

УДК 519.876.5

DOI: [10.26102/2310-6018/2025.51.4.049](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2025.51.4.049)

Компьютерное моделирование звуковых полей в образцах горных пород с включениями псевдофрактальной структуры

В.Н. Кризский¹, В.В. Беляев¹, О.О. Адамович², М.А. Горелик¹✉

¹Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

²INOVA Geophysical, Дубай, Объединённые Арабские Эмираты

Резюме. В работе рассматриваются математические и компьютерные модели и методы изучения образцов пород с включениями псевдофрактальной структуры и перспективы применения компьютерного моделирования для изучения их строения. Подобные структуры имеют место, например, в трещиноватых горных массивах. Они, в свою очередь, могут являться коллекторами углеводородов, изучение и исследование свойств которых обуславливает актуальность исследования. В статье предложен способ компьютерного моделирования анизотропных по упругим параметрам псевдофрактальных включений в образцах горных пород в виде параллелепипедов и эллипсоидальных луночек. Для математической модели распространения звуковой волны в геологическом образце породы, насыщенной анизотропными фрактальными включениями (микроанизотропия), применяется способ расчета на основе объемных интегральных представлений и интегральных уравнений поля в частотной области. В статье представлены результаты проведенных вычислительных экспериментов по комплексному исследованию трещиноватых коллекторов, с возможностью расширения исследуемой области и моделированием распространения в ней разных видов полей. Материалы статьи представляют практическую ценность для исследования трещиноватых горных пород на больших глубинах с помощью применения полученного алгоритма генерации анизотропных псевдофрактальных включений и расчета в их присутствии сейсмических полей.

Ключевые слова: псевдофрактальные анизотропные включения, трещиноватость, компьютерное моделирование, сейсмическое поле, объемные интегральные представления.

Для цитирования: Кризский В.Н., Беляев В.В., Адамович О.О., Горелик М.А. Компьютерное моделирование звуковых полей в образцах горных пород с включениями псевдофрактальной структуры. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2025;13(4). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=2109> DOI: 10.26102/2310-6018/2025.51.4.049

Computer simulation of sound fields in rock samples with inclusions of pseudofractal structure

V.N. Krizsky¹, V.V. Belyaev¹, O.O. Adamovich², M.A. Gorelik¹✉

¹Empress Catherine II Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg,
the Russian Federation

²INOVA Geophysical, Dubai, United Arab Emirates

Abstract. This paper examines mathematical and computer models and methods for studying rock samples containing pseudofractal inclusions and the potential for using computer modeling to investigate their structure. Such structures are found, for example, in fractured rock massifs. These structures, in turn, can serve as hydrocarbon reservoirs, and the study and investigation of their properties makes this research relevant. The article proposes a method for computer modeling pseudofractal inclusions in rock samples in the form of parallelepipeds and ellipsoidal dimples, with anisotropic elastic parameters. A calculation method based on volumetric integral representations and integral field equations in the frequency domain is used to mathematically model sound wave propagation in a geological rock sample saturated with anisotropic fractal inclusions (microanisotropy).

The article presents the results of computational experiments on a comprehensive study of fractured reservoirs, with the possibility of expanding the study area and modeling the propagation of various types of fields within it. The materials of the article are of practical value for the study of fractured rocks at great depths by applying the obtained algorithm for generating anisotropic pseudofractal inclusions and calculating seismic fields in their presence.

Keywords: pseudofractal anisotropic inclusions, fracturing, computer simulation, seismic field, volumetric integral representations.

For citation: Krizsky V.N., Belyaev V.V., Adamovich O.O., Gorelik M.A. Computer simulation of sound fields in rock samples with inclusions of pseudofractal structure. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2025;13(4). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/pdf?id=2109>
DOI: 10.26102/2310-6018/2025.51.4.049

Введение

Изучение трещиноватых пород является актуальной задачей при поиске и разведке месторождений нефти и газа, при инженерно-геологическом изучении разреза для проектирования зданий и сооружений, при планировании разработки месторождений минерального сырья и для многих других отраслей. Актуальность разработки технологий, повышающих достоверность исследований по оценке свойств и влияния трещин на ёмкость и связанность, физико-механические свойства массивов, деформационно-прочностные характеристики, связана со сложностью объекта исследования и отсутствием единого подхода к изучению трещиноватых массивов.

В настоящее время, несмотря на активное изучение альтернативных источников энергии, вклад углеводородных ресурсов в энергетический сектор остается значительным. Большая часть месторождений традиционных залежей значительно выработана, ввиду чего основой расширения ресурсной базы является поиск новых месторождений нефти и газа, представленных более сложными для поиска, разведки и разработки запасами [1], в том числе, находящимися на больших глубинах [2], в породах фундамента и переходных комплексов [3], и освоение малоизученных регионов [4, 5], включая шельфовые зоны [6].

Месторождения нефти на больших глубинах зарегистрированы в Китае, в Мексиканском заливе. Изыскание таких месторождений проводится во многих регионах. Глубинные месторождения характеризуются значительным тепловым потоком, миграцией углеводородов по вертикальным трещинным каналам и трещиноватым структурам, высоким давлением на глубинах расположения коллекторов. Источником флюида углеводородов в таких резервуарах могут быть термобарические процессы, протекающие в толще земли.

Запасы нефти в трещиноватых коллекторах огромны, однако они относятся к категории трудноизвлекаемых. Указанные коллекторы требуют особого подхода при выборе технологий для повышения эффективности их разработки [7]. При изучении трещиноватых коллекторов необходима реализация комплексного подхода к их изучению и применение современных технологий [8, 9]. К основным методам, необходимым для качественной оценки фильтрационно-емкостного потенциала сложных коллекторов, представленных трещиноватыми породами, относятся лабораторные исследования керна [10], геологическое, геомеханическое [11, 12] и гидродинамическое моделирование [13], интерпретация результатов геофизических исследований скважин [14] и полевых геофизических исследований [15, 16], а также методы математического моделирования [17, 18].

Одним из перспективных современных методов изучения пустотного пространства коллекторов является цифровой керн. В настоящее время разрабатываются технологии цифрового моделирования керна, позволяющие определять фильтрационно-емкостные свойства пород, используя методы математического моделирования с

достаточной степенью точности [19]. Получаемая в результате моделирования компьютерная модель основывается на данных керна, шлама, геофизических исследований скважин и может быть использована для моделирования процессов фильтрации.

Компьютерное моделирование является важным инструментом при изучении параметров горных пород и используется при решении множества задач в области геолого-геофизических, гидродинамических и геомеханических исследований. Повышение эффективности технологий разработки месторождений углеводородов, в особенности, коллекторы которых представлены трещиноватыми породами, неразрывно связано с применением современных решений, требующих корректного применения математических инструментов.

