} n^k F^{(n)}(t) - (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{k_1-1} (n+k_2)^k F^{(n)})(t) + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i n^{k-i} k_2^i F^{(n)})(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} n^k F^{(n)}(t) - (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{k_1-1} (n+k_2)^k F^{(n)})(t) + \\ &\quad + (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{i=0}^k C_k^i k_2^i d_{k-i})(t). \end{aligned}$$

Получили рекуррентное интегральное уравнение для определения $d_k(t)$.
При $k_1 > 1$

$$\begin{aligned} d_k(t) &= Z_k + \int_0^t d_k(t-x) d\Phi^{(k_2)}(x), \\ Z_k(t) &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} n^k F^{(n)}(t) - (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{k_1-1} (n+k_2)^k F^{(n)})(t) + \\ &\quad + (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{i=1}^k C_k^i k_2^i d_{k-i})(t). \end{aligned} \quad (11)$$

При $k_1 = 1$

$$Z_k(t) = \sum_{n=1}^{k_2} n^k F^{(n)}(t) + (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{i=1}^k C_k^i k_2^i d_{k-i})(t).$$

Из уравнения (11) следует:

$$(\Phi^{(k_2)} \cdot d_{k-i})(t) = d_{k-i}(t) - Z_{k-1}(t).$$

При $k_1 > 1$

$$\begin{aligned} Z_k(t) &= \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} n^k F^{(n)}(t) - (\Phi^{(k_2)} \cdot \sum_{n=1}^{k_1-1} (n+k_2)^k F^{(n)})(t) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^k C_k^i k_2^i (d_{k-i}(t) - Z_{k-i}(t)), \end{aligned}$$

при $k_1 = 1$

$$Z_k(t) = \sum_{n=1}^{k_2} n^k F^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^k C_k^i k_2^i (d_{k-i}(t) - Z_{k-i}(t)).$$

Теперь, как и выше, при выводе формулы (7) для d_1 , в соответствии с (5), (6), (11), запишем рекуррентную формулу для вычисления $d_k(t)$:

$$d_k(t) = Z_k(t) + \int_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x) dZ_k(x).$$

Анализируя полученные соотношения для нахождения $d_k(t)$, $Z_k(t)$, а тем самым и моментов $v_k(t)$, функций $H(t)$, $D(N(t))$, видим, что требуется вычисление конечного числа интегралов и определение функции восстановления $H\Phi^{(k_2)}(t)$, которая определяется решением уравнения (8). Методы решения таких задач представлены в [1].

Результаты и обсуждение

Мы вывели последовательность математических действий для нахождения дисперсии и начальных моментов числа отказов для модели процесса восстановления порядка (k_1, k_2) , состоящей из решения интегрального уравнения восстановления (8) (интегрального уравнения Вольтерра второго рода) и вычисления большого количества сверток различных порядков от возникающих в процессе реализации метода, функций.

Каждая из таких задач является серьезной вычислительной задачей. Это обуславливается и тем, что многие характерные для теории надежности законы распределения наработок до отказа заменяемых элементов могут обращаться при $t = 0$ в бесконечность. Это относится к широко используемому в теории надежности распределению Вейбулла-Гнеденко, которое при некоторых значениях параметра обращается в бесконечность.

Отметим монографию [1], в которой приведены квадратурные формулы для вычисления возникающих в работе кратных сверток и приведены конкретные формулы для различных численных методов решения интегрального уравнения (8).

Численная эффективность методов подтверждена на решении большого количества примеров с различными функциями распределения.

В качестве примера в работе получено выражение дисперсии числа отказов периодического процесса восстановления второго порядка.

Разработанные в работе методы вычисления дисперсии числа отказов делают возможным постановку и решение новых оптимизационных задач в процессах и стратегиях восстановления, связанных со средним числом отказов, дисперсией числа отказов и средней стоимостью восстановлений.

В них среднему числу отказов можно придать смысл «качество», дисперсии числа отказов – «риск», средней стоимости восстановлений – «цена».

Приведем ряд таких оптимизационных задач в процессах и стратегиях восстановления. Задается интервал времени $[0, T]$ и задаются ограничения в виде неравенств на среднее количество отказов за время работы от 0 до T , на интенсивность затрат (средняя стоимость восстановлений в единицу времени), или на коэффициент готовности (вероятность, что система находится в работоспособном состоянии в рассматриваемой стратегии восстановления). Требуется в рамках рассмотренных моделей процесса восстановления организовать процесс или стратегию восстановления, чтобы дисперсия числа отказов или средняя стоимость восстановлений в момент времени T была наименьшей. Отметим, что указанные ограничения могут задаваться вместе.

Такие же оптимизационные задачи можно рассматривать и для альтернирующих процессов, в которых учитывается время восстановления.

