

УДК 519.72

DOI: [10.26102/2310-6018/2025.49.2.049](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2025.49.2.049)

Распределение ресурсов как основа оптимизации сетевой модели проекта

Т.М. Леденева, М.М. Шишов✉

Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация

Резюме. В статье представлена процедура оптимизации проекта в форме сетевого графика. Идея оптимизации заключается в том, чтобы все пути из исходного события в завершающее сделать критическими за счет переноса ресурсов с не критических работ с ненулевым свободным резервом на критические работы некоторого критического пути. В предположении, что зависимость продолжительности работы от выделенных для ее выполнения ресурсов линейная, получены формулы для новых продолжительностей работ и нового критического времени. Перераспределение ресурсов позволяет сократить продолжительности некоторых работ, но делает проект более напряженным. Для оценки проекта с новыми продолжительностями работ для каждой работы введен коэффициент напряженности как интенсивность использования обобщенного ресурса проекта в единицу времени. В процессе оптимизации данные характеристики ведут себя по-разному, поэтому введена обобщенная характеристика интенсивности проекта на основе агрегирования частных характеристик работ с использованием принципа «нечеткого большинства». Заметим, что для агрегирования частных оценок можно использовать известные взвешенные средние, при этом для определения весов можно применить, например, метод парных сравнений. В статье приведен иллюстративный пример, демонстрирующий работу предложенного подхода.

Ключевые слова: сетевой график, критический путь, ресурс, оптимизация, коэффициент напряженности, агрегирование.

Для цитирования: Леденева Т.М., Шишов М.М. Распределение ресурсов как основа оптимизации сетевой модели проекта. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2025;13(2). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1968> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.49.2.049

Resource allocation as a basis for optimizing the network model of a project

T.M. Ledeneva, M.M. Shishov✉

Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation

Abstract. This article presents a project optimization procedure in the form of a network graph. The idea of optimization is to make all paths from the initial event to the final one critical by transferring resources from non-critical work with a non-zero free reserve to critical work of some critical path. Assuming that the dependence of the duration of work on the resources allocated for its execution is linear, formulas for new work durations and a new critical time are obtained. The reallocation of resources reduces the duration of some work, but makes the project more stressful. To evaluate a project with new work durations, a stress coefficient was introduced for each work as the intensity of use of the generalized project resource per unit of time. In the process of optimization, these characteristics behave differently, therefore, a generalized characteristic of the project intensity is introduced based on the aggregation of particular characteristics of work using the "fuzzy majority" principle. Note that well-known weighted averages can be used to aggregate partial estimates, while, for example, the method of paired comparisons can be used to determine the weights. The article provides an illustrative example demonstrating the operation of the proposed approach.

Keywords: network graph, critical path, resource, optimization, tension coefficient, aggregation.

For citation: Ledeneva T.M., Shishov M.M. Resource allocation as a basis for optimizing the network model of a project. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2025;13(2). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=1968> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.49.2.049

Введение

Большинство проектов представляют собой комплекс работ, которые должны выполняться в определенной последовательности, а следовательно, возникают вопросы, связанные с календарным планированием; с распределением ресурсов; с определением параметров работ, в наибольшей степени влияющих на время выполнения проекта в целом и т. п. При небольшом количестве работ практический опыт является основой для ответов на эти вопросы. Однако современные масштабные проекты представляются сложными и требуют применения формальных методов, совокупность которых образует теорию управления проектами. Классические модели сформировались как раздел исследования операций – сетевое планирование и управление – и представлены, например, в [1, 2]. Современные модели развиваются в различных направлениях, одно из которых связано с представлением информации, на основе которой формируются планы. Для проектов, которые включают часто выполняемые работы и имеется статистика относительно времени их выполнения, применимы классические методы календарного планирования [3] – именно они реализованы во многих пакетах. Если проект уникален, то для оценки времени выполнения работ привлекаются эксперты, однако их количественные оценки, основанные на практическом опыте, отличаются субъективностью и невозможностью учесть весь комплекс условий, влияющих на временные параметры проекта. В связи с развитием методов формализации фактора неопределенности, который присущ любому проекту, появились исследования, в которых продолжительность выполнения работы задается вероятностью [4], интервальным [5] или нечетким числом [6, 7].

В основе определения времени, необходимого для выполнения работы, лежит величина объема выделенных ресурсов. Задача распределения ресурсов между работами проекта – одна из важнейших в теории управления проектами. Данная проблема имеет огромное значение для организаций, в которых одновременно реализуется несколько проектов и требуется распределять ресурсы между ними оптимальным образом [2]. Цель статьи заключается в представлении подхода к оптимизации времени, необходимого для выполнения проекта, на основе такого распределения ресурсов, когда любая последовательность работ от момента начала проекта до момента его завершения требует для своего выполнения одинакового времени. Выигрыш во времени делает проект напряженным. Однако данный подход актуален для значимых проектов, которые должны быть реализованы в максимально короткое время, но с ограничениями по ресурсам.