Одним из инструментов создания математических моделей образцов пород являются фракталы. Термин «фрактал» введен Бенуа Мандельбротом в 1975 г., однако математические основы теории заложены значительно раньше [20]. Известно, что фрактальные множества обладают свойством самоподобия, что теоретически обосновано Хатчинсоном и популяризировано Барнсли и применяется для моделирования многочисленных природных явлений [21]. Теория фракталов применяется в различных сферах научных исследований, в том числе для описания гидравлических и гидродинамических процессов, происходящих в почвах и породах [22, 23], а также при изучении свойств трещиноватых структур [24]. Широкое применение фракталы получили в изучении природных геологических объектов [25, 26] как при оценке внутреннего строения объектов рудных и нерудных месторождений [27, 28], так и при прогнозе процессов, протекающих в недрах [29, 30]. Бесконечная повторяемость фрактального включения посредством компьютерных программ не реализуется, в силу требований конечности алгоритма и окончания алгоритма на некотором конечном итерационном шаге. Это приводит к появлению псевдофрактальных (почти фрактальных) включений, к необходимости их генерации и моделированию геофизических полей в их присутствии. Результаты, изложенные в данной работе, отражают начальный этап комплексного исследования трещиноватых коллекторов псевдофрактальной структуры, связанный с математическим и компьютерным моделированием геологических образцов пород (микроуровень) и рассеивания в них звуковых полей с последующим возможным масштабированием на большие области (макроуровень) и другие виды полей, включая термодинамические.

Материалы и методы

Компьютерная модель образца горной породы с псевдофрактальным включением. Самоподобие – характеристическое свойство фрактала. Инвариантность относительно изменения шкалы является одной из форм самоподобия, при которой при любом приближении найдется по крайней мере одна часть основной фигуры, подобная целой фигуре. Повторяемость (самоподобие) структуры фрактала в подструктуре меньшего масштаба влечет использование рекурсивных программных процедур и функций. Для генерации трехмерного анизотропного фрактального включения в образце горной породы использован рекурсивный алгоритм, в основе которого лежит обращение к заданному пользователем шаблону фрактального множества. Задание шаблона, масштабируемого и внедряемого на каждом итерационном шаге построения, обеспечивает самоподобие.

В научной литературе известен алгоритм, основанный на произведении Кронекера (Kronecker product based fractals – KPDF), используемый для генерации плоских (2D) фракталов [31]. Для моделирования объемных (3D) фракталов требуется обобщение этого подхода, реализованное в данной работе. В основе KPDF алгоритма для 3D-генерации фрактала лежит следующее основное утверждение: «Произведение,

подобное произведению Кронекера, фрактального 3D-массива на любой другой фрактальный 3D-массив является фрактальным 3D-массивом». Для описания 3D-фрактала применяются трехмерные массивы, содержащие неотрицательные целые числа, среди которых, по крайней мере, должен быть один элемент равный нулю и один – не равный нулю. Рекуррентный алгоритм создания фрактального 3D-массива сводится к последовательному использованию произведения Кронекера.

Предусматривается построение шаблона, задающего фрактальную структуру. В качестве шаблона – начального фрактального 3D-массива – задается кубический массив, в котором символом «1» отмечены места расположения элементов замещения, остальные элементы массива полагаются равными нулю. Структура шаблона (Рисунок 1а) задает свойство самоподобия и является основой для моделирования образца горной породы, который будет содержать включения других пород, имеющих иные, отличные от вмещающей породы образца, физико-механические свойства. В последующем, в данный шаблон на отмеченные места встраивается «характерный фрагмент» – элемент замещения, который состоит из нескольких кубических конечных элементов, каждый из которых может иметь свои физико-механические свойства (Рисунок 1б). Окончательный вид включения с внедренным псевдофрактальным элементом замещения показан на Рисунке 1в. Фрактальная размерность представленного на Рисунке 1в включения, подсчитанная на основе алгоритма boxcount¹, составляет 2,44.

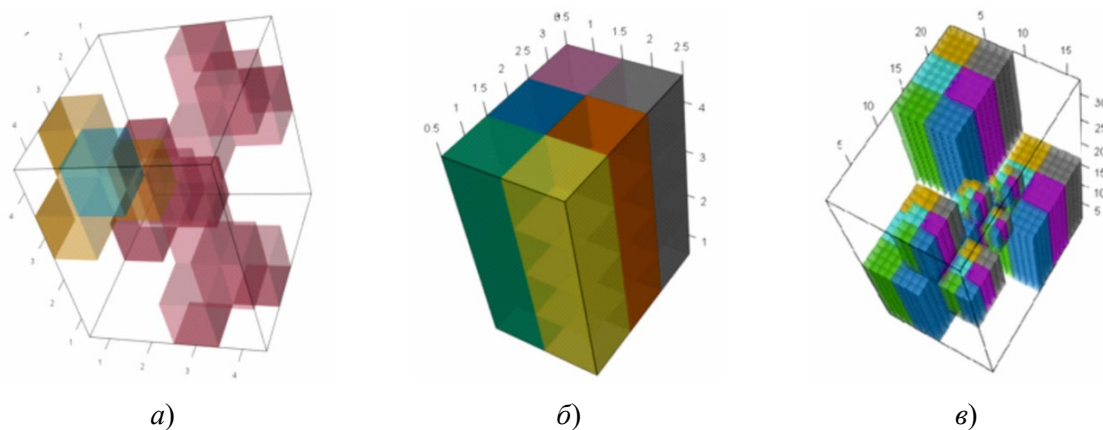


Рисунок 1 – К построению псевдофрактального образца горной породы на основе примитива «параллелепипед»: а) шаблон массива горной породы; б) элемент замещения; в) псевдофрактальное включение с внедренным элементом замещения

Figure 1 – To construct a pseudo-fractal rock sample based on the parallelepiped primitive:
a) rock mass template; b) substitution element; c) pseudo-fractal inclusion with a substituted element

Набор примитивов и типов фрактальных множеств в виде параллелепипедов для генерирования образцов породы расширен включениями в виде «луночек». Такого типа включения характерны для некоторых типов трещиноватых пород. Примитив «луночка» может быть смоделирован эллипсоидом заданием координат его центра и длин полуосей.

Внутренняя область эллипсоида дискретизируется кубическими элементами (Рисунок 2а) с присваиванием соответствующим элементам матрицы чисел, соответствующих номеру физического вещества в базе веществ изучаемых горных пород. Ориентация эллипсоида в пространстве задается углами поворота вокруг соответствующих осей и может быть произвольной. Построенный таким образом элемент замещения формирует псевдофрактальное множество (Рисунок 2б).

¹ Moisy F. boxcount. MATLAB Central. URL: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13063-boxcount> (дата обращения: 20.10.2025).

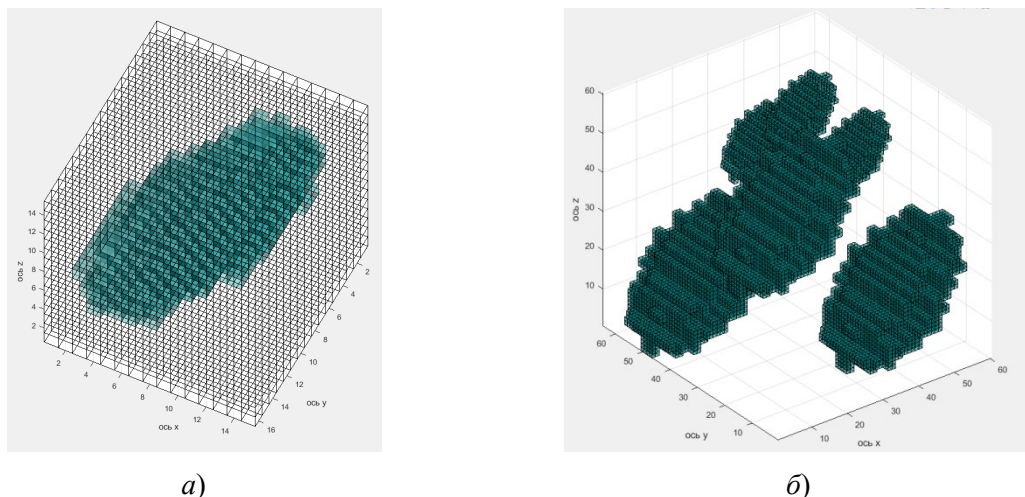


Рисунок 2 – К построению псевдофрактального образца горной породы на основе примитива «луночка»: а) дискретизированный элемент; б) псевдофрактальное включение
Figure 2 – To construct a pseudofractal rock sample based on the "hole" primitive:
a) discretized element; b) pseudofractal inclusion

Алгоритм построения образца породы, содержащего 3D-псевдофрактальные включения представлен на Рисунке 3.

