

УДК 621.391:621.396

DOI: [10.26102/2310-6018/2026.53.2.004](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2026.53.2.004)

Анализ чувствительности в большом для нелинейных фильтров Калмана при оценке параметров навигационного сигнала

Е.И. Глушанков^{✉1}, А.В. Суденкова¹, З.К. Кондрашов²

¹Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, Российская Федерация

²АО «Концерн «Автоматика», Москва, Российская Федерация

Резюме. При фильтрации навигационных сигналов используются методы нелинейного оценивания, качество которых зависит от точности выбранных моделей состояния и наблюдения. В ситуациях, когда параметры моделей неизвестны или изменяются во время наблюдения, приходится прибегать к применению адаптивных алгоритмов фильтрации. Необходимость использования более сложных подходов определяется тем, насколько отклонение того или иного параметра влияет на результат фильтрации. Для оценки качества фильтрации, как правило, используют такие критерии, как выигрыш в отношении сигнал-шум или среднеквадратическая ошибка, которые не предназначены для определения влияния величины отклонений параметров от их истинных значений на дисперсию ошибки оценивания, в отличие от такого показателя качества, как чувствительность. В статье рассматривается анализ чувствительности фильтрации при воздействии белого шума к изменению параметров наблюдения и состояния для фильтров Калмана различных порядков точности и фильтра, оптимального по критерию максимума апостериорной плотности вероятности. Моделирование производится численными методами. Приводится вывод уравнения чувствительности в большом для нелинейного фильтра Калмана в аналитическом виде. В результате получены зависимости чувствительности от величины рассогласования истинных и предполагаемых моделей, а также устойчивость алгоритмов фильтрации к этому рассогласованию. Полученные результаты можно использовать при формировании требований к допустимым отклонениям параметров модели и проверки качества фильтрации в условиях их априорной неопределенности.

Ключевые слова: фильтр Калмана, стохастические дифференциальные уравнения, чувствительность, радионавигационный сигнал, белый шум.

Для цитирования: Глушанков Е.И., Суденкова А.В., Кондрашов З.К. Анализ чувствительности в большом для нелинейных фильтров Калмана при оценке параметров навигационного сигнала. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2026;14(2). URL: <https://moitvvt.ru/journal/article?id=2170> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.53.2.004

Sensitivity analysis for nonlinear Kalman filters in navigation signal parameter estimation

E.I. Glushankov^{✉1}, A.V. Sudenkova¹, Z.K. Kondrashov²

¹The Bonch-Bruевич Saint-Petersburg State University of Telecommunications, Saint-Petersburg, the Russian Federation

²JSC «Concern Automatics» Moscow, the Russian Federation.

Abstract. Nonlinear estimation methods are used for filtering navigation signals, the quality of which depends on the accuracy of the chosen state and observation models. In situations where model parameters are unknown or change during observation, it is necessary to resort to adaptive filtering algorithms. The need for more complex approaches is determined by how much the deviation of a

particular parameter affects the filtering result. To assess the quality of filtering, criteria such as signal-to-noise ratio gain or root mean square error are typically used; however, these are not intended to determine the influence of the magnitude of parameter deviations from their true values on the estimation error variance, unlike a quality indicator such as sensitivity. The article discusses the analysis of filtering sensitivity to changes in observation and state parameters under the influence of white noise for Kalman filters of various accuracy orders and a filter optimal by the criterion of maximum a posteriori probability density. Simulation is carried out by numerical methods. The derivation of the large-scale sensitivity equation for the nonlinear Kalman filter in analytical form is presented. As a result, dependencies of sensitivity on the magnitude of the discrepancy between the true and assumed models were obtained, as well as the stability of the filtering algorithms to this discrepancy. The results can be used to formulate requirements for permissible model parameter deviations and to check the filtering quality under conditions of their a priori uncertainty.

Keywords: Kalman filter, stochastic differential equations, sensitivity, radio navigation signal, white noise.

For citation: Glushankov E.I., Sudenkova A.V., Kondrashov Z.K. Sensitivity analysis for nonlinear Kalman filters in navigation signal parameter estimation. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2026;14(2). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=2170> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.53.2.004

Введение

Оптимальность и качество фильтрации определяется выбором математической модели, адекватной исследуемым сигналам. На практике зачастую не хватает априорной информации как о точных статистических характеристиках параметров сигналов и шумов, так и о соотношениях, описывающих связи сигналов состояния и наблюдения. Даже применение критериев согласия для валидации модели состояния не позволяет в полной мере оценить, насколько идеализированная форма представления сигнала с заранее известной плотностью способна отразить его реальные свойства. Из проблемы выбора адекватных моделей вытекает необходимость в «настройке», оптимизации параметров фильтра, осуществляемая, например, посредством адаптивной фильтрации. Для анализа ошибок и оценки целесообразности использования более сложных методов обработки можно опираться не только на непосредственные показатели качества фильтрации (такие, как отношение сигнал-шум или дисперсия оценки), но и на матрицы чувствительности. Матрицы чувствительности позволяют описать влияние разницы между предполагаемыми и истинными значениями параметров сигнала наблюдения и состояния на качество фильтрации, характеризуемое ковариационной матрицей ошибок оценивания. В классической литературе по теме¹ [1] разработаны и представлены в аналитическом виде алгоритмы оценки чувствительности линейной фильтрации и сглаживания, которые исследованы в [2, 3].

В данной работе для анализа мы ограничимся рассмотрением чувствительности, рассчитанной численно. Используемые нами методы фильтрации пригодны для обработки параметров, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) произвольного вида, что требует разработки универсального подхода к выведению уравнений чувствительности и является отдельной задачей, прикладной смысл которой зависит, как минимум, от степени общности получаемых выражений. В работе предложен способ получения уравнений чувствительности для нелинейного фильтра Калмана.

¹ Тихонов В.И., Харисов В.Н. *Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем*. Москва: Радио и связь; 2004. 608 с.

Материалы и методы

Рассмотрим навигационный сигнал $s(t)$, распространяющийся в непрерывном канале связи, описываемый гармонической функцией:

$$s(t) = A \cdot \sin((\omega - \omega_d(t)) \cdot (t - \tau_3(t)) + \phi(t)) + v(t), \quad (1)$$

где A – постоянная амплитуда сигнала, ω – частота сигнала навигационной системы, $\omega_d(t)$ – доплеровский сдвиг частоты, $\tau_3(t)$ – задержка распространения сигнала, $\phi(t)$ – фаза сигнала, $v(t)$ – белый гауссов шум наблюдения с нулевым средним.

Доплеровский сдвиг, задержка и фаза являются случайными навигационными параметрами, подлежащими оценке. Задачей фильтрации является отделение полезной части сигнала $s(t)$ от шума $v(t)$, то есть оценка случайных параметров на основе априорных данных об их вероятностных характеристиках. Введем обобщенный вектор состояния:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \tau_3(t) \\ \omega_d(t) \\ \phi(t) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

В дальнейшем подразумевается, что фильтрация осуществляется относительно вектора x . Каждая из его составляющих имеет заданную плотность вероятности, описываемую соответствующим СДУ, которое может быть получено из уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова [4, 5]. Так, СДУ гауссовского распределения для фазы сигнала $\phi(t)$ (СДУ для доплеровской частоты $\omega_d(t)$ выглядит аналогично) имеет вид:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{-\phi(t)}{\tau_{corr}} + \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{\tau_{corr}}} w_\phi(t), \quad (3)$$

где τ_{corr} – интервал корреляции, σ – среднеквадратическое отклонение.

СДУ равномерного распределения для описания задержки τ_3 (аналогично возможно описание начальной фазы):

$$\frac{d\tau_3(t)}{dt} = \frac{(b-a)^2}{\pi^2 \tau_{corr}} + \frac{\delta(\tau_3(t)-a) - \delta(\tau_3(t)+a)}{\theta(\tau_3(t)-a) - \theta(\tau_3(t)+a)} + \frac{b-a}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\tau_{corr}}} w_\phi(t), \quad (4)$$

где b, a – границы определения задержки (параметры равномерного распределения), δ и θ – соответственно функции Дирака и Хэвисайда. Данное выражение можно заменить аппроксимацией белым шумом [5].