Материалы и методы

Основные понятия и определения. Введем основные понятия и определения, базируясь на [1, 3].

Проект – это комплекс разнообразных работ, которые необходимо выполнять в определенной последовательности, используя выделенные ресурсы, для достижения некоторой цели. Математической моделью проекта является ориентированный взвешенный граф – сеть (сетевой график), где каждая дуга соответствует работе, а ее вес – времени, которое необходимо для выполнения этой работы; вершины соответствуют событиям – моментам завершения одних работ и началу выполнения других. В

классической сетевой модели подразумевается, что событие может наступить только тогда, когда будут завершены все работы, которые ему предшествуют. Предполагается, что событие не имеет продолжительности. Для построения сетевого графика привлекаются высококвалифицированные специалисты предметной области, а сам процесс носит итерационный характер.

Сетевой график – это инструмент временного анализа проекта и основа для составления календарного плана его реализации. К основным временным параметрам относятся следующие [3]: раннее и позднее время наступления события, критическое время, резервы времени работ и событий.

Критическое время $T_{кр}$ – время, необходимое для реализации проекта.

Под событием в сетевом графике подразумевается вершина, при этом входящие дуги соответствуют работам, которые завершились, а выходящие – работам, для которых данное событие определяет момент начала. Предполагая, что работа над проектом начинается в момент времени, равный нулю, под временем наступления события будем понимать время окончания всех работ, которые ему предшествуют.

Различают раннее и позднее время наступления события. Раннее время наступления i -го события $t_p(i)$ – время, раньше которого данное событие наступить не может (не будут завершены работы, которые ему предшествуют), а позднее время наступления i -го события $t_n(i)$ – время, позже которого событие наступить не должно (иначе увеличится общее время реализации проекта).

Особенностью параметров $T_{кр}$, $t_p(i)$, $t_n(i)$ является то, что они определяются на основе алгоритма нахождения максимального пути в бесконтурном ориентированном графе. Путь, на котором достигается время реализации всего проекта $T_{кр}$, называется критическим, при этом в сетевом графике может быть несколько критических путей. Работы и события, лежащие на критическом пути, также называются критическими. Заметим, что для критических событий выполняется соотношение $t_p(i) = t_n(i)$.

К параметрам сетевого графика также относятся резервы времени работ:

- $R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t_{ij}$ – полный резерв времени работы (i, j) ;
- $R_c(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t_{ij}$ – свободный резерв времени работы (i, j) ;
- $R_n(i, j) = \max\{0, t_p(j) - t_n(i) - t_{ij}\}$ – независимый резерв времени работы (i, j) .

Критические работы и события не имеют резервов времени, поэтому увеличение продолжительности критической работы ввиду непредвиденных обстоятельств приводит к увеличению $T_{кр}$, поэтому при планировании работ проекта критические работы требуют бесперебойного обеспечения ресурсами и контроля за выполнением [1].

Важнейшая задача анализа сетевого графика заключается в том, чтобы определить, как можно использовать резервы времени некритических работ, чтобы улучшить ситуацию с критическими работами [8]. Если ресурсы переносятся с учетом резервов времени с одной работы проекта на другую, то продолжительность первой работы уменьшается, а второй увеличивается. Так как продолжительности работ изменились, то можно ожидать, что и критическое время изменится. Поскольку критические работы не имеют резервов, то целесообразно переносить ресурсы с некритических работ на критические.

Алгоритм оптимизации сетевого графика. Предположим, что для проекта найдены: время $T_{кр}$, необходимое для реализации проекта; временные параметры $t_p(i), t_n(i)$ для каждого события, а на их основе резервы времени работ. Рассмотрим следующую задачу: пусть для реализации проекта выделены определенные ресурсы ограниченного объема; требуется определить такое их распределение между работами проекта, которое минимизировало бы $T_{кр}$.

Как отмечалось выше, в качестве основы для оптимизации может служить предположение о возможности переноса ресурсов с некритической работы на критическую с целью уменьшения времени выполнения критической работы, что в свою очередь повлияет на длину критического пути, т. е. на $T_{кр}$.

Предположим, что в сетевом графике существует несколько путей из начального события в завершающее, и $T_{кр}$ – длина максимального пути. Рассмотрим процесс перераспределения ресурсов, целью которого является изменение продолжительности работ таким образом, чтобы все пути из исходного события в завершающее стали критическими с новым критическим временем $T_{кр}^{нов} \leq T_{кр}$. Заметим, что получается выигрыш во времени, но план реализации проекта становится более напряженным и требует для своей реализации бесперебойного обеспечения проекта ресурсами.