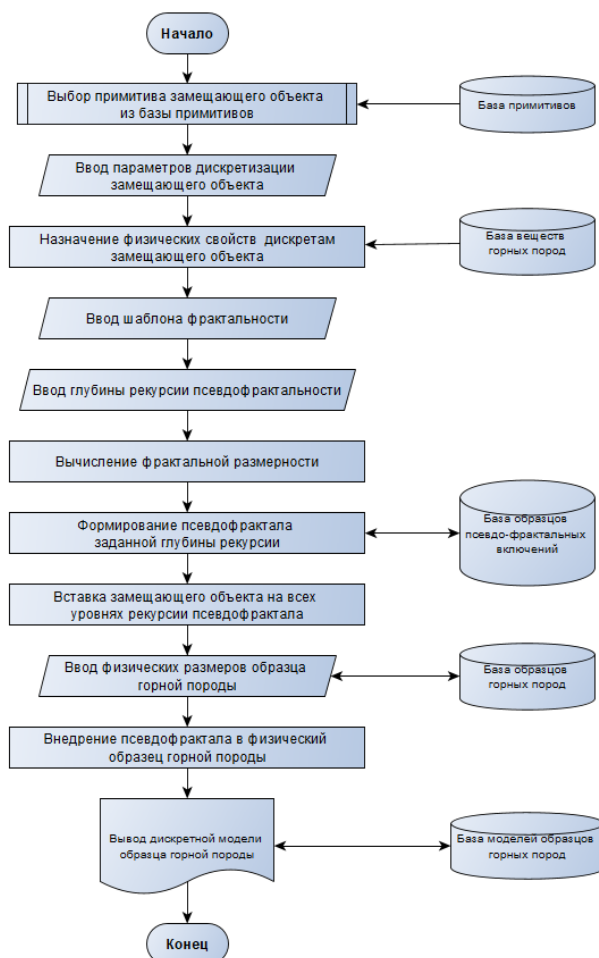


Рисунок 3 – Алгоритм построения компьютерной модели образца горной породы с 3D-псевдофрактальным включением
Figure 3 – Algorithm for constructing a computer model of a rock sample with a 3D pseudofractal inclusion

Математическая модель и способ вычисления звукового поля в образце горной породы. Сейсмические (звуковые) поля представимы системами дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка – системой уравнений теории упругости, составляющей основу теории сейсморазведки [32].

В частотной области уравнения теории упругости включают в себя уравнения равновесия [33] и закон Гука. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\operatorname{div} P_x + \rho \omega^2 S_x = -F_x, \quad \operatorname{div} P_y + \rho \omega^2 S_y = -F_y, \quad \operatorname{div} P_z + \rho \omega^2 S_z = -F_z, \quad (1)$$

где F_x, F_y, F_z – компоненты вектора объемных сторонних сил F , ρ – плотность, ω – частота, S_x, S_y, S_z – компоненты вектора смещений S , $P_x = iP_{xx} + jP_{xy} + kP_{xz}$ – вектор напряжений, возникающий в среде за счет действия сил в направлении оси x ; $P_y = iP_{yx} + jP_{yy} + kP_{yz}$ – вектор напряжений, возникающий в среде за счет действия сил в направлении оси y ; $P_z = iP_{zx} + jP_{zy} + kP_{zz}$ – вектор напряжений, возникающий в среде за счет действия сил в направлении оси z , i, j, k – орты декартовой системы координат.

Закон Гука $E = HP$ в векторном виде связывает 9-тикомпонентный вектор упругих напряжений $P = (P_x \ P_y \ P_z)^T$ с 9-тикомпонентным вектором деформаций $E = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \ \frac{\partial S}{\partial y} \ \frac{\partial S}{\partial z} \right)^T$ через матрицу упругих параметров H . Матрица H имеет размерность 9×9 элементов и описывает линейные упругие свойства среды. Общее количество упругих параметров в матрице H равно 81. Все материальные параметры, здесь и далее, являются функциями пространственных координат x, y, z и частоты ω . В теории сейсморазведки для сокращения размерности решаемых задач используют группы симметрий кристаллических пород матрицы H (сингонии). Условий симметрии на матрицу упругих параметров накладывать не будем. Линейность уравнений теории упругости позволяет использовать теорию матриц и матричную технику решения прямых и обратных задач сейсморазведки.

С учетом уравнения равновесия (1) и закона Гука получено уравнение баланса энергии упругих полей в виде [33]:

$$\operatorname{div}(S_x P_x + S_y P_y + S_z P_z) = \frac{\partial}{\partial x} S^T P_x + \frac{\partial}{\partial y} S^T P_y + \frac{\partial}{\partial z} S^T P_z = P^T B P - \rho \omega^2 S^2 - S F, \quad (2)$$

где $B = [H_x^T, H_y^T, H_z^T]$, где $H_x = [h_{xx}, h_{xy}, h_{xz}]$, $H_y = [h_{yx}, h_{yy}, h_{yz}]$, $H_z = [h_{zx}, h_{zy}, h_{zz}]$.

Интегрирование последнего выражения по объему V , ограниченному поверхностью ∂V , приводит его к виду:

$$\oint_{\partial V} (S_x P_x + S_y P_y + S_z P_z) n ds = \int_V (P^T B P - \rho \omega^2 S^2) dv - \int_V S F dv. \quad (3)$$

Умножим это выражение на $i\omega$, принимая во внимание, что в частотной области $i\omega S = V$ есть скорость смещения частиц. Получим

$$\oint_{\partial V} (V_x P_x + V_y P_y + V_z P_z) n ds = i\omega \int_V (P^T B P + \rho V^2) dv - \int_V V F dv \quad (3)$$

или в дивергентной форме

$$\operatorname{div}(V_x P_x + V_y P_y + V_z P_z) = \frac{\partial}{\partial x} V^T P_x + \frac{\partial}{\partial y} V^T P_y + \frac{\partial}{\partial z} V^T P_z = i\omega (P^T B P + \rho V^2) - V F. \quad (4)$$

Введем вектор $X = \begin{pmatrix} V \\ P \end{pmatrix}$ и матрицу параметров $A = \begin{pmatrix} \rho[1] & [0] \\ [0] & B \end{pmatrix}$, где $[1]$ – единичная матрица размером 3×3 , $[0]$ – нулевая матрица соответствующей размерности. В новых обозначениях получим:

$$\operatorname{div}(V_x P_x + V_y P_y + V_z P_z) = i\omega (X^T A X) - V F. \quad (5)$$

На основе формулы (5), с учетом принципа взаимности, может быть получено объемное интегральное представление.