В идеальном случае все коэффициенты СДУ (3)–(4) имеют точные значения и корректно описывают параметры сигнала. Используя (2), составим обобщенное векторное уравнение состояния:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) + g(x(t), t) \cdot w(t), \quad (5)$$

где $f(x(t), t), g(x(t), t)$ – коэффициенты СДУ (3)–(4) размерности $[3 \times 1]$, $w(t)$ – белый гауссовский шум состояния с нулевым средним, описываемый диагональной матрицей интенсивностей $\Psi_w(t)$ размерности $[3 \times 3]$. Для моделей в виде (3)–(5) в [6] были получены уравнения фильтрации при точном знании параметров указанных моделей.

Аналогично запишем «истинный» сигнал наблюдения, предполагающий корректную модель наблюдаемого сигнала:

$$s(t) = h(x(t), t) + v(t), \quad (6)$$

где $h(x(t), t)$ – предполагаемый скалярный коэффициент фильтрации, зависящий от векторного аргумента в соответствии с выражением (1); $v(t)$ – шум наблюдения; $\Psi_v(t)$ – интенсивность шума наблюдения.

Теперь перейдем к рассмотрению случая, когда один или несколько параметров модели отличаются от истинных: будем называть их «предполагаемыми» параметрами. Уравнение состояния в форме СДУ при предполагаемых параметрах описывается аналогично (5):

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{f}(\bar{x}(t), t) + \bar{g}(\bar{x}(t), t) \cdot \bar{w}(t), \quad (7)$$

где \bar{x} – предполагаемое значение вектора x ; \bar{f}, \bar{g} – предполагаемые коэффициенты СДУ, \bar{w} – шум наблюдения, описываемый предполагаемой матрицей интенсивности $\bar{\Psi}_w(t)$ размерностью $[3 \times 3]$.

Модель наблюдаемого сигнала (1) при предполагаемых параметрах:

$$\bar{s}(t) = \bar{h}(\bar{x}(t), t) + \bar{v}(t), \quad (8)$$

где \bar{h}, \bar{v} – предполагаемый коэффициент фильтрации и шум наблюдения с интенсивностью $\bar{\Psi}_v(t)$.

Ошибка оценивания или ошибка фильтрации при неточных параметрах определяется как разность между истинным параметром фильтрации и предполагаемым результатом фильтрации:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t),$$

где \tilde{x} – отфильтрованное значение \bar{x} при предполагаемых параметрах (7)–(8).

При вычислении оценок \hat{x} в фильтре Калмана используется условная дисперсия ошибки оценивания (ковариация ошибок):

$$V_{\tilde{x}}(t) = \text{var}\{x(t) - \hat{x}(t)|s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - \hat{x}(t)] [x(t) - \hat{x}(t)]^T p(x(t)|s(t)) dx(t), \quad (9)$$

где var – ковариация, $p(x(t)|s(t))$ – условная плотность вероятности.

Чувствительность в большом может быть описана как отношение разности между истинной и предполагаемой дисперсиями ошибки оценивания к отклонению значения параметра от истинного:

$$\Gamma(t) = \frac{\text{tr}(V_{\tilde{x}}(t)) - \text{tr}(\bar{V}_{\tilde{x}}(t))}{\Delta b}, \quad (10)$$

где $\Gamma(t)$ – чувствительность, $\Delta b = b - \bar{b}$ – разница между истинным значением параметра фильтрации b и его предполагаемым значением \bar{b} ; $V_{\tilde{x}}(t)$ – действительная ковариационная матрица ошибок оценивания \tilde{x} , соответствующая изменению параметра $\Delta b = 0$; $\bar{V}_{\tilde{x}}(t)$ – предполагаемая ковариационная матрица ошибок оценивания \tilde{x} ; $\text{tr}(\cdot)$ – след матрицы.

Строго говоря, различают чувствительность в малом и большом. Матричная чувствительность в малом является дифференциальной версией чувствительности в большом и используется при малых отклонениях от истинных параметров. Она может быть вычислена путем предельного перехода $\Delta b \rightarrow 0$:

$$\gamma(t) = \left. \frac{\partial V_{\tilde{x}}}{\partial b} \right|_{b=\bar{b}}. \quad (11)$$

В [1] приведен вывод алгоритма вычисления чувствительности для линейного уравнения состояния, основанный на выражении дисперсии при помощи решения дифференциального уравнения относительно $x(t)$ через матрицу переходов $D(t, \tau)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t)x(t) + g(t) \cdot w(t),$$

$$x(T) = D(T, 0)x(0) + \int_0^T D(T, \tau) g(\tau) \cdot w(\tau) d\tau.$$

Линейность модели позволяет представить истинную матрицу ковариаций через уравнение Риккати [1, 4] при известных Δb и \bar{b} .

В литературе встречаются как аналитические, так и численные подходы к решению задачи чувствительности. Например, в [7] приводится частный случай оценки так называемой прямой функции чувствительности – чувствительности ошибки оценивания \tilde{x} , которая определяется непосредственно по отношению к неточно известным интенсивностям шумов Ψ_v и Ψ_w : $s_v(t) = \frac{\partial \tilde{x}(t)}{\partial \Psi_v(t)}$, $s_w(t) = \frac{\partial \tilde{x}(t)}{\partial \Psi_w(t)}$. Затем строится расширенный вектор ошибки оценивания за счет включения в него взвешенных функций чувствительности для увеличения устойчивости фильтра к вариациям интенсивностей шумов. Этот метод и выведенные формулы, однако, справедливы для линейной фильтрации и являются только частным решением. В большинстве случаев (например, [8, 9]) для анализа чувствительности при нелинейных моделях используются численные методы.

Рассмотрим в качестве примера нелинейного алгоритма расширенный фильтр Калмана 1-го порядка точности и выведем выражения для оценки чувствительности, которые могли бы быть применены к любым параметрам фильтрации.

Уравнение фильтрации Калмана 1-го порядка точности в общем виде для предполагаемых параметров (то есть оценка, которую мы получаем в действительности по «неточной» модели) имеет вид:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} \bar{V}_{\hat{x}}(t) + \bar{V}_{\hat{x}}(t) \frac{\partial \bar{h}^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} \bar{\Psi}_v^{-1}(t) \{s(t) - \bar{h}(\hat{x}, t)\}. \quad (12)$$

Предполагаемая ковариационная матрица ошибок:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}_{\hat{x}}(t)}{dt} = & \frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} \bar{V}_{\hat{x}}(t) + \bar{V}_{\hat{x}}(t) \frac{\partial \bar{f}^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} + \bar{g}(\hat{x}, t) \bar{\Psi}_w(t) \bar{g}^T(\hat{x}, t) - \\ & - \bar{V}_{\hat{x}}(t) \frac{\partial \bar{h}^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} \bar{\Psi}_v^{-1}(t) \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} \bar{V}_{\hat{x}}(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь необходимо найти выражение для истинной ковариационной матрицы, чтобы затем подставить ее в выражение для чувствительности (10) или (11). Истинные параметры отличаются от используемых в фильтре на величину рассогласования Δ :

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \bar{f}(\bar{x}, t) + \Delta f(\bar{x}, t) \\ h(x, t) &= \bar{h}(\bar{x}, t) + \Delta h(\bar{x}, t), \\ g(x, t) &= \bar{g}(\bar{x}, t) + \Delta g(\bar{x}, t) \\ \Psi_w(x, t) &= \bar{\Psi}_w(\bar{x}, t) + \Delta \Psi_w(\bar{x}, t) \\ \Psi_v(x, t) &= \bar{\Psi}_v(\bar{x}, t) + \Delta \Psi_v(\bar{x}, t). \end{aligned} \quad (14)$$