Введем основные предположения, в рамках которых будет осуществляться оптимизация проекта.

1. Будем считать, что продолжительность t_{ij} работы (i, j) есть функция от выделенных на ее выполнение ресурсов r_{ij} , причем добавление ресурсов приводит к уменьшению продолжительности работы, а сокращение – к увеличению продолжительности работы, но существует минимально необходимый объем ресурсов r_{ij}^{min} , которому соответствует максимальное время продолжительности t_{ij}^{max} работы (i, j) . Возможна ситуация (существует некоторый порог), когда увеличение ресурсов не влияет на продолжительность работы. Данная зависимость может быть описана непрерывной, монотонно убывающей функцией f с горизонтальной асимптотой, проходящей через точку t_{ij}^{min} . Кроме того, $t_{ij}^{max} = f(r_{ij}^{min})$. Таким образом, для каждой работы (i, j) целесообразно задать минимальное t_{ij}^{min} и максимальное t_{ij}^{max} время выполнения. В общем случае для каждой работы (i, j) функция f_{ij} описывает зависимость времени выполнения работы от выделенных для нее ресурсов.

2. Известно, что для некритических работ $R_n(i, j) > 0$, но $R_c(i, j) \leq R_n(i, j)$ и $R_c(i, j) \geq 0$, поэтому при выборе некритической работы, с которой будут переноситься ресурсы, необходимо учитывать именно свободный резерв $R_c(i, j)$.

3. Поскольку желательно сократить количество итераций для оптимизации сетевого графика и целесообразно на каждой итерации получить хотя бы один новый критический путь, то выбирать некритическую работу с ненулевым свободным резервом нужно на тех путях, длина которых ближе к длине критического пути.

4. Пусть (i, j) – некритическая работа с ненулевым свободным резервом и r_{ij} – величина ресурсов, выделенных на ее выполнение; (l, k) – критическая работа, на которую ресурсы переносятся с работы (i, j) ; x_{ij} – величина переносимых ресурсов с работы (i, j) , а x_{lk} – величина перенесенных ресурсов на работу (l, k) , тогда должны выполняться следующие условия:

а) $0 < x_{ij} < r_{ij}$ – условие допустимости переноса для работы (i, j) : величина перенесенных ресурсов не должна превышать их объем;

б) $x_{ij} = x_{lk}$ – условие баланса для пары работ: величины ресурсов, переносимых с работы (i, j) и перенесенных на работу (l, k) , должны совпадать;

в) $\sum_{\{(i,j)\}} x_{ij} = \sum_{\{(l,k)\}} x_{lk}$ – условие баланса для множества работ: в общем случае суммарный объем ресурсов, переносимых с множества работ $\{(i, j)\}$, должен совпадать с объемом ресурсов, перенесенных на множество работ $\{(l, k)\}$.

5. Изменение ресурсного обеспечения работ приводит к изменению их продолжительности в соответствии с формулами:

$$t_{ij}^{\text{HOB}} = f_{ij}(r_{ij} - x_{ij}) > t_{ij}, t_{lk}^{\text{HOB}} = f_{lk}(r_{lk} + \underbrace{x_{lk}}_{x_{ij}}) < t_{lk}.$$

В предположении, что зависимость между продолжительностью работы и выделенными для ее выполнения ресурсами линейная, и $\frac{x_{ij}}{r_{ij}}$ – доля переносимых ресурсов (а следовательно, и перенесенных ресурсов $\frac{x_{lk}}{r_{lk}}$), получим с учетом обозначений $c_{ij} = \frac{1}{r_{ij}}$ и $c_{lk} = \frac{1}{r_{lk}}$ следующие формулы для определения новых времен выполнения соответствующих работ:

$$t_{ij}^{\text{HOB}} = t_{ij}(1 + c_{ij}x_{ij}), t_{lk}^{\text{HOB}} = t_{lk}(1 - c_{lk}x_{lk}). \quad (1)$$

6. Перенос средств с некритической работы (i, j) на критическую работу (l, k) приводит к следующему изменению длин путей, включающих работы (i, j) и (l, k) :

$$T_{(l,k)}^{\text{HOB}} = T_{(l,k)} - t_{lk}c_{lk}x_{lk}, T_{(i,j)}^{\text{HOB}} = T_{(i,j)} + t_{ij}c_{ij}x_{ij}. \quad (2)$$

В общем случае, когда ресурсы переносятся с нескольких некритических работ $\{(i, j)\}$ на несколько критических работ $\{(l, k)\}$, формулы для расчета новых продолжительностей работ приобретают следующий вид:

$$T_{\{(l,k)\}}^{\text{HOB}} = T_{\{(l,k)\}} - \sum_{\{(l,k)\}} t_{lk}c_{lk}x_{lk}, T_{\{(i,j)\}}^{\text{HOB}} = T_{\{(i,j)\}} + \sum_{\{(i,j)\}} t_{ij}c_{ij}x_{ij}.$$