Отметим, что в стратегиях восстановления наряду с обязательными аварийными могут проводиться профилактические восстановления.

Отметим, такая постановка оптимизационных задач, но без учета стоимости восстановлений была сформулирована в работе авторов [7].

Анализ приведенных оптимизационных задач показывает, что они могут быть задачами нелинейного программирования, если ищутся оптимальные параметры задаваемых функций распределения, или задачами на перебор, если оптимизируется

образование самого процесса восстановления из имеющегося набора функций распределения.

Приведенная интерпретация критериев эффективности процессов и стратегий восстановления близка к задачам портфельной теории Марковица [10].

Также к оптимизационным задачам приводят неравенство Чебышева и коэффициент вариации $V(t)$:

$$P(|N(t) - H(t)| \geq \epsilon) \leq \frac{D(N(t))}{\epsilon^2}, \quad V(t) = \frac{\sigma(N(t))}{H(t)}, \quad \sigma(N(t)) = \sqrt{D(N(t))}.$$

Отметим, что постановка и решение оптимизационных задач в теории надежности имеют особый интерес, и решение рассмотренных в работе оптимизационных задач должно быть предметом дальнейших исследований.

Заключение

Полученные в работе формулы и методы нахождения дисперсии числа отказов приводят к постановкам и решению новых теоретических и прикладных оптимизационных задач работы технических и информационных систем в терминах «цена», «качество», «риск». Например, такими характеристиками могут быть среднее количество отказов (функция восстановления), средняя стоимость и интенсивность затрат, коэффициент готовности, время проведения профилактических восстановлений. Отметим еще, что в работе сформулированы еще задачи для дальнейших исследований о асимптотическом поведении дисперсии числа отказов, известные в теории надежности для функции восстановления.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Вайнштейн И.И. *Процессы и стратегии восстановления с изменяющимися функциями распределения в теории надежности*. Красноярск: СФУ; 2016. 192 с.
2. Булинская Е.В., Соколова А.И. Предельные теоремы для обобщенных процессов восстановления. *Теория вероятностей и ее применения*. 2017;62(1):44–67. <https://doi.org/10.4213/tvp5095>
Bulinskaya E.V., Sokolova A.I. Limit Theorems for Generalized Renewal Processes. *Theory of Probability and Its Applications*. 2018;62(1):35–54. <https://doi.org/10.1137/S0040585X97T988472>
3. Боровков А.А. *Обобщенные процессы восстановления*. Москва: Российская Академия Наук; 2020. 455 с.
4. Барзилович Е.Ю., Беляев Ю.К., Каштанов В.А. и др. *Вопросы математической теории надежности*. Москва: Радио и Связь; 1983. 376 с.
5. Песчанский А.И. *Полумарковские модели профилактики ненадежной одноканальной системы обслуживания с потерями*. Москва: ИНФРА-М; 2022. 267 с. <https://doi.org/10.12737/1870597>
Peschansky A. *Semi-Markov Models of Prevention of Unreliable Single-Channel Service System with Losses*. Moscow: INFRA-M; 2022. 267 p. (In Russ.). <https://doi.org/10.12737/1870597>
6. Кокс Д.Р., Смит В.Л. *Теория восстановления*. Москва: Советское радио; 1967. 300 с.
7. Вайнштейн И.И., Вайнштейн В.И. Дисперсия числа отказов в моделях процессов восстановления технических и информационных систем. Оптимизационные задачи. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2019;7(3). <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2019.26.3.021>
Vainshtein I.I., Vainshtein V.I. Dispersion of the Number of Failures in Models of

- Processes of Restoration of Technical and Information Systems. Optimization Problems. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2019;7(3). (In Russ.). <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2019.26.3.021>
8. Байхельт Ф., Франкен П. *Надежность и техническое обслуживание. Математический подход*. Москва: Радио и связь; 1988. 392 с.
 9. Булинская Е.В., Соколова А.И. Асимптотическое поведение некоторых стохастических систем хранения. *Современные проблемы математики и механики*. 2015;10(3):37–62.
 10. Markowitz H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 1952;7(1):77–91. <https://doi.org/10.2307/2975974>

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Вайнштейн Виталий Исаакович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой информационной безопасности, Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация.

e-mail: vvaynshtyayn@sfu-kras.ru

Vitaly I. Vainshtein, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Head of the Department of Information Security, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, the Russian Federation.

Вайнштейн Исаак Иосифович, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и анализа данных, Сибирский федеральный университет, Красноярск, Российская Федерация.

e-mail: isvain@mail.ru

Isaak I. Vainshtein, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor at the Department of Applied Mathematics and Data Analysis, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 03.06.2025; одобрена после рецензирования 28.10.2025; принята к публикации 11.11.2025.

The article was submitted 03.06.2025; approved after reviewing 28.10.2025; accepted for publication 11.11.2025.