Хотя мы не можем вычислить значения функций f и h в истинной точке x , потому что она неизвестна, возможно найти приближенное значение f и h , если разложить их в ряд Тейлора около точки, являющейся оценкой \hat{x} , опуская члены высоких порядков. Благодаря данному преобразованию были получены формулы для предполагаемой ковариации ошибки (12)–(13). Линеаризуем функции f и h с учетом рассогласований (14):

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f(\hat{x}, t) + \frac{\partial f(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} (x(t) - \hat{x}(t)) = \bar{f}(\hat{x}, t) + \frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} (x(t) - \hat{x}(t)) + \Delta f(\hat{x}, t) = \\ &= \bar{f}(\hat{x}, t) + \frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} (\tilde{x}(t)) + \Delta f(\hat{x}, t). \end{aligned} \quad (15)$$

$$h(x, t) = h(\hat{x}, t) + \frac{\partial h(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} (x(t) - \hat{x}(t)) = \bar{h}(\hat{x}, t) + \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} (\tilde{x}(t)) + \Delta h(\hat{x}, t). \quad (16)$$

Тогда ошибку фильтрации (ее приращение) можно раскрыть с учетом $s(t) = \bar{h}(\tilde{x}(t), t) + \bar{v}(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= dx(t) - d\hat{x}(t) = f(x, t) + \bar{f}(\hat{x}, t) - \\ &- \bar{V}_{\tilde{x}} \frac{\partial \bar{h}^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} \bar{\Psi}_v^{-1}(t) \left(\bar{h}(\hat{x}, t) + \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} \tilde{x}(t) + \Delta h(\hat{x}, t) - \bar{h}(\hat{x}, t) \right) dt + \\ &+ g(x, t)w(t)dt - \bar{V}_{\tilde{x}} \frac{\partial \bar{h}^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} \bar{\Psi}_v^{-1}(t)v(t)dt. \end{aligned} \quad (17)$$

В дальнейшем будем использовать замену для коэффициента усиления фильтра:

$$\bar{K} = \bar{V}_{\tilde{x}} \frac{\partial \bar{h}^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}(t)} \bar{\Psi}_v^{-1}(t). \quad (18)$$

Используя приближения первого порядка для $f(x, t)$ и $h(x, t)$ (15), (14), после подстановки получаем:

$$d\tilde{x}(t) = \left(\left[\frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \right] \tilde{x}(t) + \Delta f(\hat{x}, t) + g(x, t)w(t) - \bar{K}v(t) - \bar{K}\Delta h(\hat{x}, t) \right) dt, \quad (19)$$

где $f(x, t) - \bar{f}(\hat{x}, t) = \frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \tilde{x}(t) + \Delta f(\hat{x}, t)$ (15).

Истинная ковариация ошибки оценивания:

$$V_{\tilde{x}} = E[x(t)x^T(t)].$$

где $E[\cdot]$ – оператор математического ожидания.

Здесь необходимо сделать оговорку: в отличие от приведенного выше выражения, в уравнении (13) ковариация ошибок по определению является условной (9), поэтому для вывода истинной ковариации следовало бы придерживаться подхода, аналогичного предложенному в [1], однако даже в [1] при окончательной записи уравнений для $V_{\tilde{x}}$ автор приходит к безусловным оценкам, что демонстрирует правомерность использования в отношении как предполагаемой, так и истинной ковариации ошибок понятия «средняя ковариация» и разрешает противоречия, которые могли бы возникнуть при выводе уравнений чувствительности в большом, где из «безусловной» ковариации будет вычитаться «условная». Рассмотрим произведение $\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)$. Если считать, что оно является процессом Ито [1], то можно записать формулу Ито относительно переменной $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)) &= \left[\frac{\partial^2(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))}{\partial \tilde{x}^2(t)} + \frac{\partial(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))^T}{\partial \tilde{x}(t)} \left(\left(\frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \right) + \Delta f(\hat{x}, t) \right) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left(G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T \frac{\partial^2(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))}{\partial \tilde{x}^2(t)} \right) \right] dt + \frac{\partial(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))^T}{\partial \tilde{x}(t)} G(\tilde{x})\Psi dW, \end{aligned}$$

где $G(\tilde{x}) = [g(x), -\bar{K}]$, $\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_w & 0 \\ 0 & \Psi_v \end{bmatrix}$, $dW = \begin{bmatrix} dw = w \cdot dt \\ dv = v \cdot dt \end{bmatrix}$ – винеровские процессы.

Первое слагаемое в квадратных скобках равно нулю. Второе слагаемое:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))^T}{\partial\tilde{x}(t)} \left(\left(\frac{\partial\tilde{f}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial\tilde{h}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} \right) + \Delta f(\hat{x},t) \right) = \\ & = \left(\left(\frac{\partial\tilde{f}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial\tilde{h}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} \right) + \Delta f(\hat{x},t) \right) \tilde{x}^T(t) + \tilde{x}(t) \left(\left(\frac{\partial\tilde{f}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial\tilde{h}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} \right) + \Delta f(\hat{x},t) \right)^T. \end{aligned}$$

Матричное произведение в третьем слагаемом равно:

$$G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T = [g(x), \bar{K}] \begin{bmatrix} \Psi_w & 0 \\ 0 & \Psi_v \\ & \bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g(x) \\ \bar{K} \end{bmatrix} = g(x)\Psi_w g^T(x) + \bar{K}\Psi_v \bar{K}^T.$$

Рассматривая отдельный ij -й элемент гессиана в третьем слагаемом и пользуясь фильтрующим свойством дельта-функции (символа Кронекера δ), при последовательном взятии частных производных:

$$\frac{\partial^2(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))_{ij}}{\partial\tilde{x}_k(t)\partial\tilde{x}_l(t)} = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}_l(t)} (\tilde{x}_j(t)\delta_{ik} + \tilde{x}_i(t)\delta_{jk}) = \delta_{jl}\delta_{ik} + \delta_{il}\delta_{jk}.$$

С учетом этого вычислим след матрицы для отдельного элемента гессиана:

$$\begin{aligned} & tr \left(G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T \frac{\partial^2(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))^T}{\partial\tilde{x}^2(t)} \right)_{ij} = \sum_{k=l=1}^n (G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T)_{kl} \frac{\partial^2(\tilde{x}_i(t)\tilde{x}_j^T(t))}{\partial\tilde{x}_k(t)\partial\tilde{x}_l(t)} = \\ & = \sum_{k=l=1}^n (G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T)_{kl} (\delta_{jl}\delta_{ik} + \delta_{il}\delta_{jk}) = \sum_{k=1}^n (G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T)_{kj} \delta_{ik} + \\ & \quad + \sum_{l=1}^n (G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T)_{il} \delta_{jl} = \\ & = (G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T)_{ij} + (G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T)_{ji} = 2(G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T)_{ij}. \end{aligned}$$

Таким образом, третий член будет равен:

$$\frac{1}{2} tr \left(G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T \frac{\partial^2(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))^T}{\partial\tilde{x}(t)} \right) = G(\tilde{x})\Psi G(\tilde{x})^T = g(x)\Psi_w g^T(x) + \bar{K}\Psi_v \bar{K}^T.$$

В вычислении четвертого слагаемого необходимости нет, поскольку его математическое ожидание равно нулю.