Введя векторы:

$$X_1 = X_1(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = \begin{pmatrix} S^1 \\ gradS_x^1 \\ gradS_y^1 \\ gradS_z^1 \end{pmatrix}, X_2 = X_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = \begin{pmatrix} S^2 \\ gradS_x^2 \\ gradS_y^2 \\ gradS_z^2 \end{pmatrix}$$

и матрицу

$$\Delta A = \Delta A(x, y, z, \omega) = \begin{pmatrix} -\omega^2(\rho_2 - \rho_1)[1] & [0] \\ [0] & (U^2 - U^1)^T \end{pmatrix},$$

решение прямой задачи в терминах вектора смещения для случая известного поля X_2 в неоднородностях можно записать в виде:

$$\begin{aligned} S^2(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1) = \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} X_1^x(x, y, z, x_0, y_0, z_0)^T \\ X_1^y(x, y, z, x_0, y_0, z_0)^T \\ X_1^z(x, y, z, x_0, y_0, z_0)^T \end{pmatrix} \Delta A X_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) dx dy dz + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} S_x^1(x, y, z, x_0, y_0, z_0)^T \\ S_y^1(x, y, z, x_0, y_0, z_0)^T \\ S_z^1(x, y, z, x_0, y_0, z_0)^T \end{pmatrix} F(x, y, z, x_1, y_1, z_1) dx dy dz, \end{aligned}$$

где верхние индексы у вектора X_1 и нижние индексы у вектора S^1 означают компоненту вектора сторонних сил F , заданных в виде дельта функции Дирака.

Для однородного и изотропного пространства решение имеет вид [34]:

$$\begin{aligned} S_x(x, y, z, \omega) &= \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ F_x \cdot \frac{e^{-i\omega \frac{R}{C_2}}}{R} + \frac{C_2^2}{(i\omega)^2} \left\{ F_x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} + F_y \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + F_z \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \right\} \frac{e^{-i\omega \frac{R}{C_1}} - e^{-i\omega \frac{R}{C_2}}}{R} \right\}, \\ S_y(x, y, z, \omega) &= \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ F_y \cdot \frac{e^{-i\omega \frac{R}{C_2}}}{R} + \frac{C_2^2}{(i\omega)^2} \left\{ F_x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + F_y \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial y} + F_z \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} \right\} \frac{e^{-i\omega \frac{R}{C_1}} - e^{-i\omega \frac{R}{C_2}}}{R} \right\}, \\ S_z(x, y, z, \omega) &= \frac{1}{4\pi\mu} \left\{ F_z \cdot \frac{e^{-i\omega \frac{R}{C_2}}}{R} + \frac{C_2^2}{(i\omega)^2} \left\{ F_x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + F_y \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + F_z \cdot \frac{\partial^2}{\partial z \partial z} \right\} \frac{e^{-i\omega \frac{R}{C_1}} - e^{-i\omega \frac{R}{C_2}}}{R} \right\}, \end{aligned}$$

где $C_1 = \sqrt{\frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}}$ – скорость распространения продольных волн, $C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость распространения поперечных волн, λ, μ – упругие параметры Ламе, R – расстояние между источником и приемником поля.

Таким образом, в частотной области для расчетов звукового поля в образце горной породы, насыщенной фрактальными включениями, находящегося в воздухе, может быть использовано полученное объемное интегральное представление.

Результаты

Пределы интегрирования в полученном выше интегральном представлении в реальных средах будут определяться границами локального неоднородного включения

во вмещающей среде (границами параллелепипеда, описывающего образец породы, расположенного в воздухе в нашем случае). С учетом разбиения образца на элементарные параллелепипеды, интегрирование будет проводиться по всем дискретным объемам образца. Замена интеграла кубатурной формулой приводит интегральную формулу к линейному представлению.

Заставляя точку (x_0, y_0, z_0) пробегать область неоднородности среды – все дискретные объемные элементы ее формирующие с заданными значениями матриц упругих параметров, можно, на основе решения системы линейных алгебраических уравнений, определить значения компонент вектора X в анизотропных неоднородностях, и, впоследствии, в любых интересующих нас точках (например, в точках расположения датчиков звукового (сейсмического) поля).

В качестве образца горной породы рассматривается параллелепипед со сторонами A_{II}, B_{II}, C_{II} , состоящий из некоторого «основного» вещества и вкраплений иных веществ, образующих фрактальные подмножества. Физические и механические характеристики всех веществ образца считаются известными (выбираются из базы физических свойств веществ горных пород). Вмещающей образец средой является воздух с известными физико-механическими характеристиками.

Возбуждение звуковой волны с заданной амплитудно-частотной характеристикой импульса будет происходить в т. $A_1, A_2, \dots, A_N$ на границе «воздух-образец» с известными координатами. Амплитуды колебаний будут «измеряться» (вычисляться) в заданном дискретном множестве точек $B_1, B_2, \dots, B_M$ границы «воздух-образец», координаты которых также считаются известными.

Входным массивом в расчетный модуль решения прямой задачи о распространении звуковой волны в образце горной породы является 3D-матрица $N_1 \times N_2 \times N_3$ элементов, значениями которой служат целые числа. Каждый элемент массива соответствует прямоугольному параллелепипеду. Индексы элемента 3D-матрицы определяют координаты центра параллелепипеда, а числовое значение элемента – его физико-механические свойства. Оно задается номером записи в базе данных для типа вещества горной породы (запись в базе содержит описание плотности, скорости продольной и поперечных волн, матрицы H упругих анизотропных свойств вещества горной породы).

На основе полученных расчетных формул разработаны алгоритм и программа решения прямой задачи о распространении сейсмической (звуковой) волны в образце породы, насыщенной анизотропными фрактальными включениями.

Программа разработана на основе модульного принципа и содержит:

- модуль InputData, который осуществляет задание физических параметров вмещающей среды, чтение матрицы фрактального объекта из файла, заполнение фрактальным объектом образца горной породы, считывание физических параметров для каждой геологической среды, составляющей фрактальный объект, построение матриц упругих параметров;

- модуль Pole, который реализует алгоритм расчета сейсмического поля на основе объемных интегральных представлений.

Выполнен вычислительный эксперимент с целью решения трехмерной прямой задачи сейсморазведки. Правильность работы алгоритма и программы проверялись на модели однородного образца породы с физическими свойствами, равными свойствам вмещающего пространства. Аномальное поле в этом случае во всех экспериментах было равно нулю. Нормальное поле источника представлено на Рисунке 4. Видно, что ортогональный плоскости приемников вектор плотности силы в источнике поля

приводит к симметрии (нижний ряд рисунков). Изменение направления вектора плотности силы сдвигает максимум модуля вектора смещения (верхний ряд).