7. В процессе перераспределения ресурсов необходимо обеспечить выполнение условия допустимости для величины переносимых ресурсов x_{ij} . Для этого потребуем, чтобы выполнялось ограничение $t_{ij}^{\text{HOB}} \leq t_{ij} + R_c(i, j)$, которое, с учетом определения t_{ij}^{HOB} , преобразуется к виду $t_{ij} + t_{ij}c_{ij}x_{ij} \leq t_{ij} + R_c(i, j)$. Так как все величины здесь неотрицательны, то получим следующее ограничение на величину переносимых средств с работы (i, j) :

$$x_{ij} \leq \frac{R_c(i, j)}{t_{ij}c_{ij}}. \quad (3)$$

Взяв за основу перечисленные выше предположения, сформулируем алгоритм для оптимизации сетевого графика, идея которого состоит в последовательном переносе ресурсов с некритических работ на критические до тех пор, пока все пути их исходного события в завершающее не станут критическими с одинаковой длиной, равной новому критическому времени.

Шаг 1. Для каждого пути из исходного события в завершающее L_i с длиной T_i найти резерв $R(L_i) = T_{\text{кр}} - T_i$ и упорядочить пути по убыванию резервов.

Шаг 2. Последовательно выполнить следующие действия:

а) из всех некритических путей выбрать любой путь L' длины T' , который является ближайшим к критическому пути и выделить на нем некритические работы (i, j) с ненулевым свободным резервом $R_c(i, j)$;

б) для работы (i, j) определить условие допустимости величины переносимых ресурсов x_{ij} в виде ограничения (3);

в) с учетом перечисленных выше предположений составить систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} x_{ij} = x_{lk}, \\ T' + t_{ij}c_{ij}x_{ij} = T_{\text{кр}} - t_{lk}c_{lk}x_{lk} \end{cases}$$

и найти ее решение x_{ij} и x_{lk} .

Шаг 3. Если найденное значение x_{ij} удовлетворяет условию допустимости, то определяются новые продолжительности работ $t_{ij}^{\text{нов}}$ и $t_{lk}^{\text{нов}}$ по формуле (1), и новое критическое время $T_{\text{кр}}^{\text{нов}}$ по формуле (2), равное длине полученных критических путей.

Шаг 4. Если в сетевом графике еще остались некритические пути, то определить их резервы, упорядочить по близости к критическим путям и перейти к шагу 2. Иначе все пути стали критическими и определено новое время выполнения проекта.

Результаты и обсуждение

Рассмотрим сетевой график, представленный на Рисунке 1. Здесь каждой дуге соответствует вес – продолжительность работы; справа перечислены все пути из исходного события в завершающее; светлым цветом на графике выделен максимальный путь.

В Таблице 1 представлена исходная информация для оптимизации сетевого графика. Путь L_1 является критическим с длиной $T_{\text{кр}} = 50$. Определим резервы некритических путей $R(L_2) = 13$, $R(L_3) = 7$, $R(L_4) = 9$, ближайшим к критическому пути является путь L_3 . На этом пути имеется лишь одна некритическая работа (5,8) с ненулевым свободным резервом.

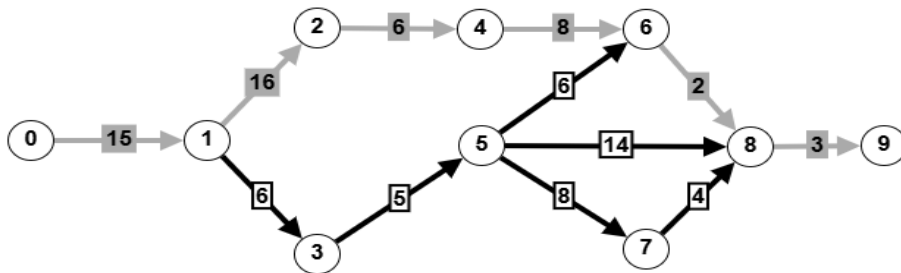


Рисунок 1 – Исходный сетевой график
Figure 1 – The original network graph

Здесь $L_1 = (0,1,2,4,6,8,9)$, $T_1 = 50$; $L_2 = (0,1,3,5,6,8,9)$, $T_2 = 37$; $L_3 = (0,1,3,5,8,9)$, $T_3 = 43$; $L_4 = (0,1,3,5,7,8,9)$, $T_4 = 41$.