В итоге для $d(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t))$ получается выражение:

$$\begin{aligned} & d(\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)) = \left[\left(\left(\frac{\partial\tilde{f}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial\tilde{h}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} \right) + \Delta f(\hat{x},t) \right) \tilde{x}^T(t) + \right. \\ & \left. + \tilde{x}(t) \left(\left(\frac{\partial\tilde{f}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial\tilde{h}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} \right) + \Delta f(\hat{x},t) \right)^T + g(x,t)\Psi_w(t)g^T(x,t) + \bar{K}\Psi_v \bar{K}^T \right] dt. \end{aligned}$$

Теперь необходимо найти математическое ожидание от полученного выражения и перенести множитель dt в числитель левой части уравнения. Третье и четвертое слагаемые не содержат случайных величин, поэтому их можно сразу вынести за знак математического ожидания E :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)] = E \left[\left(\left(\frac{\partial\tilde{f}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial\tilde{h}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} \right) + \Delta f(\hat{x},t) \right) \tilde{x}^T(t) + \right. \\ & \left. + \tilde{x}(t) \left(\left(\frac{\partial\tilde{f}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial\tilde{h}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} \right) + \Delta f(\hat{x},t) \right)^T \right] + g(\hat{x},t)\Psi_w(t)g^T(\hat{x},t) + \bar{K}\Psi_v \bar{K}^T. \end{aligned}$$

Вынося за знак математического ожидания все члены, не содержащие $\tilde{x}(t)$, и используя свойство операции транспонирования $(AB)^T = B^T A^T$, получим:

$$\frac{d}{dt} E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)] = \left(\frac{\partial\tilde{f}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial\tilde{h}(\hat{x},t)}{\partial\hat{x}} \right) E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)] + \Delta f(\hat{x},t)E[\tilde{x}^T(t)] +$$

$$+ E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)] \left(\frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \right)^T + \\ + E[\tilde{x}^T(t)] \Delta f^T(\hat{x}, t) + g(x, t) \Psi_w(t) g^T(x, t) + \bar{K} \Psi_v \bar{K}^T,$$

где $E[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)] = V_{\tilde{x}}$; $E[\tilde{x}(t)] = m_{\tilde{x}}$ – математическое ожидание ошибки.

Тогда уравнение для истинной матрицы ковариаций с учетом (14) и (15) принимает вид:

$$\frac{dV_{\tilde{x}}(t)}{dt} = \left[\frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \right] V_{\tilde{x}}(t) + V_{\tilde{x}}(t) \left[\frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \right]^T + \\ + \Delta f(\hat{x}, t) m_{\tilde{x}} + m_{\tilde{x}} \Delta f^T(\hat{x}, t) + (\bar{g}(\hat{x}, t) + \Delta g(\hat{x}, t)) (\bar{\Psi}_w(t) + \Delta \Psi_w(t)) (\bar{g}(\hat{x}, t) + \\ + \Delta g(\hat{x}, t))^T + \bar{K} (\bar{\Psi}_v(t) + \Delta \Psi_v(t)) \bar{K}^T. \quad (20)$$

Математическое ожидание ошибки оценивания $m_{\tilde{x}}$ вычисляется из уравнения для ошибки фильтрации (19) с учетом того, что для шумов $w(t)$ и $v(t)$ среднее равно нулю:

$$\frac{dE[\tilde{x}(t)]}{dt} = \frac{dm_{\tilde{x}}}{dt} = \\ = E \left(\left[\frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \right] \tilde{x}(t) + \Delta f(\hat{x}, t) + g(x, t) w(t) - \bar{K} v(t) - \bar{K} \Delta h(\hat{x}, t) \right) = \quad (21) \\ = \left[\frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} - \bar{K} \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \right] m_{\tilde{x}} + \Delta f(\hat{x}, t) - \bar{K} \Delta h(\hat{x}, t),$$

где $\bar{K} = \bar{V}_{\tilde{x}} \frac{\partial \bar{h}^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \bar{\Psi}_v^{-1}$, $g(x, t) = \bar{g}(\hat{x}, t) + \Delta g(\hat{x}, t)$.

При нулевых отклонениях параметров от действительных значений истинная матрица ковариаций вырождается в (13), в чем можно легко убедиться с помощью подстановки нулевых отклонений в (20) и применения правила $(AB)^T = B^T A^T$. Сравнивая истинную (20) и предполагаемую (13) ковариацию, можно прийти к выводу, что основным отличием является наличие дополнительного члена, связанного с математическим ожиданием от ошибки оценивания. При выводе уравнения (13) предполагается, что оценка \tilde{x} является несмещенной, выражение (21) позволяет проверить правильность этого предположения.

Теперь найдем чувствительность в большом. Обозначим $\Delta V(t) = V_{\tilde{x}}(t) - \bar{V}_{\tilde{x}}(t)$ и вычтем из (20) выражение (13), чтобы получить дифференциальное уравнение для ΔV :

$$\frac{d(\Delta V(t))}{dt} = \frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \Delta V(t) + \Delta V(t) \left(\frac{\partial \bar{f}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \right)^T - \bar{K} \frac{\partial \bar{h}(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} \Delta V(t) + \Delta f(\hat{x}, t) m_{\tilde{x}} + m_{\tilde{x}} \Delta f^T(\hat{x}, t) + \\ + V_{\tilde{x}} \bar{K} \frac{\partial \bar{h}^T(\hat{x}, t)}{\partial \hat{x}} + \bar{K} (\bar{\Psi}_v(t) + \Delta \Psi_v(t)) \bar{K}^T + \Delta g(\hat{x}, t) (\bar{\Psi}_w(t) + \Delta \Psi_w(t)) (\bar{g}(\hat{x}, t) + \Delta g(\hat{x}, t))^T + \\ + \bar{g}(\hat{x}, t) (\bar{\Psi}_w(t) \Delta g^T(\hat{x}, t) + \Delta \Psi_w(t) (\bar{g}(\hat{x}, t) + \Delta g(\hat{x}, t))^T).$$

Дифференциальное уравнение для чувствительности:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\text{tr}(V_{\tilde{x}}(t) - \bar{V}_{\tilde{x}}(t))}{\Delta b} = \frac{d}{dt} \frac{\text{tr}(\Delta V)}{\Delta b} = \frac{\text{tr} \left[\frac{d(\Delta V)}{dt} \right]}{\Delta b}.$$

Чувствительность в малом может быть получена путем дифференцирования уравнения (20) по интересующей нас переменной.

Результаты

При численном расчете чувствительности в большом исходные модели наблюдения и состояния были приняты за истинные, отклонение параметров задавалось через переменную $\Delta b \in [\Delta f, \Delta h, \Delta \Psi_v]$. Обработка сигналов производилась методами

калмановской фильтрации по условному среднему и с помощью фильтра, оптимального по критерию максимума апостериорной вероятности (МАВ).

Для предложенных моделей заданы следующие начальные условия:

– Фаза и доплеровский сдвиг частоты распределены по нормальному закону; задержка имеет равномерное распределение;

– ОСШ = 6 дБ;

– Начальная дисперсия ошибки оценивания для всех параметров: $V_x(0) = 10^{-20}$;

– СКО для параметров с гауссовским распределением: 0,5;

– Интервал корреляции для гауссовского распределения: 1 с;

– Начальный вектор состояния:
$$\begin{bmatrix} \tau_3 \\ \omega_d \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,17 \text{ с} \\ 10^5 \text{ Гц} \\ 10^\circ \end{bmatrix}.$$

На графиках используются обозначения: ФК1, ФК2 – фильтры Калмана 1-го и 2-го порядков точности, МАВ – фильтр, оптимальный по критерию МАВ.

Функция чувствительности при отклонении параметра $f(t)$. Рассмотрим функцию чувствительности в большом для параметра f . На Рисунке 1 изображены графики чувствительности при фиксированном значении рассогласования Δf на интервале наблюдения, иными словами устойчивость фильтров к отклонению параметра f . Значения Γ масштабированы для наглядности. Реальный масштаб отклонений отражен только на Рисунках 1, 2 и 3, где зафиксированы значения следа дисперсий ошибок оценивания в ненормированном виде.