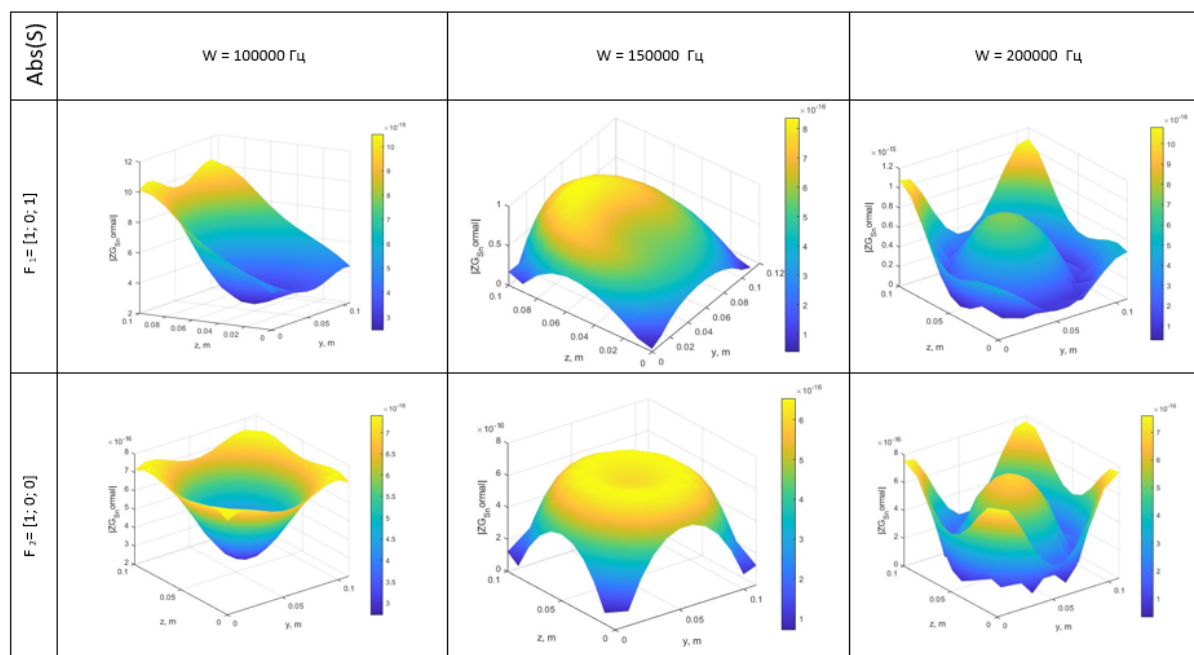


Рисунок 4 – Модуль вектора смещений в приемниках при частотах $w = 100, 150, 200$ кГц возбуждаемого звукового поля и векторах плотности силы в источнике $F_1 = (1,0,1)$ и $F_2 = (1,0,0)$
Figure 4 – The displacement vector module in the receivers at frequencies $w = 100, 150, 200$ kHz of the excited sound field and force density vectors in the source $F_1 = (1,0,1)$ and $F_2 = (1,0,0)$

Рассмотрен случай сгенерированного программой псевдофрактального образца горной породы в виде параллелепипеда со сторонами $12 \times 11 \times 10$ см (Рисунок 5). Включение состоит из двух веществ. Первое вещество (параллелепипеды зеленого цвета) имеет плотность $\rho_1 = 2700$ кг/м³, скорость продольных волн $V_{p1} = 3500$ м/с, скорость поперечных волн $V_{s1} = 1750$ м/с. Второе вещество (параллелепипеды синего цвета) также имеет плотность $\rho_2 = 2700$ кг/м³, но скорость продольных волн $V_{p1} = 2200$ м/с, скорость поперечных волн $V_{s2} = 1800$ м/с. Основное (вмещающее) вещество образца задано следующими параметрами $\rho_0 = 2700$ кг/м³, $V_{p1} = 3000$ м/с, скорость поперечных волн $V_{s2} = 1500$ м/с. Сеточная область для образца породы представлена на Рисунке 6.

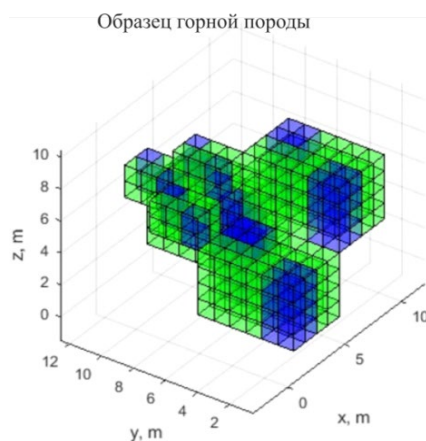


Рисунок 5 – Псевдофрактальный образец породы
Figure 5 – Pseudofractal rock sample

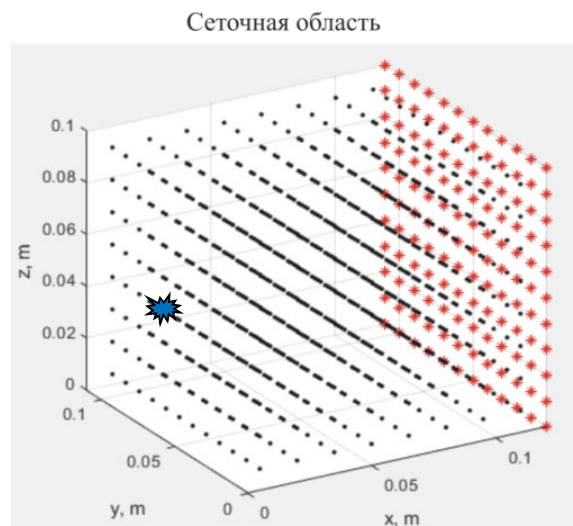


Рисунок 6 – Сеточная область: синяя звездочка – источник звуковой волны; красные точки – положения приемников поля; черные точки – центры дискретных областей образца

Figure 6 – Grid region: the blue star is the source of the sound wave; the red dots ones are the positions of the field receivers; the black dots are the centers of the discrete regions of the sample

На Рисунке 7 представлены графики модуля вектора смещения, вычисленного в фазовом пространстве в приемниках звукового поля при его излучении в источнике с заданной частотой и заданном направлении вектора плотности силы.

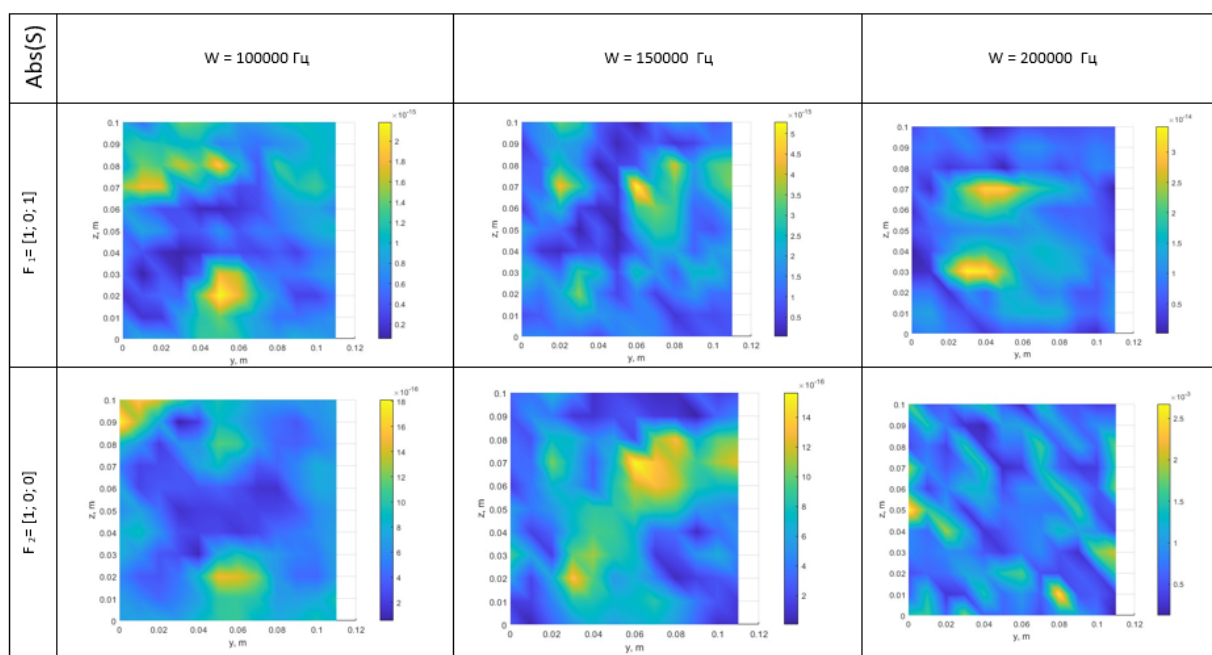


Рисунок 7 – Модуль вектора смещений в «приемниках» при частотах $w = 100, 150, 200 \text{ кГц}$ возбуждаемого поля и векторах плотности силы в источнике $F_1 = (1,0,1)$ и $F_2 = (1,0,0)$