Таблица 1 – Расчетная таблица (после первой итерации)
Table 1 – Calculation table (after the first iteration)

(i, j)	t_{ij}	b_{ij}	$R_c(i, j)$	c_{ij}
(0,1)	15	4	0	0,25
(1,2)	16	2	0	0,5
(1,3)	6	3	0	0,333
(2,4)	6	1	0	0
(3,5)	5	2	0	0,5
(4,6)	8	3	0	0,333
(5,6)	6	5	13	0,2
(5,7)	8	2	0	0,5
(5,8)	14	3	7	0,333
(6,8)	2	2	0	0,5
(7,8)	4	2	9	0,5
(8,9)	3	1	0	1

В Таблице 2 приведены ранние времена наступления событий $t_p(i)$.

Таблица 2 – Ранние времена наступления событий

Table 2 – Early times of occurrence of events

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_p(i)$	0	15	31	1	37	6	45	34	47	50

Условие допустимости на величину переносимых с нее ресурсов имеет вид:

$$x_{58} \leq \frac{7}{14 \cdot 0,333} \approx 1,502.$$

Выберем на критическом пути, например, работу (1,2). Для определения величины переносимых средств составим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{58} = x_{12}, \\ 50 - 16 \cdot 0,5 \cdot x_{12} = 43 + 14 \cdot 0,333 \cdot x_{58}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{58} = x_{12}, \\ 50 - 8 \cdot x_{12} = 43 + 4,662 \cdot x_{58}, \end{cases}$$

откуда найдем $x_{58} = x_{12} = 0,553$, причем видно, что условие допустимости выполняется $0,533 < 1,502$. Найдем новые продолжительности работ и новый критический путь

$$t_{12}^{\text{нов}} = 16 \cdot (1 - 0,533 \cdot 0,5) = 11,576; t_{58}^{\text{нов}} = 14 \cdot (1 + 0,533 \cdot 0,333) = 16,576;$$

$$T_{\text{кр}}^{\text{нов}} = 50 - 16 \cdot 0,553 \cdot 0,5 = 45,576.$$

Новый сетевой график представлен на Рисунке 2.

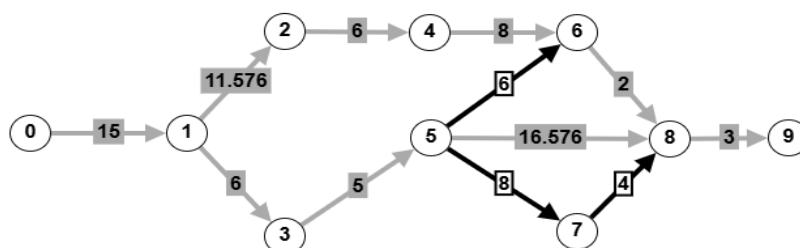


Рисунок 2 – Сетевой график содержит два критических пути

Figure 2 – The network graph contains two critical paths

В Таблицах 3 и 4 приведены расчеты для нового сетевого графика.

Таблица 3 – Расчетная таблица (после второй итерации)

Table 3 – Calculation table (after the second iteration)

(i, j)	t_{ij}	b_{ij}	$R_c(i, j)$	c_{ij}
(0,1)	15	4	0	0,25
(1,2)	11,576	2,533	0	0,392
(1,3)	6	3	0	0,333
(2,4)	6	1	0	1
(3,5)	5	2	0	0,5
(4,6)	8	3	0	0,333
(5,6)	6	5	8,576	0,2
(5,7)	8	2	0	0,5
(5,8)	16,576	2,447	0	0,409
(6,8)	2	2	0	0,5
(7,8)	4	2	4,576	0,5
(8,9)	3	1	0	1

Таблица 4 – Ранние времена наступления событий
Table 4 – Early times of occurrence of events

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_p(i)$	0	15	26,576	21	32,576	26	40,576	34	42,576	45,576

Так как продолжительности некоторых работ изменились, то изменятся и длины путей: $T_1 = 45,576$, $T_2 = 37$, $T_3 = 45,576$, $T_4 = 41$. Заметим, что появилось уже два критических пути с длиной $T_{кр} = T_1 = T_3 = 45,576$. Соответствующие резервы путей имеют следующий вид: $R(L_1) = 0$, $R(L_2) = 8,576$, $R(L_3) = 0$, $R(L_4) = 4,576$. Путь L_4 является ближайшим к критическим путям T_1 и T_3 . Ненулевой свободный резерв имеет работа (7,8), составим условие допустимости для нее:

$$x_{78} \leq \frac{4,576}{4 \cdot 0,5} \approx 2,288.$$

Для переноса ресурсов выберем критические работы (2,4) и (5,8), и составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{78} = x_{24} + x_{58}, \\ 45,576 - 6 \cdot 1 \cdot x_{24} = 41 + 4 \cdot 0,5 \cdot x_{78}, \\ 45,576 - 16,576 \cdot 0,4 \cdot x_{58} = 41 + 4 \cdot 0,5 \cdot x_{78}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{78} = x_{24} + x_{58}, \\ x_{24} = 0,572 - 0,25x_{58}, \\ 45,576 = 8,780x_{58} + 1,144 - 0,5x_{58}. \end{cases}$$