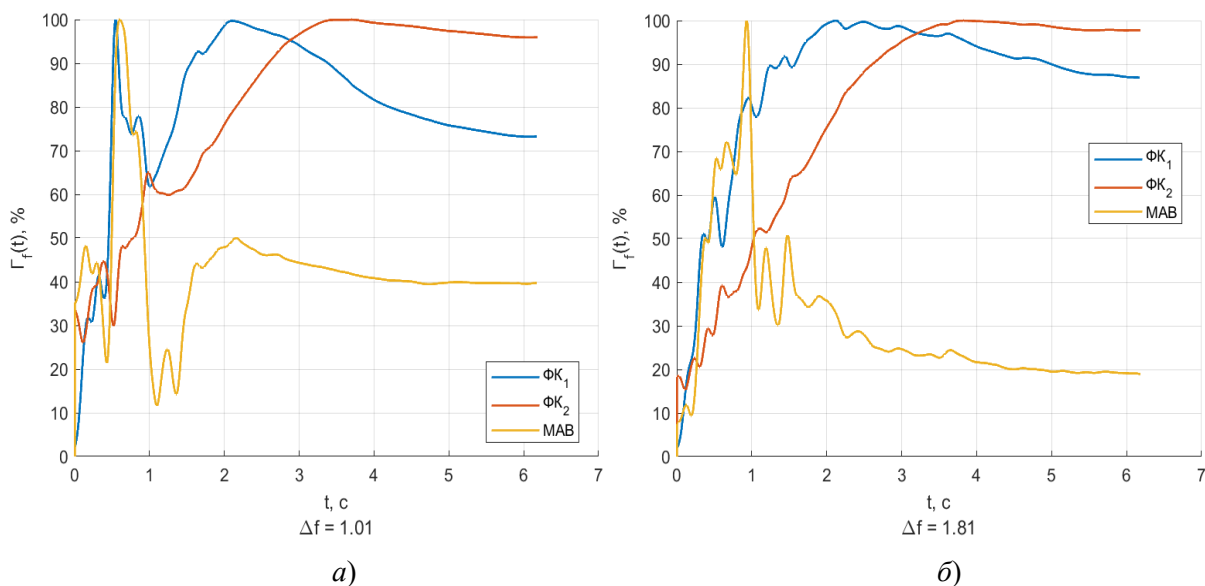


Рисунок 1 – Устойчивость фильтров к отклонению параметра f при фиксированном значении:

$a - \Delta f = 1,01$; $b - \Delta f = 1,81$

Figure 1 – Filter stability to deviation of parameter f at a fixed value:

$a - \Delta f = 1.01$; $b - \Delta f = 1.81$

На Рисунке 2 изображены функции чувствительности от рассогласования параметра f .

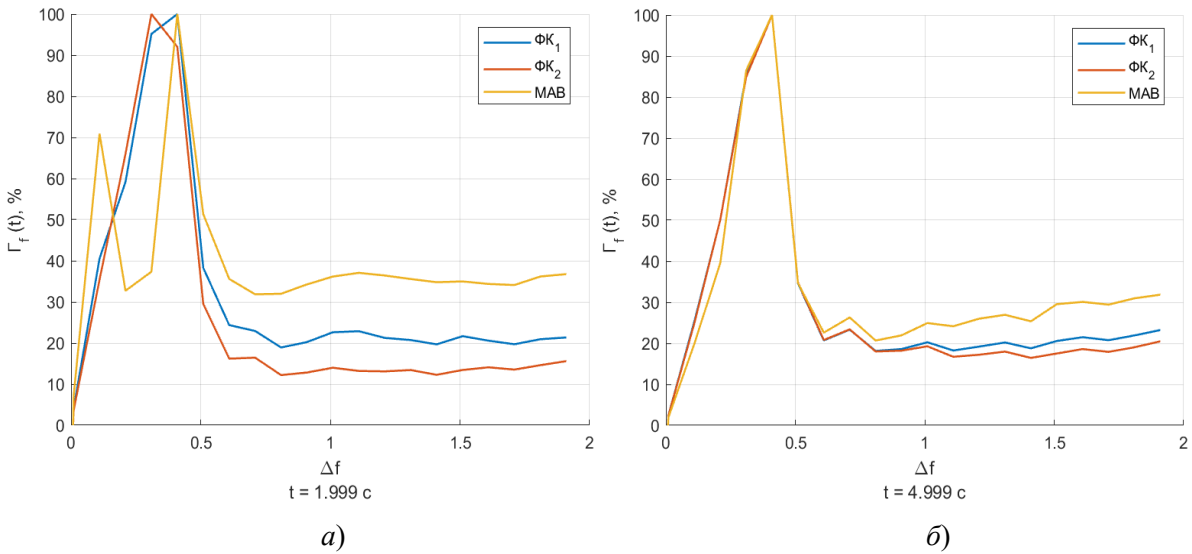


Рисунок 2 – Зависимости нормированного значения чувствительности в большом от величины отклонения параметра f от его истинного значения для фиксированного момента времени:
 $a - t = 1,999$ c; $б - t = 4,099$ c

Figure 2 – Dependences of the normalized sensitivity value in large on the magnitude of the deviation of the parameter f from its true value for a fixed point in time: $a - t = 1.999$ s; $б - t = 4.099$ s

Графики Рисунка 3 демонстрируют разброс значений следа матрицы ошибки оценивания при изменении параметра f .

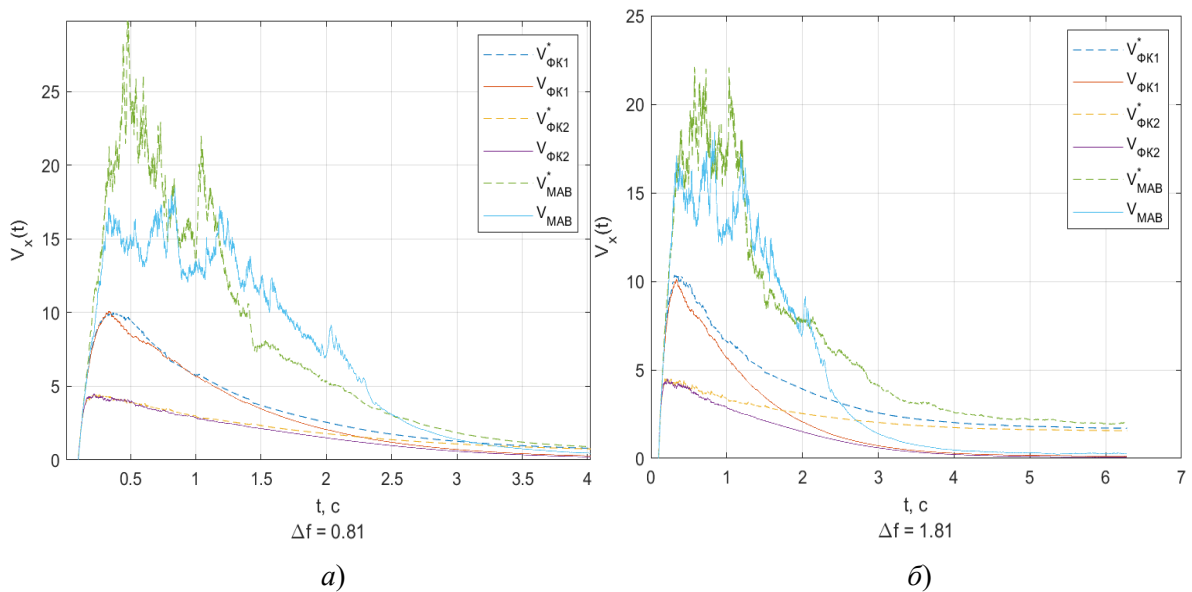


Рисунок 3 – Зависимость следа матрицы действительной дисперсии ошибки оценивания V_x и дисперсии с учетом отклонения параметра $\Delta f(V_x^*)$ от времени для разных фильтров при:
 $a - \Delta f = 0,81$; $б - \Delta f = 1,81$

Figure 3 – Dependence of the trace of the matrix of the actual variance of the estimation error V_x and the variance taking into account the deviation of the parameter $\Delta f(V_x^*)$ on time for different filters at:
 $a - \Delta f = 0.81$; $б - \Delta f = 1.81$

Изменение параметра $h(t)$. Рисунок 4 отображает устойчивость фильтрации к изменению параметра наблюдения Δh . На Рисунках 5 и 6 показаны чувствительность и ковариационные матрицы ошибок оценивания.

