УДК 519.876.5
DOI: 10.26102/2310-6018/2026.53.2.010

Оптимальное управление конечными приращениями факторов модели на основе анализа чувствительности

А.С. Сысоев✉

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Российская Федерация

Резюме. В статье рассматривается актуальная обратная задача целевого управления: определение необходимых конечных изменений входных факторов системы для достижения желаемого целевого состояния, в отличие от классической прямой задачи прогнозирования. Для ее решения предлагается новый методологический подход, основанный на анализе чувствительности с использованием теоремы Лагранжа о промежуточной точке. Этот аппарат позволяет перейти от локальной линеаризации к точному учету нелинейных эффектов и взаимодействий факторов при существенных, наблюдаемых на практике изменениях. Ключевым научным результатом является разработка универсального итерационного алгоритма, который для заданной математической модели определяет вектор конечных изменений управляемых факторов, обеспечивающий требуемое приращение выходного показателя при минимальной совокупной стоимости вносимых изменений и с учетом заданных ограничений. На каждом шаге итерации вычисляется градиент модели (оценка чувствительности) в промежуточной точке, положение которой последовательно уточняется, и решается вспомогательная задача условной оптимизации. Практическая эффективность и работоспособность предложенного метода верифицированы на численном примере с нелинейной моделью Ишигами. Алгоритм успешно нашел оптимальное управляющее воздействие, обеспечив высокую точность достижения цели.

Ключевые слова: обратная задача управления, анализ чувствительности, анализ конечных изменений, теорема Лагранжа о промежуточной точке, условная оптимизация.

Для цитирования: Сысоев А.С. Оптимальное управление конечными приращениями факторов модели на основе анализа чувствительности. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2026;14(2). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/article?id=2202 DOI: 10.26102/2310-6018/2026.53.2.010

Optimal control of finite increments of model factors based on sensitivity analysis

A.S. Sysoev✉

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation

Abstract. The article addresses the topical inverse problem of target-oriented control: determining the necessary finite changes to the system's input factors to achieve a desired target state, as opposed to the classical direct problem of forecasting. To solve it, a new methodological approach is proposed. This approach is based on sensitivity analysis utilizing the Lagrange mean value theorem. This framework allows for moving beyond local linearization to precisely account for nonlinear effects and factor interactions under substantial, practically observed changes. The key scientific result is the development of a universal iterative algorithm, which, for a given mathematical model, determines the vector of finite changes for the controllable factors that ensures the required increment in the output indicator with minimal total cost of the introduced changes and within given constraints. At each iteration step, the model's gradient (sensitivity estimate) is computed at an intermediate point, whose position is sequentially refined, and an auxiliary constrained optimization problem is solved. The practical efficiency and operability of the proposed method are verified using a numerical example with the nonlinear Ishigami model. The algorithm successfully found the optimal control action, ensuring high accuracy in achieving the target.

Keywords: inverse control problem, sensitivity analysis, finite change analysis, Lagrange mean value theorem, constrained optimization.

For citation: Sysoev A.S. Optimal control of finite increments of model factors based on sensitivity analysis. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2026;14(2). (In Russ.). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/article?id=2202 DOI: 10.26102/2310-6018/2026.53.2.010

Введение

В системах управления различной природы часто возникает практическая задача целевого воздействия: для желаемого конечного состояния системы определить необходимые конечные изменения ее входов. Такая обратная задача принципиально отличается от классической прямой задачи прогнозирования, где по известным входным данным оценивается результат. Решение подобной задачи соответствует логике управления, когда сначала формулируется цель, а затем подбираются инструменты для ее достижения, оценивается реалистичность целевых показателей и обосновывается распределение ресурсов.

Ключевым инструментом для решения таких задач является анализ чувствительности по факторам математической модели, позволяющий количественно оценить влияние вариаций каждого входного фактора на итоговый отклик системы.

В данной статье предлагается общий методологический подход к решению обратной задачи управления. Его основой является итерационный алгоритм, который для заданной модели определяет вектор конечных изменений управляемых факторов, обеспечивающий требуемое приращение выходного показателя при минимальной стоимости вносимых изменений. Алгоритм последовательно использует градиент модели (оценку ее факторной чувствительности) в промежуточных точках и на каждом шаге решает вспомогательную задачу условной оптимизации. Предлагаемый метод формализует процесс поиска оптимального управляющего воздействия в условиях заданных ограничений и предоставляет конкретный, количественно измеримый план достижения целевого состояния системы.