Figure 7 – The displacement vector module in the "receivers" at frequencies $w = 100, 150, 200 \text{ kHz}$ of the excited field and force density vectors in the source $F_1 = (1,0,1)$ and $F_2 = (1,0,0)$

Графики демонстрируют проявление внутренней структуры образца породы в «регистрируемом» поле. Анализ результатов вычислительных экспериментов

показывает их зависимость от частоты возбуждаемого поля и направления вектора плотности силы в источнике поля.

Обсуждение

Построена компьютерная модель распространения сейсмической (звуковой) волны в геологическом образце породы, насыщенной анизотропными фрактальными включениями (уровень микроанизотропии). Разработано программное средство генерации псевдофрактальных вкраплений в образцы горной породы. Сгенерированы образцы с псевдофрактальными включениями в виде параллелепипедов и луночек, имитирующие вкрапления и трещинные пустоты и заполненные флюидом включения горных пород. Разработан алгоритм и программа расчета прямой задачи распространения сейсмической (звуковой) волны в частотной области в образце породы, насыщенной анизотропными фрактальными включениями (микроанизотропия). Проведен вычислительный эксперимент по расчету звуковой волны в частотной области в образце породы с псевдофрактальным включением в виде параллелепипеда. Вычислены компоненты и модуль вектора смещений в зависимости от частоты излучения звукового поля источником.

Эксперименты демонстрируют проявление внутренней структуры образца породы в «регистрируемом» поле и зависимость результатов от частоты возбуждаемого поля и направления вектора плотности силы в источнике поля.

Программный модуль, генерирующий образцы горных пород с псевдофрактальными включениями, достаточно универсален и может быть использован для исследования распространения в образце не только звуковых (сейсмических), но и тепловых, диффузионных, частотных электромагнитных полей.

Полученные формулы объемных интегральных представлений сейсмического (звукового) поля содержат матрицу, описывающую одновременно плотностные и анизотропные физические свойства фрактальных подобластей. Это открывает перспективы применения сейсмических методов геофизики для решения обратных гравиметрических задач и обратных задач теории упругости, для более тесного взаимодействия и комплексирования методов сейсмики (акустики) и гравиметрии. Возможность масштабирования разработанных алгоритмов генерации геологических структур и возбуждаемых полей с микро- на макроуровень позволяет перейти к исследованию методами сейсморазведки трещиноватых структур коллекторов глубокозалегающих нефтяных месторождений.

Заключение

Трещиноватые породы являются сложным объектом изучения, требующим выполнения ряда специальных исследований и применения современных компьютерных технологий. Перспективным направлением исследований является использование фрактальных структур для описания анизотропных сред, отражающих внутреннюю структуру горных пород, и построение алгоритмов, адаптированных для компьютерного моделирования сейсмического поля в таких структурах.

В работе разработан алгоритм и программа генерирования образцов горных пород, содержащих псевдофрактальные анизотропные вкрапления, а также алгоритм и программа решения в частотной области прямой задачи о распространении сейсмической (звуковой) волны в образце породы, насыщенной анизотропными фрактальными включениями (микроанизотропия). Возможно применение способа вычислений и алгоритма для расчета в частотной области сейсмических полей точечных источников в земной коре в присутствии анизотропных по упругим параметрам

локальных включений с описанием макроанизотропных упругих свойств локальных объектов.

Практическая значимость исследования заключается в возможности применения полученного алгоритма и программного средства для генерации анизотропных псевдофрактальных включений и расчета в их присутствии сейсмических полей при исследовании трещиноватых горных пород на больших глубинах.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Nefedov Yu., Gribanov D., Gasimov E., et al. Development of Achimov Deposits Sedimentation Model of One of the West Siberian Oil and Gas Province Fields. *Reliability: Theory & Applications*. 2023;18(S5):441–448. <https://doi.org/10.24412/1932-2321-2023-575-441-448>
2. Двойников М.В., Сидоркин Д.И., Юртаев С.Л., Грохотов Е.И., Ульянов Д.С. Бурение глубоких и сверхглубоких скважин с целью поиска и разведки новых месторождений полезных ископаемых. *Записки Горного института*. 2022;258:945–955. <https://doi.org/10.31897/PMI.2022.55>
Dvoynikov M.V., Sidorkin D.I., Yurtaev S.L., Grokhotov E.I., Ulyanov D.S. Drilling of Deep and Ultra-Deep Wells for Prospecting and Exploration of New Raw Mineral Fields. *Journal of Mining Institute*. 2022;258:945–955. <https://doi.org/10.31897/PMI.2022.55>
3. Синица Н.В., Прищепа О.М. Концептуальная модель формирования зоны нефтегазоаккумуляции в пределах палеозойского основания юго-востока Западно-Сибирского бассейна. *Актуальные проблемы нефти и газа*. 2023;(1):14–26. <https://doi.org/10.29222/ipng.2078-5712.2023-40.art2>
Sinita N.V., Prishchepa O.M. A Conceptual Model for the Formation of Oil and Gas Accumulation Zone Within the Paleozoic Basement of the Southeastern West Siberian Basin. *Actual Problems of Oil and Gas*. 2023;(1):14–26. (In Russ.). <https://doi.org/10.29222/ipng.2078-5712.2023-40.art2>
4. Мартынов А.В. Итоги геологоразведочных работ на нефть и газ в пределах гряды Чернышева и западного склона Приполярного Урала. *Нефтегазовая геология. Теория и практика*. 2020;15(1). https://doi.org/10.17353/2070-5379/9_2020
Martynov A.V. Results of Geological Exploration Activity for Oil and Gas Within the Chernyshev Ridge and the Western Pre-Polar Ural Slope. *Petroleum Geology. Theoretical and Applied Studies*. 2020;15(1). (In Russ.). https://doi.org/10.17353/2070-5379/9_2020
5. Прищепа О.М., Боровиков И.С., Грохотов Е.И. Нефтегазоносность малоизученной части северо-запада Тимано-Печорской нефтегазоносной провинции по результатам бассейнового моделирования. *Записки Горного института*. 2021;247:66–81. <https://doi.org/10.31897/PMI.2021.1.8>
Prishchepa O.M., Borovikov I.S., Grokhotov E.I. Oil and Gas Content of the Understudied Part in the Northwest of the Timan-Pechora Oil and Gas Province According to the Results of Basin Modeling. *Journal of Mining Institute*. 2021;247:66–81. <https://doi.org/10.31897/PMI.2021.1.8>
6. Большакова Н.В., Данильев С.М., Данильева Н.А. Ресурсный потенциал углеводородов и перспективы освоения шельфа Берингова моря, Тихого океана и сопредельной территории Восточной Камчатки. *Нефтегазовая геология. Теория и практика*. 2020;15(4). https://doi.org/10.17353/2070-5379/34_2020
Bol'shakova N.V., Danil'ev S.M., Danil'eva N.A. Hydrocarbon Resources Potential and Development Prospects of the Behring Sea Shelf and the Pacific Ocean Joining the