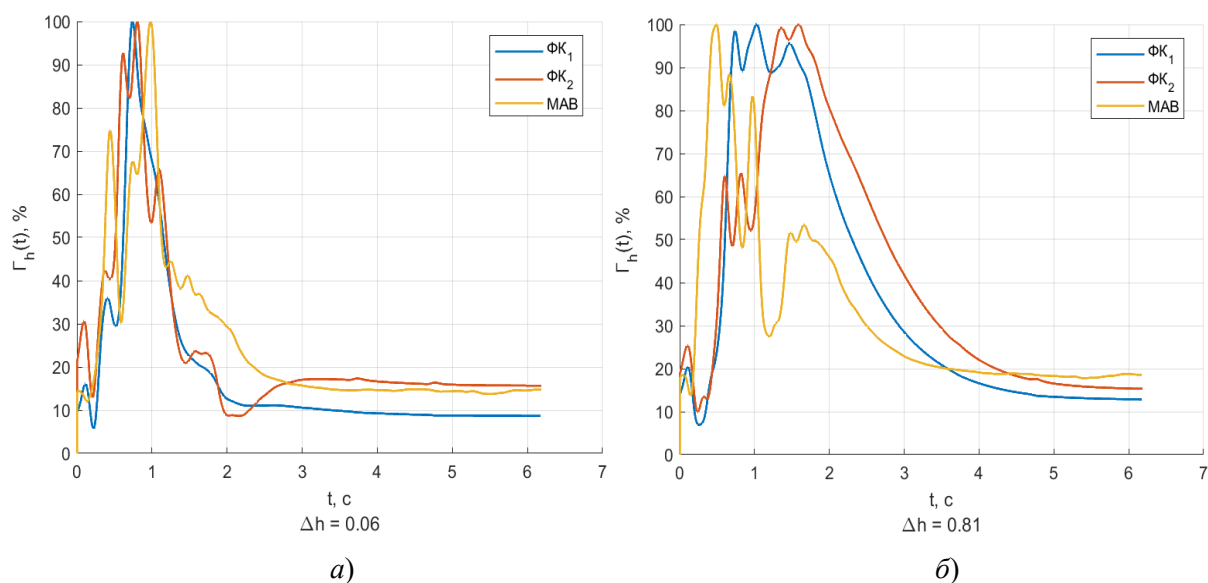


Рисунок 4 – Устойчивость фильтров к отклонению параметра h при фиксированном значении:
 $a - \Delta h = 0,06$; $b - \Delta h = 0,81$

Figure 4 – Filter stability to deviation of parameter h at a fixed value of: $a - \Delta h = 0.06$; $b - \Delta h = 0.81$

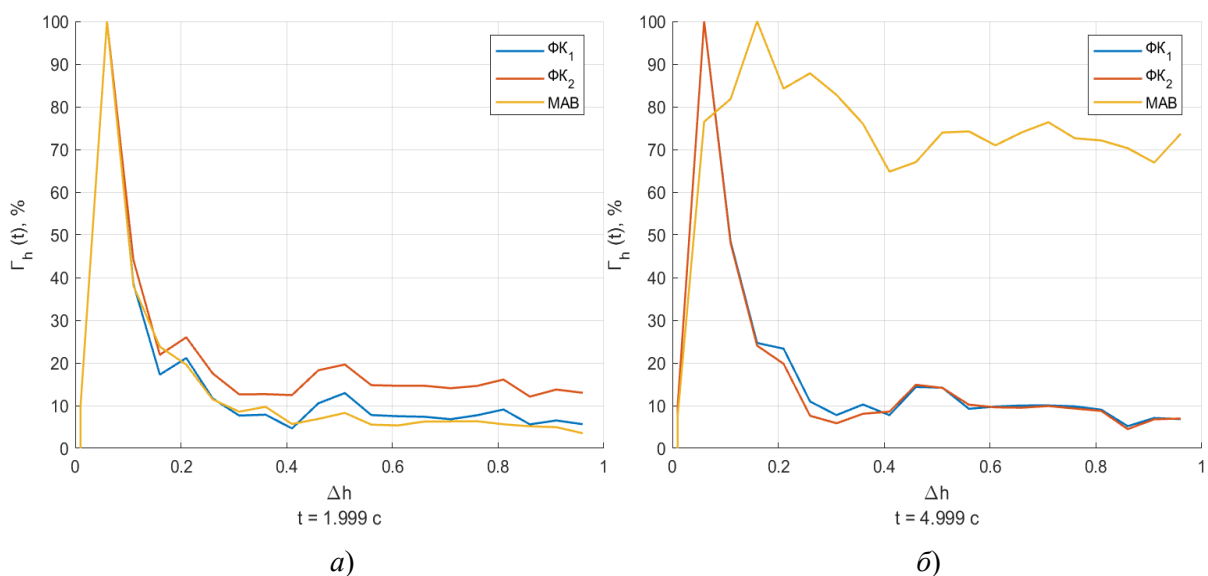


Рисунок 5 – Зависимости нормированного значения чувствительности в большом от величины отклонения параметра h от его истинного значения для фиксированного момента времени:
 $a - t = 1,999$ с; $b - t = 4,099$ с

Figure 5 – Dependences of the normalized sensitivity value in large on the magnitude of the deviation of the parameter h from its true value for a fixed point in time $a - t = 1.999$ s; $b - t = 4.099$ s

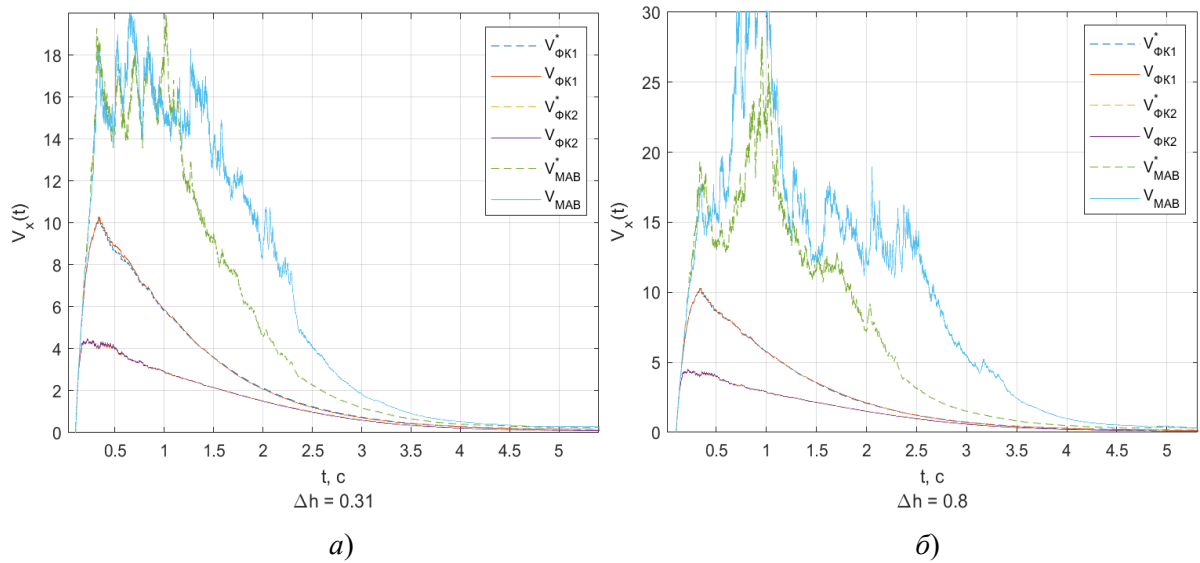


Рисунок 6 – Зависимость следа матрицы действительной дисперсии ошибки оценивания V_x и дисперсии с учетом отклонения параметра Δh (V_x^*) от времени для разных фильтров при:

$a - \Delta h = 0,31$; $b - \Delta h = 0,8$

Figure 6 – Dependence of the trace of the matrix of the actual variance of the estimation error V_x and the variance taking into account the deviation of the parameter Δh (V_x^*) on time for different filters at:

$a - \Delta h = 0.31$; $b - \Delta h = 0.8$

Изменение параметра $\Psi_v(t)$. На Рисунках 7, 8 и 9 изображены стабильность, чувствительность и след ковариационных матриц ошибок оценивания при изменении матрицы интенсивности шума наблюдения Ψ_v .