Материалы и методы

Существующие методы анализа чувствительности по факторам математических моделей. Анализ чувствительности (Sensitivity Analysis) представляет собой ключевой инструмент исследования математических моделей, позволяющий оценить, как неопределенность или вариация входных параметров (факторов) влияет на неопределенность или изменение выходного показателя (отклика) модели [1, 2]. Это позволяет идентифицировать наиболее значимые факторы, упростить сложные модели, исследовать их устойчивость и обосновать распределение ресурсов для сбора данных [3]. В зависимости от поставленных целей и характера модели, методы анализа чувствительности делятся на две основные категории: локальные и глобальные [4].

Локальные методы оценивают влияние факторов на выход модели в окрестности определенной базовой (номинальной) точки пространства входных факторов $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Классической мерой локальной чувствительности является частная производная отклика модели $y = f(x)$ по фактору x_i: $A_i = \left.\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{x^{(0)}}$. Эта величина характеризует скорость изменения выхода при малом возмущении отдельного фактора при фиксированных остальных [5]. Простейшим и наиболее интуитивно понятным подходом является метод «один за раз» (One-at-a-Time, OAT) [6]. При таком подходе все факторы фиксируются на номинальных значениях, кроме одного, который варьируется в заданном диапазоне (например, от минимального до максимального). Чувствительность для фактора x_i оценивается как разностное отношение:

$$\Delta_i = \frac{y_i^{max} - y_i^{min}}{x_i^{max} - x_i^{min}},$$

где y_i^{max} и y_i^{min} – значения выхода модели при экстремальных значениях фактора x_i. Несмотря на простоту, метод не учитывает взаимодействий между факторами, так как он не исследует одновременные изменения нескольких входов.

Более продвинутым локальным методом, преодолевающим некоторые ограничения OAT, является метод Морриса [7, 8]. Он также основан на варьировании факторов «один за раз», но проводит множество таких экспериментов, начиная с различных случайных точек в пространстве входов. Для каждого фактора j на каждой i-ой траектории вычисляется элементарный эффект:

$$E_j^{(i)} = \frac{f(x^{(i)} + \Delta e_j) - f(x^{(i)})}{\Delta},$$

где Δ – фиксированный шаг, а e_j – единичный вектор. На основе множества таких эффектов вычисляются две интегральные метрики: μ_j^* – среднее абсолютное значение элементарных эффектов, являющееся мерой общего влияния фактора j на выход; σ_j – стандартное отклонение элементарных эффектов, служащее индикатором нелинейности влияния фактора или его взаимодействий с другими факторами. Метод Морриса считается эффективным скрининговым инструментом, позволяющим с относительно небольшими вычислительными затратами ранжировать факторы по степени их влияния и выявить те из них, которые требуют более детального изучения с помощью ресурсоемких глобальных методов [9].

Глобальные методы исследуют влияние факторов на выход модели во всем пространстве их возможных изменений, учитывая при этом их полные диапазоны распределения и, как правило, взаимодействия между факторами [10]. Эти методы не привязаны к конкретной точке и позволяют получить более полную картину поведения модели.

Если предполагается, что связь между входами и выходом модели может быть аппроксимирована линейной регрессией, для оценки важности факторов могут использоваться стандартизованные коэффициенты регрессии. После построения линейной модели $y = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ вычисляются стандартизованные регрессионные коэффициенты $SRC_j = \beta_j \sqrt{\frac{Var(x_j)}{Var(y)}}$. При условии независимости входных факторов, SRC_j^2 приблизительно равен доле дисперсии выхода y, объясняемой фактором x_j. Также могут использоваться коэффициенты парной и частной корреляции. Однако применимость этих методов строго ограничена случаями, когда модель линейна или слабо нелинейна, что необходимо предварительно проверять (например, с помощью коэффициента детерминации.