Ее решение: $x_{58} = 0,414$, $x_{24} = 0,469$, $x_{78} = 0,883$, причем условие допустимости $0,883 < 2,288$ выполняется. Вычислим новые значения параметров:

$$t_{58}^{нов} = 16,576 \cdot (1 - 0,409 \cdot 0,414) = 13,762; t_{24}^{нов} = 6 \cdot (1 - 1 \cdot 0,469) = 3,186;$$

$$t_{78}^{нов} = 4 \cdot (1 + 0,883 \cdot 0,5) = 5,762; T_{кр}^{нов} = 45,576 - 6 \cdot 1 \cdot 0,469 = 42,762.$$

Новый сетевой график представлен на Рисунке 3. Найдем новые длины путей и соответствующие им резервы:

$$T_1 = 42,762, T_2 = 37, T_3 = 42,762, T_4 = 42,762;$$

$$R(L_1) = 0, R(L_2) = 5,762, R(L_3) = 0, R(L_4) = 0.$$

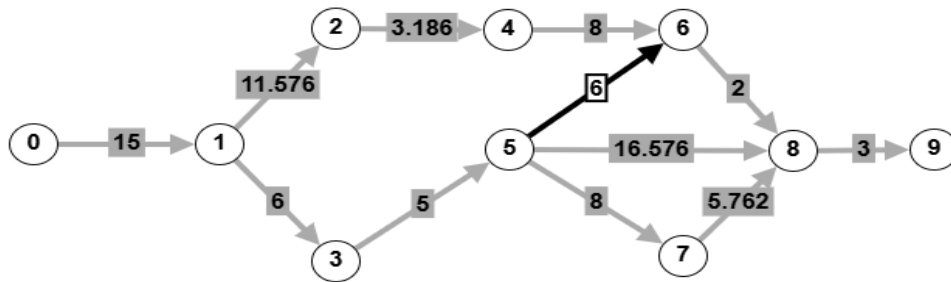


Рисунок 3 – Сетевой график содержит три критических пути
Figure 3 – The network graph contains three critical paths

В данном случае имеем три критических пути T_1 , T_3 , T_4 с длиной $T_{кр} = 42,762$. Некритический путь L_2 обладает единственной некритической работой (5,6), которая имеет ненулевой свободный резерв $R_c(5,6) = 5,762$. Будем переносить ресурсы с данной работы. В Таблицах 5 и 6 приведены новые величины рассматриваемых параметров.

Условие допустимости имеет вид

$$x_{56} \leq \frac{5,762}{6 \cdot 0,2} \approx 4,802.$$

Перенесем средства с работы (5,6) на критические работы (4,6), (5,7) и (5,8). Для определения величины переносимых средств составим систему уравнений

$$\begin{cases} x_{56} = x_{46} + x_{58} + x_{57}, \\ 42,762 - 8 \cdot 0,333 \cdot x_{46} = 37 + 6 \cdot 0,2 \cdot x_{56}, \\ 42,762 - 8 \cdot 0,5 \cdot x_{57} = 37 + 6 \cdot 0,2 \cdot x_{56}, \\ 42,762 - 13,762 \cdot 0,35 \cdot x_{58} = 37 + 6 \cdot 0,2 \cdot x_{56}, \end{cases}$$

решение которой имеет следующий вид: $x_{58} = 0,598$, $x_{57} = 0,720$, $x_{46} = 1,081$, $x_{56} = 2,399$.

Таблица 5 – Расчетная таблица (после третьей итерации)

Table 5 – Calculation table (after the third iteration)

(i, j)	t_{ij}	b_{ij}	$R_c(i, j)$	c_{ij}
(0,1)	15	4	0	0,25
(1,2)	11,576	2,533	0	0,392
(1,3)	6	3	0	0,333
(2,4)	3,186	1,469	0	0,681
(3,5)	5	2	0	0,5
(4,6)	8	3	0	0,333
(5,6)	6	5	5,762	0,2
(5,7)	8	2	0	0,5
(5,8)	13,762	2,861	0	0,35
(6,8)	2	2	0	0,5
(7,8)	5,762	1,117	0	0,895
(8,9)	3	1	0	1

Таблица 6 – Ранние времена наступления событий

Table 6 – Early times of occurrence of events

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_p(i)$	0	15	26,576	21	29,762	26	37,762	34	39,762	42,762

Заметим, что условие допустимости $2,399 < 4,802$ выполняется.