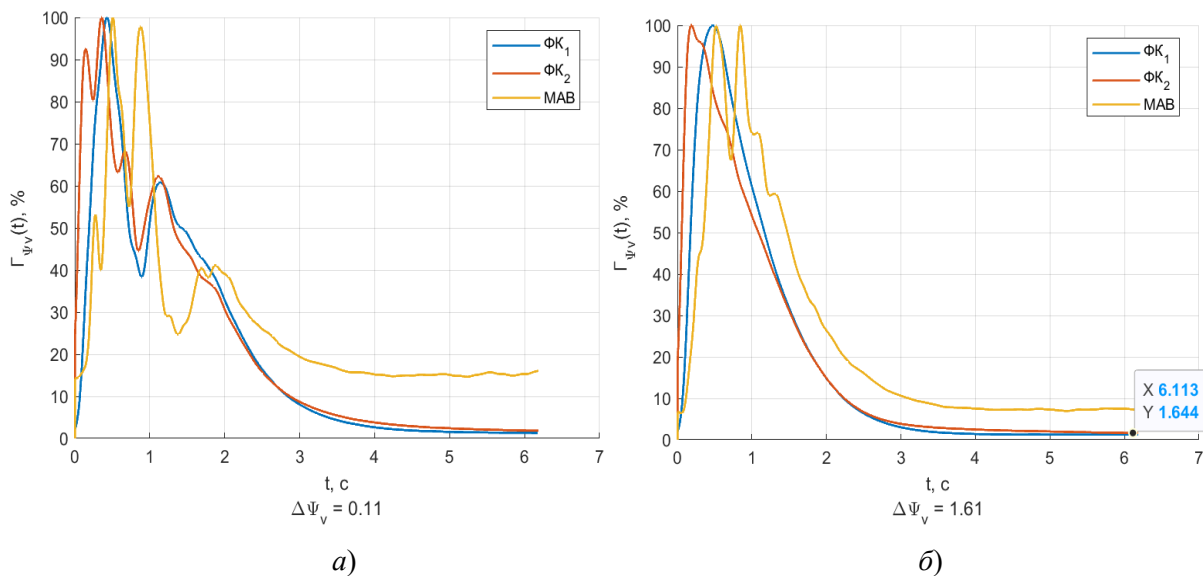


Рисунок 7 – Устойчивость фильтров к отклонению параметра Ψ_v при фиксированном значении:

$a - \Delta \Psi_v = 0,11$; $b - \Delta \Psi_v = 1,61$

Figure 7 – Filter stability to deviation of the parameter Ψ_v at a fixed value:

$a - \Delta \Psi_v = 0.11$; $b - \Delta \Psi_v = 1.61$

На Рисунке 8 изображены функции чувствительности от рассогласования параметра Ψ_v .

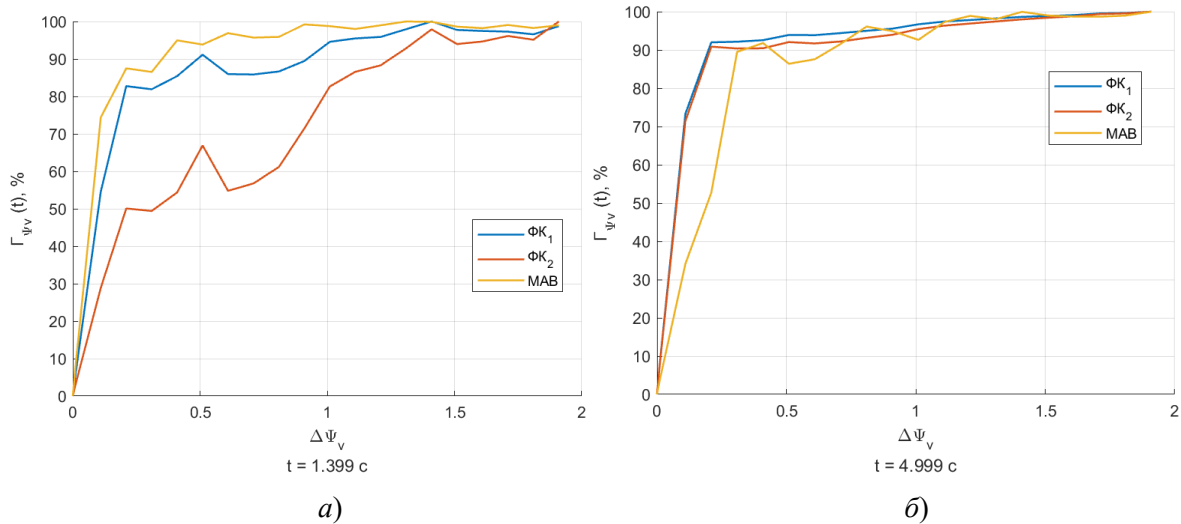


Рисунок 8 – Зависимости чувствительности в большом от величины отклонения параметра от его истинного значения для фиксированного момента времени: $a - t = 1,399$ с; $б - t = 5,099$ с
Figure 8 – Dependences of sensitivity in large on the magnitude of the deviation of the parameter from its true value for a fixed point in time: $a - t = 1.399$ s; $b - t = 5.099$ s

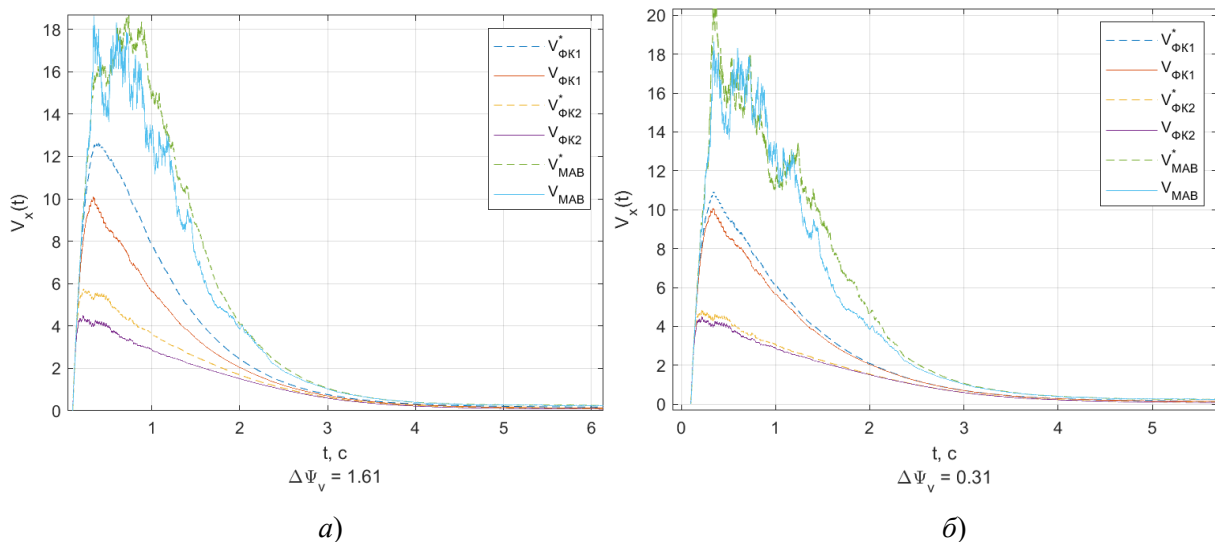


Рисунок 9 – Зависимость следа матрицы действительной дисперсии ошибки оценивания V_x и дисперсии с учетом отклонения параметра $\Delta\Psi_v$ (V_x^*) от времени для разных фильтров при:

$$a - \Delta\Psi_v = 1,61; б - \Delta\Psi_v = 0,31$$

Figure 9 – Dependence of the trace of the matrix of the actual variance of the estimation error V_x and the variance taking into account the deviation of the parameter $\Delta\Psi_v$ (V_x^*) on time for different filters at: $a - \Delta\Psi_v = 1.61$; $b - \Delta\Psi_v = 0.31$