Наиболее мощным и теоретически обоснованным классом глобальных методов является подход, основанный на разложении дисперсии выходного показателя на компоненты, обусловленные отдельными факторами и их взаимодействиями [11, 12]. Ключевым аппаратом здесь служит разложение, основанное на дисперсионном анализе (ANOVA), или разложение Хоффдинга [13, 14]. Для квадратично интегрируемой функции $y = f(x)$ дисперсия выходного показателя $Var(y)$ может быть представлена в виде суммы:

$$Var(y) = \sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{i<j}^{n} V_{ij} + \ldots + V_{12\ldots n},$$

где $V_i = Var[E(y|x_i)]$ – дисперсия, обусловленная главным эффектом фактора x_i, V_{ij} – дисперсия, обусловленная взаимодействием факторов x_i и x_j, и так далее. Наиболее известными индексами, вытекающими из этого разложения, являются индексы Соболя. Они определяются как отношения соответствующих дисперсионных компонент к общей дисперсии:

1) индекс первого порядка (главный эффект): $S_i = \frac{V_i}{Var(y)}$ – показывает долю дисперсии выхода, которую можно приписать исключительно фактору x_i;

2) индекс общей чувствительности (полный эффект): $S_{T_i} = \frac{V_i + \sum_{j \neq i} V_{ij} + \ldots}{Var(y)}$ – показывает общую долю дисперсии выхода, связанную с фактором x_i, включая все его взаимодействия с другими факторами. Разница $S_{T_i} - S_i$ характеризует степень вовлеченности фактора во взаимодействия. Индексы Соболя не накладывают предположений о линейности или монотонности модели и являются универсальным инструментом [15]. Их основной недостаток – высокая вычислительная стоимость, особенно для моделей с большим числом факторов, что стимулировало развитие методов на основе метамоделей (суррогатных моделей), таких как гауссовские процессы [16, 17].

Помимо описанных, существует множество других методов. Методы, не основанные на дисперсии, например, моменто-независимые меры, оценивают влияние на всю функцию распределения выхода, а не только на ее дисперсию [18]. Также развиваются подходы для анализа чувствительности в условиях зависимых входных факторов [15] и для специфических классов моделей, таких как нейронные сети [19, 20].

Анализ чувствительности по факторам, основанный на применении методов анализа конечных изменений. Предлагаемый подход, основанный на применении анализа конечных изменений, представляет собой метод построения меры чувствительности, которая устанавливает количественную связь между конечными, а не бесконечно малыми, изменениями входных факторов модели и результирующим конечным изменением ее выходного показателя. Метод основан на теоретическом аппарате математического анализа, в частности, на теореме Лагранжа о промежуточной точке для функций многих переменных [19, 20]. Его ключевое преимущество заключается в применимости к случаям существенных, наблюдаемых на практике вариаций входов системы, где классическое линеаризованное представление через частные производные в одной точке может давать значительную погрешность.

Пусть исследуемая система описывается дифференцируемой функцией $y = f(x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор факторов. Рассмотрим наблюдаемый переход системы из некоторого начального состояния $x^{(0)}$ в конечное состояние $x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x$, где $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)^T$ – вектор реализованных конечных приращений факторов. Соответствующее изменение выходного показателя равно $\Delta y = y^{(1)} - y^{(0)} = f\left(x^{(1)}\right) - f(x^{(0)})$.

Согласно теореме Лагранжа о промежуточной точке (формула конечных приращений), для дифференцируемой на отрезке функции существует точка $x^{(m)}$, лежащая на отрезке между $x^{(0)}$ и $x^{(1)}$, в которой выполняется точное равенство [19]:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x^{(m)}} \Delta x_i,$$

где промежуточная точка $x^{(m)} = (x_1^{(0)} + \alpha\Delta x_1, \ldots, x_n^{(0)} + \alpha\Delta x_n)^T$, $\alpha \in (0{,}1)$. Параметр α в данном контексте не является заранее известным; он определяется конкретной функцией f и величинами приращений Δx. Таким образом, формула конечных приращений представляет собой точную связь между конечными изменениями, в которой роль меры чувствительности (коэффициента при Δx_i) играет частная производная, вычисленная не в начальной или конечной точке, а в некоторой промежуточной точке траектории изменения системы.

Обратная задача анализа чувствительности. Рассмотренный теоретический аппарат анализа конечных изменений, основанный на теореме Лагранжа о промежуточной точке, естественным образом приводит к формулировке обратной задачи анализа чувствительности, которая лежит в основе предлагаемого методологического подхода к управлению.

Пусть поведение исследуемой системы описывается известной, непрерывно дифференцируемой функцией отклика $y = f(x)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ – вектор управляемых входных факторов, а x_i – целевой выходной показатель (результат). Предположим, что система находится в некотором текущем (базовом) состоянии, характеризуемом вектором факторов $x^{(0)}$ и соответствующим значением отклика $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Ставится задача достижения нового целевого состояния с желаемым значением выходного показателя y^*: для заданного целевого (желаемого) приращения выходного показателя $\Delta y^* = y^* - y^{(0)}$ определить такой вектор конечных приращений управляемых факторов Δx^*, который обеспечивает это приращение: $f\left(x^{(0)} + \Delta x^*\right) - -f(x^{(0)}) = \Delta y^*$.