- Eastern Kamchatka Onshore Area. *Petroleum Geology. Theoretical and Applied Studies*. 2020;15(4). (In Russ.). https://doi.org/10.17353/2070-5379/34_2020
7. Mardashov D., Duryagin V., Islamov Sh. Technology for Improving the Efficiency of Fractured Reservoir Development Using Gel-Forming Compositions. *Energies*. 2021;14(24). <https://doi.org/10.3390/en14248254>
 8. Владов М.Л., Стручков В.А., Судакова М.С., Шмурак Д.В. Ограничения межскважинного просвечивания на больших расстояниях: геометрические факторы. В сборнике: *Инженерная сейсморазведка и сейсмология-2020. Георадар-2020. Теперь вместе: Сборник тезисов научно-практической конференции, 16–22 октября 2020 года, Москва, Россия*. Пенза: Издательский Дом «Академия Естествознания»; 2020. С. 124–128.
Vladov M.L., Struchkov V.A., Sudakova M.S., Shmurak D.V. Limitations of Crosshole Tomography at Large Distances: Geometry Factors. In: *Inzhenernaya seismorazvedka i seismologiya-2020. Georadar-2020. Teper' vmeste: Sbornik tezisev nauchno-prakticheskoi konferentsii, 16–22 October 2020, Moscow, Russia*. Penza: Izdatel'skij Dom "Akademija Estestvoznaniya"; 2020. P. 124–128. (In Russ.).
 9. Чугаев А.В., Кузнецов А.И. Сравнение оптоволоконной системы регистрации сейсмоакустических сигналов и гидрофонов при межскважинных исследованиях. *Горное эхо*. 2022;(3):42–49. <https://doi.org/10.7242/echo.2022.3.7>
 10. Щекин А.И., Васильев В.А., Николайченко А.С., Коломийцев А.В. Промысловая классификация трещиноватых коллекторов кристаллического фундамента. *Георесурсы*. 2021;23(3):90–98. <https://doi.org/10.18599/grs.2021.3.12>
Shchekin A.I., Vasiliev V.A., Nikolaychenko A.S., Kolomiitsev A.V. Field Classification of Fractured Reservoirs of Crystalline Basement. *Georesources*. 2021;23(3):90–98. (In Russ.). <https://doi.org/10.18599/grs.2021.3.12>
 11. Ильинов М.Д., Петров Д.Н., Карманский Д.А., Селихов А.А. Аспекты физического моделирования процессов структурных изменений образцов горных пород при термобарических условиях больших глубин. *Горные науки и технологии*. 2023;8(4):290–302. <https://doi.org/10.17073/2500-0632-2023-09-150>
Ilyinov M.D., Petrov D.N., Karmanskiy D.A., Selikhov A.A. Physical Simulation Aspects of Structural Changes in Rock Samples Under Thermobaric Conditions at Great Depths. *Mining Science and Technology (Russia)*. 2023;8(4):290–302. <https://doi.org/10.17073/2500-0632-2023-09-150>
 12. Чернышов С.Е., Попов С.Н., Варушкин С.В., Мелехин А.А., Кривошеков С.Н., Рен Ш. Научное обоснование методов вторичного вскрытия фаменских отложений юго-востока Пермского края на основании геомеханического моделирования. *Записки Горного института*. 2022;257:732–743. <https://doi.org/10.31897/PMI.2022.51>
Chernyshov S.E., Popov S.N., Varushkin S.V., Melekhin A.A., Krivoshechekov S.N., Ren Sh. Scientific Justification of the Perforation Methods for Famennian Deposits in the Southeast of the Perm Region Based on Geomechanical Modelling. *Journal of Mining Institute*. 2022;257:732–743. <https://doi.org/10.31897/PMI.2022.51>
 13. Кочнев А.А., Козырев Н.Д., Кривошеков С.Н. Оценка влияния неопределенности параметров трещин на динамику технологических показателей разработки турнейско-фаменской залежи нефти месторождения им. Сухарева. *Записки Горного института*. 2022;258:1026–1037. <https://doi.org/10.31897/PMI.2022.102>
Kochnev A.A., Kozyrev N.D., Krivoshechekov S.N. Estimation of the Influence of Fracture Parameters Uncertainty on the Dynamics of Technological Development Indicators of the Tournaisian-Famennian Oil Reservoir in Sukharev Oil Field. *Journal of Mining Institute*. 2022;258:1026–1037. <https://doi.org/10.31897/PMI.2022.102>

14. Вахитова Г.Р., Дюдьбина А.А., Шайбекова Г.Ф. Петрофизическая модель пласта D3fr франского яруса с трудноизвлекаемыми запасами в разрезе Прикаспийского бассейна. *Вестник Академии наук Республики Башкортостан*. 2020;36(3):5–15.
Vakhitova G.R., Dyudbina A.A., Shaybekova G.F. Petrophysical Model for the Frasnian D3fr Stage with Hard-to-Recover Reserves in the Pre-Caspian Basin Sediments. *Herald of the Academy of Sciences of the Republic of Bashkortostan*. 2020;36(3):5–15. (In Russ.).
15. Kireev S.B., Litvinenko V.S., Telegin A.N. The Modern Technology of Seismic Prospecting with the Use of Reflection Method Applied to Oil and Gas Exploration. In: *6th EAGE Saint Petersburg International Conference and Exhibition: Volume 2014, 07–10 April 2014, Saint Petersburg, Russia*. European Association of Geoscientists & Engineers; 2014. P. 1–5. <https://doi.org/10.3997/2214-4609.20140208>
16. Яковлева А.А., Мовчан И.Б., Мединская Д.К., Садыкова З.И. Количественные интерпретации потенциальных полей: от параметрических пересчетов к геоструктурным. *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. 2023;334(11):198–215. <https://doi.org/10.18799/24131830/2023/11/4152>
Yakovleva A.A., Movchan I.B., Medinskaia D.K., Sadykova Z.I. Quantitative Interpretations of Potential Fields: From Parametric to Geostructural Recalculations. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 2023;334(11):198–215. (In Russ.). <https://doi.org/10.18799/24131830/2023/11/4152>
17. Баяк И.О., Дубиня Н.В., Тихоцкий С.А. Проблемы петроупругого моделирования трещиноватых коллекторов. *PRОнефть. Профессионально о нефти*. 2019;(3):11–17.
Bayuk I.O., Dubinya N.V., Tikhotskiy S.A. Some Problems of Rock Physics Modeling of Fractured Carbonate Reservoir Rocks. *PROneft. Professionals About Oil*. 2019;(3):11–17. (In Russ.).
18. Узьянбаев Р.М., Повещенко Ю.А., Подрыга В.О. и др. Использование параллельных технологий для расчетов флюидодинамических процессов в коллекторе трещиновато-порового типа с учетом неизотермичности. В сборнике: *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2023): Материалы XVII всероссийской научной конференции с международным участием, 28–30 марта 2023 года, Санкт-Петербург, Россия*. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ; 2023. С. 246.
19. Белозеров И.П., Губайдуллин М.Г. О концепции технологии определения фильтрационно-емкостных свойств терригенных коллекторов на цифровой модели зерна. *Записки Горного института*. 2020;244:402–407. <https://doi.org/10.31897/PMI.2020.4.2>
Belozеров I.P., Gubaydullin M.G. Concept of Technology for Determining the Permeability and Porosity Properties of Terrigenous Reservoirs on a Digital Rock Sample Model. *Journal of Mining Institute*. 2020;244:402–407. <https://doi.org/10.31897/PMI.2020.4.2>
20. Норматов Ж.С. Фракталы и их применение. *Экономика и социум*. 2020;(3):427–432.
Normatov J.S. Fractals and Their Application. *Ekonomika i sotsium*. 2020;(3):427–432. (In Russ.).
21. Banerjee S., Easwaramoorthy D., Gowrisankar A. *Fractal Functions, Dimensions and Signal Analysis*. Cham: Springer; 2021. 132 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-62672-3>
22. Zhao J., Li Sh., Wang Ch., You T., Liu X., Zhao Y. A Universal Soil-Water Characteristic Curve Model Based on the Particle Size Distribution and Fractal Theory. *Journal of Hydrology*. 2023;622. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2023.129691>