Новые продолжительности работ и новое критическое время изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned} t_{56}^{\text{нов}} &= 6 \cdot (1 + 2,399 \cdot 0,2) = 8,882; \quad t_{46}^{\text{нов}} = 8 \cdot (1 - 1,081 \cdot 0,333) = 5,120; \\ t_{57}^{\text{нов}} &= 8 \cdot (1 - 0,720 \cdot 0,5) = 5,120; \quad t_{58}^{\text{нов}} = 13,762 \cdot (1 - 0,598 \cdot 0,35) = 10,882; \\ T_{\text{кр.}}^{\text{нов}} &= 42,762 - 8 \cdot 0,333 \cdot 1,081 = 39,882. \end{aligned}$$

На Рисунке 4 представлен новый сетевой график, а в Таблицах 7 и 8 – новые значения рассматриваемых параметров, при этом новые длины путей $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = 39,882$. Таким образом, все пути стали критическими, а новое критическое время составляет $T_{\text{кр}} = 39,882$. Согласно критерию оптимальности, сетевой график стал оптимальным. Поскольку все работы – критические, то при планировании они должны быть в полной мере обеспечены ресурсами.

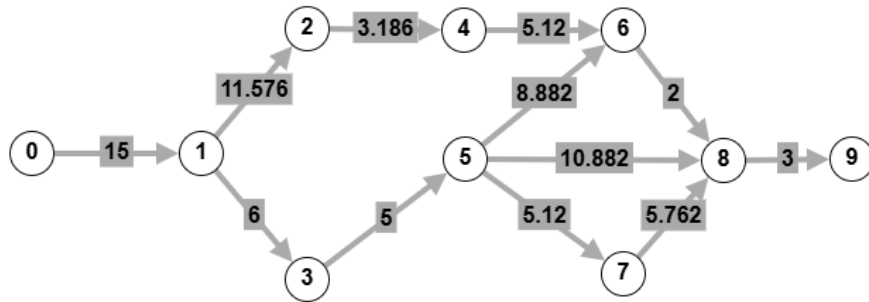


Рисунок 4 – Все пути являются критическими
Figure 4 – All paths are critical

Таблица 7 – Расчетная таблица (после четвертой итерации)
Table 7 – Calculation table (after the fourth iteration)

(i, j)	t_{ij}	b_{ij}	$R_c(i, j)$
(0,1)	15	4	0
(1,2)	11,576	2,553	0
(1,3)	6	3	0
(2,4)	3,186	1,469	0
(3,5)	5	2	0
(4,6)	5,12	4,081	0
(5,6)	8,882	2,601	0
(5,7)	5,12	2,72	0
(5,8)	10,882	3,459	0
(6,8)	2	2	0
(7,8)	5,762	1,117	0
(8,9)	3	1	0

Таблица 8 – Ранние времена наступления событий
Table 8 – Early times of occurrence of events

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_p(i)$	0	15	26,576	21	29,762	26	34,882	31,12	36,882	39,882

Перераспределение ресурсов привело к изменению продолжительности работ. Введем величину $\frac{b_{ij}}{t_{ij}}$ – коэффициент напряженности использования ресурсов относительно работы (i, j) , который характеризует количество ресурсов, выделяемое работе (i, j) в единицу времени. Здесь $b_{ij} \in [0, 1]$ – доля общего ресурса проекта, используемого работой (i, j) .

Как показывает анализ, в связи с перераспределением ресурсов коэффициент напряженности для одних работ уменьшился, для других – увеличился, для третьих – не изменился. Тогда агрегированную оценку количества ресурсов, выделяемых в единицу времени, можно рассматривать как обобщенную характеристику напряженности сетевого графика – $F_{\text{напр}}$. Для агрегирования коэффициентов напряженности можно использовать различные подходы. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$ – вектор коэффициентов напряженности для работ проекта. Если важно учитывать значимость работ, то целесообразно использовать типы сверток с весами, отражающими их приоритет [9]. Если ресурсы одинаково важны, то рекомендуется использовать порядковый оператор взвешенного агрегирования OWA [10]. В отличие от предыдущего случая, здесь веса формализуют принцип «нечеткого большинства», который может быть положен в

основу стратегии агрегирования частных оценок (коэффициентов напряженности отдельных работ). Вектор весов определяется на основе функции квантификации, которая соответствует таким лингвистическим кванторам, как большинство, как можно больше, по крайней мере половина и т. д. Если, например, $Q_2(x) = x^2$, то $w_i = \frac{(2i-1)}{n^2}$, $(i = \overline{1, n})$. Пусть $w = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$ – вектор весов, тогда n -мерный порядковый оператор взвешенного агрегирования $F(x, w) = \sum_{i=1}^n w_i x_{\sigma(i)}$, где $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ – перестановка, такая, что $x_{\sigma(1)} \geq \dots \geq x_{\sigma(n)}$, определяет комплексную оценку. Результаты расчетов, согласно данному подходу, показали, что комплексная оценка напряженности для исходной сетевой модели составляет $F_{\text{напр}}^0 = 0,68$, а для оптимизированного сетевого графика – $F_{\text{напр}}^{\text{опт}} = 0,82$.