Обсуждение

По Рисунку 1, демонстрирующему устойчивость фильтров к отклонению параметра f , до половины временного интервала можно наблюдать осциллирующий характер функции чувствительности, затем она стремится к постоянному значению, что свидетельствует о линейном изменении разброса дисперсии $tr(V_x(t)) - tr(\bar{V}_x(t))$. По Рисунку 2 можно увидеть, что после резкого скачка чувствительности для значения $\Delta f \approx 0,5$ при дальнейшем увеличении рассогласования отклонение дисперсии меняется линейно или более сложным образом, как на Рисунке 2б, где замечен прирост чувствительности на 5 % (фильтры Калмана) – 10 % (фильтр МАВ). Согласно

Рисунку 3б, большему значению Δf соответствует большая дисперсия в установившемся режиме.

При изменении параметра h , как и в случае для f , в первой половине интервала наблюдения можно увидеть скачок чувствительности, которая затем стабилизируется. Показанные на Рисунке 6 ковариации ошибок оценивания демонстрируют заметное ухудшение точности для фильтра МАР, при этом ковариация фильтров Калмана практически не меняется.

При изменении интенсивности шума наблюдения Ψ_v к концу интервала наблюдения ковариация ошибки оценивания при фиксированном $\Delta\Psi_v$ практически «сливается» с истинной ковариацией, что демонстрируют Рисунки 7 и 8.

Интересно заметить, что эффект увеличения ошибки фильтрации очевиднее всего проявляется при изменении параметра f в устоявшемся режиме. Для параметра h все графики дисперсии для фильтров Калмана сходятся к одному и тому же значению вне зависимости от того, какой фильтр использовался, будь то истинная дисперсия или предполагаемая. Из всех трех вариантов этот случай характеризуется минимальной чувствительностью для фильтров Калмана, но максимальной – для фильтра МАР. Третий случай – изменение матрицы интенсивности шума наблюдения – показывает, что даже при значительном отклонении от истинной дисперсии ошибки в начале интервала наблюдения увеличение дисперсии нивелируется в конце этого интервала.

Заключение

Результаты моделирования показывают, что влияние вариаций параметров модели различно для разных моментов времени, но при этом сохраняется общая тенденция к стабилизации чувствительности на второй половине интервала наблюдения. В зависимости от анализируемого параметра увеличение ковариации, например, остается существенным в состоянии стабильности (Рисунок 3) или практически нивелируется во второй половине интервала наблюдения (Рисунок 9). Таким образом, на основании данных о чувствительности можно формулировать требования к допустимым отклонениям параметров, при которых модель работает адекватно, и необходимости в усложненных средствах обработки нет. Эти выводы и приведенный в работе принцип вычисления чувствительности можно использовать для рационального выбора алгоритма нелинейного оценивания в случаях, когда точные сведения о параметрах сигналов отсутствуют, а также при синтезе алгоритмов фильтрации, минимизирующих рассогласование истинной и предполагаемой ковариаций ошибки, аналогично [10].

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Сейдж Э., Мелс Дж. *Теория оценивания и ее применения в связи и управлении*. Москва: Связь; 1976. 496 с.
Sage A., Melse J. *Estimation Theory with Application to Communication and Control*. Moscow: Svyaz'; 1976. 496 p. (In Russ.).
2. Barreto A., Adjouadi M., Ortega F.R., O-Larnnithipong N. *Intuitive Understanding of Kalman Filtering with MATLAB®*. Boca Raton: CRC Press; 2021. 229 p.
3. Jazwinski A.H. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Mineola: Courier Corporation; 2007. 376 p.
4. Кловский Д.Д., Конторович В.Я., Широков С.М. *Модели непрерывных каналов связи на основе стохастических дифференциальных уравнений*. Москва: Радио и связь; 1984. 248 с.

5. Глушанков Е.И., Конторович В.Я., Караваев Д.А. Математическое моделирование сигналов в непрерывных каналах связи в форме стохастических дифференциальных уравнений. *Системы управления, связи и безопасности*. 2023;(4):1–35. <https://doi.org/10.24412/2410-9916-2023-4-1-35>
Glushankov E.I., Kontorovich V.Ya., Karavaev D.A. Signal Modeling in Continuous Communication Channels in the Form of Stochastic Differential Equations. *Systems of Control, Communication and Security*. 2023;(4):1–35. (In Russ.). <https://doi.org/10.24412/2410-9916-2023-4-1-35>
6. Madjarov N., Mihaylova L. Kalman filter sensitivity with respect to parametric noises uncertainty. *Kybernetika*. 1996;32(3):307–322.
7. Глушанков Е.И., Кондрашов З.К., Конторович В.Я., Суденкова А.В. Фильтрация навигационных сигналов в радионавигационных системах. *Журнал радиоэлектроники*. 2025;(5). <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.5.4>
Glushankov E.I., Kondrashov Z.K., Kontorovich V.Ya., Sudenkova A.V. Filtering of navigation signals in radio navigation systems. *Journal of Radio Electronics*. 2025;(5). (In Russ.). <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.5.4>
8. Saha M., Ghosh R., Goswami B. Robustness and Sensitivity Metrics for Tuning the Extended Kalman Filter. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2013;63(4):964–971. <https://doi.org/10.1109/TIM.2013.2283151>
9. Cicci D.A., Ballard G.H. Sensitivity of an extended Kalman filter 1. Variation in the number of observers and types of observations. *Applied Mathematics and Computation*. 1994;66(2–3):233–246. [https://doi.org/10.1016/0096-3003\(94\)90119-8](https://doi.org/10.1016/0096-3003(94)90119-8)
10. Jordana A., Meduri A., Arlaud E., Carpentier J., Righetti L. Risk-Sensitive Extended Kalman Filter. In: *2024 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 13–17 May 2024, Yokohama, Japan*. IEEE; 2024. P. 10450–10456. <https://doi.org/10.1109/ICRA57147.2024.10611266>

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Глушанков Евгений Иванович, доктор технических наук, профессор, профессор Sciences, Professor, Professor at the Department of Radio Engineering, The Bonch-Bruевич Saint-Petersburg State University of Telecommunications, Saint-Petersburg, the Russian Federation.
e-mail: glushankov57@gmail.com
ORCID: [0000-0003-4148-3208](https://orcid.org/0000-0003-4148-3208)

Суденкова Анастасия Вячеславовна, инженер кафедры радиотехники, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, Российская Федерация.
e-mail: wwwsudana@outlook.com

Кондрашов Захар Константинович, заместитель генерального конструктора АО «Концерн «Автоматика», Москва, Российская Федерация.
e-mail: ka@ao-avtomatika.ru

*Статья поступила в редакцию 29.12.2025; одобрена после рецензирования 06.02.2026;
принята к публикации 11.02.2026.*

*The article was submitted 29.12.2025; approved after reviewing 06.02.2026;
accepted for publication 11.02.2026.*