23. Ming F., Zhang M., Pei W., Chen L. A New Hydraulic Conductivity Model of Frozen Soil Considering the Hysteresis Effect Based on Fractal Theory. *Geoderma*. 2024;442. <https://doi.org/10.1016/j.geoderma.2024.116790>
24. Zhang P., Zhang Ya., Huang Y., Xia Y. Experimental Study of Fracture Evolution in Enhanced Geothermal Systems Based on Fractal Theory. *Geothermics*. 2022;102. <https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2022.102406>
25. Sadeghi B. *Fractals and Multifractals in the Geosciences*. Elsevier; 2024. 302 p. <https://doi.org/10.1016/C2020-0-03441-9>
26. Масюков В.В., Юрченко О.С. Использование мультимасштабного линейментного анализа для выявления фрактальных свойств трещинной геологической среды. В сборнике: *Геомодель 2020: 22-я научно-практическая конференция по вопросам геологоразведки и разработки месторождений нефти и газа, 07–11 сентября 2020 года, Геленджик, Россия*. Москва: ЕАГЕ Геомодель; 2020. С. 56.
Masjukov V.V., Yurchenko O.S. Multi-Scaled Lineament Analysis for Fractured Geological Medium Fractal Properties Detection. In: *Geomodel 2020, 07–11 September 2020, Gelendzhik, Russia*. Moscow: European Association of Geoscientists & Engineers; 2020. P. 56. <https://doi.org/10.3997/2214-4609.202050080>
27. Иванов С.Н., Кушнарев П.И. Оценка сложности геологического строения золоторудных месторождений с позиций фрактальной геометрии. *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*. 2021;(2):251–258.
Ivanov S.N., Kushnarev P.I. Assessment of the Complexity of the Geological Structure of Gold Deposits from the Standpoint of Fractal Geometry. *News of the Tula State University. Technical Sciences*. 2021;(2):251–258. (In Russ.).
28. Шайхутдинова Л.Р. Фрактальная структура дендритов в аркозовом песчанике салдамской свиты Межегейского угольного месторождения (Восточная Сибирь) как доказательство самоорганизации геологической среды. В сборнике: *Методы, методы и снова методы в литологии: Материалы 4-й Всероссийской школы студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов по литологии, 19–23 октября 2020 года, Екатеринбург, Россия*. Екатеринбург: Институт геологии и геохимии им. академика А.Н. Заварицкого; 2020. С. 153–155.
29. Сулейманов Б.А., Исмаилов Ф.С., Дышин О.А., Гусейнова Н.И. Определение фрактальной размерности фронта вытеснения нефти водой на основе данных нормальной эксплуатации скважин. *Нефтяное хозяйство*. 2011;(12):111–115.
Suleimanov B.A., Ismailov F.S., Dyshin O.A., Huseinova N.I. Analysis of Oil Deposit Exploration State on the Base of Multifractal Approach. *Oil Industry*. 2011;(12):111–115. (In Russ.).
30. Сентемов А.А., Дорфман М.Б. Перколяционный подход при гидродинамическом моделировании воздействия на призабойную зону скважины. *Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов*. 2022;333(7):157–165. <https://doi.org/10.18799/24131830/2022/7/3612>
Sentemov A.A., Dorfman M.B. Percolation Approach in Reservoir Simulation of Well Treatment Methods. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering*. 2022;333(7):157–165. (In Russ.). <https://doi.org/10.18799/24131830/2022/7/3612>
31. Voevodko A.E. Fractal Dimension of the Kronecker Product Based Fractals. arXiv. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1803.02766> [Accessed 20th October 2025].
32. Александров П.Н., Кризский В.Н. Прямая и обратная задачи сейсморазведки анизотропных и диспергирующих упругих сред на основе объемных интегральных уравнений. *Математическое моделирование*. 2023;35(5):15–30. <https://doi.org/10.20948/mm-2023-05-02>

- Aleksandrov P.N., Krizsky V.N. Direct and Inverse Problems of Seismic Exploration of Anisotropic and Dispersive Elastic Media on Volume Integral Equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2023;15(6):976–986. <https://doi.org/10.1134/S2070048223060042>
33. Уайт Дж.Э. *Возбуждение и распространение сейсмических волн*. Москва: Недра; 1986. 264 с.
White J.E. *Underground Sound. Application of Seismic Waves*. Moscow: Nedra; 1986. 264 p. (In Russ.).
34. Кеч В., Теодореску П. *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*. Москва: Мир; 1978. 518 с.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Кризский Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой цифрового моделирования, Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

e-mail: krizskiy_vn@pers.spmi.ru

ORCID: [0000-0002-4244-4692](https://orcid.org/0000-0002-4244-4692)

Vladimir N. Krizsky, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Digital Modeling, Empress Catherine II Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg, the Russian Federation.

Беляев Виктор Вениаминович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры цифрового моделирования, Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

e-mail: belyaev_vv@pers.spmi.ru

ORCID: [0000-0002-4296-6386](https://orcid.org/0000-0002-4296-6386)

Victor V. Belyaev, Candidate of Engineering Sciences, Docent, Associate Professor at the Department of Digital Modeling, Empress Catherine II Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg, the Russian Federation.

Адамович Олег Олегович, кандидат физико-математических наук, директор по геофизике, INOVA Geophysical, Дубай, Объединённые Арабские Эмираты.

e-mail: adamovic_h@mail.ru

ORCID: [0000-0003-3252-8224](https://orcid.org/0000-0003-3252-8224)

Oleg O. Adamovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Director of Geophysics, INOVA Geophysical, Dubai, United Arab Emirates.

Горелик Мария Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и компьютерных технологий, Санкт-Петербургский горный университет императрицы Екатерины II, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

e-mail: korobitsyna_ma@pers.spmi.ru

ORCID: [0000-0003-4004-0624](https://orcid.org/0000-0003-4004-0624)

Mariia A. Gorelik, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor at the Department of Computer Science and Computer Technology, Empress Catherine II Saint Petersburg Mining University, Saint Petersburg, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 21.10.2025; одобрена после рецензирования 24.11.2025; принята к публикации 28.11.2025.

The article was submitted 21.10.2025; approved after reviewing 24.11.2025; accepted for publication 28.11.2025.