Заключение

Управление проектом – это деятельность, связанная с координацией различных видов работ в условиях ограниченных ресурсов. Перераспределение ресурсов позволяет сократить продолжительности некоторых работ, но делает проект более напряженным в том смысле, что задержка с обеспечением ресурсами в необходимом объеме приводит к увеличению критического времени для реализации проекта. В статье предложен алгоритм оптимизации сетевого графика за счет перераспределения ресурсов, при этом предполагается, что зависимость времени выполнения работы от выделенных для нее ресурсов линейная. В дальнейшем предполагается исследовать некоторые другие виды зависимости.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Гельруд Я.Д., Логиновский О.В. *Управление проектами: методы, модели, системы*. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ; 2015. 331 с.
2. *Сетевые модели в управлении*. Москва: Эгвес; 2011. 442 с.
3. Зуховицкий С.И., Радчик И.А. *Математические методы сетевого планирования*. Москва: Наука; 1965. 296 с.
4. Голенко-Гинзбург Д.И. *Стохастические сетевые модели планирования и управления разработками*. Воронеж: Научная книга; 2010. 283 с.
5. Леденев М.Ю., Сергиенко М.А. Алгоритм расчета нечетких и интервальных оценок временных параметров сетевой модели проекта. *Международный научно-исследовательский журнал*. 2021;(6-1):118–128. <https://doi.org/10.23670/IRJ.2021.108.6.019>
Ledenev M.Yu., Sergienko M.A. An Algorithm for Calculating Fuzzy and Interval Estimations of the Time Parameters of Network Model of a Project. *International Research Journal*. 2021;(6-1):118–128. (In Russ.). <https://doi.org/10.23670/IRJ.2021.108.6.019>
6. Леденева Т.М., Черменев Д.А. Нечеткая модель проекта с продолжительностями работ в форме обобщенных гауссовых чисел. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2015;(2):72–81.
Ledeneva T.M., Dermanew D.A. Fuzzy Model of the Project with Duration Works in the Form of a Generalized Gaussian Numbers. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*. 2015;(2):72–81. (In Russ.).
7. Шашкин А.И., Ширяев М.М. Календарное планирование работ по проекту на основе нечетких исходных данных. *Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия*. 2008;(3):208–216.

- Shashkin A.I., Shiryaev M.M. Job Scheduling Based on Fuzzy Input Data. *Bulletin of Samara State University. Natural Science Series*. 2008;(3):208–216. (In Russ.).
8. Глушков А.Ю., Дорофеев Д.В., Мойсеев С.И., Перевалова О.С. Оптимизационная математическая модель перераспределения ресурсов в управлении проектами. В сборнике: *Системное моделирование социально-экономических процессов: труды 43-ой Международной научной школы-семинара, 13–18 октября 2020 года, Воронеж, Россия*. Воронеж: Истоки; 2020. С. 422–426.
9. Beliakov G., Sola H.B., Calvo T. *A Practical Guide to Averaging Functions*. Cham: Springer; 2016. 352 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-24753-3>
10. Леденева Т.М., Левкина И.Н. Обзор основных классов операторов порядкового взвешенного агрегирования. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2022;(1):5–31. <https://doi.org/10.17308/sait.2022.1/9198>
Ledeneva T.M., Levkina I.N. Review of Main Classes of Order Weighted Aggregation Operators. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*. 2022;(1):5–31. (In Russ.). <https://doi.org/10.17308/sait.2022.1/9198>

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Леденева Татьяна Михайловна, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и прикладных информационных технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: ledeneva-tm@yandex.ru
ORCID: [0000-0002-3944-2266](https://orcid.org/0000-0002-3944-2266)

Tatyana M. Ledeneva, Doctor of Engineering Sciences, Professor, Head of the Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Шишов Максим Михайлович, аспирант кафедры вычислительной математики и прикладных информационных технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация.
e-mail: m.m.shishov@mail.ru
ORCID: [0009-0000-5156-2482](https://orcid.org/0009-0000-5156-2482)

Maxim M. Shishov, Postgraduate, Department of Computational Mathematics and Applied Information Technologies, Voronezh State University, Voronezh, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 28.05.2025; одобрена после рецензирования 19.06.2025; принята к публикации 25.06.2025.

The article was submitted 28.05.2025; approved after reviewing 19.06.2025; accepted for publication 25.06.2025.