В общем случае такое уравнение может иметь бесконечное множество решений или не иметь их вовсе. Поэтому задача дополняется критерием оптимальности. Как правило, изменение каждого фактора x_i связано с определенными затратами, которые описываются функцией стоимости $C(\Delta x)$. На изменения факторов также могут накладываться ограничения, определяемые физическими, технологическими или экономическими условиями.

Таким образом, формальная постановка обратной задачи анализа чувствительности формулируется как задача условной оптимизации: для дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке $x^{(0)}$ и заданного целевого приращения Δy требуется найти такой вектор приращений Δx, который удовлетворяет:

$$\begin{cases} f(x^{(0)} + \Delta x^*) - f(x^{(0)}) = \Delta y^*, \\ \Delta x^* \in D, \\ C(\Delta x^*) \to min, \end{cases}$$

где D – допустимое множество, определяемое ограничениями на факторы.

Использование теоремы Лагранжа о промежуточной точке позволяет преобразовать основное равенство-ограничение задачи. Согласно теореме, для найденного оптимального приращения Δx существует некоторый параметр $\alpha \in (0{,}1)$, определяющий промежуточную точку.

Это представление является ключевым. Оно заменяет нелинейное уравнение связи между Δx и Δy^* на линейное относительно Δx, но с принципиальной оговоркой: коэффициенты линейной формы (частные производные) неизвестны заранее, так как промежуточная точка зависит от искомого же решения Δx. Тем не менее, данное представление формирует основу для построения итерационного алгоритма, в котором на каждом шаге приближенное значение градиента в промежуточной точке уточняется, что позволяет последовательно решать вспомогательную задачу оптимизации для нахождения Δx.

Алгоритм оптимального управления конечными приращениями факторов для достижения заданного приращения отклика. Обратная задача анализа чувствительности представляет собой задачу нахождения оптимального (минимального по стоимости) управляющего воздействия Δx^*, переводящего систему из текущего состояния в целевое с заданной точностью, при условии соблюдения всех наложенных ограничений.

Далее синтезирован итерационный процесс решения обратной задачи, формирующий алгоритм оптимального управления конечными приращениями факторов для достижения заданного приращения отклика.

Шаг 1. Инициализация. На этом этапе выполняется подготовка к вычислительному процессу. Задается начальное предположение о величинах изменений факторов, которое может быть основано на априорной информации или выбрано случайным образом в допустимой области. Параметр $\alpha \in (0,1)$, определяющий положение промежуточной точки, инициализируется значением 0,5, что соответствует середине интервала между начальной и конечной точками. Устанавливаются пороговые значения точности для прекращения итераций.

1.1. Задать начальное приближение $\Delta x^{(0)} = (\Delta x_1^{(0)}, \ldots, \Delta x_n^{(0)})$.

1.2. Выбрать начальное значение $\alpha = 0{,}5$.

1.3. Задать критерий останова.

1.4. Вычислить начальное значение целевой функции $C^0 = C(\Delta x^0)$.

Шаг 2. Выполняется циклический процесс уточнения решения, на каждом шаге которого последовательно улучшается оценка оптимальных приращений факторов. Итерации продолжаются до достижения заданной точности или исчерпания лимита вычислений.

Для $k = 0,1,2, \ldots, max_$iter:

2.1. Определяется точка на отрезке между начальным и текущим предполагаемым состоянием системы, в которой будет вычисляться градиент функции. Эта точка определяется параметром α, который характеризует «среднюю» чувствительность на интервале:

$$x_\alpha^{(k)} = x^{(0)} + \alpha^{(k)} \Delta x^{(k)}.$$

2.2. Рассчитываются частные производные функции отклика по каждому фактору в найденной промежуточной точке. Эти значения характеризуют локальную чувствительность функции в данной точке:

$$g_i^{(k)} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_\alpha^{(k)}), \;\; i = 1, \ldots, n.$$

2.3. Решается вспомогательная задача оптимизации, в которой требуется найти такие приращения факторов, которые при текущей оценке чувствительности обеспечивают целевое изменение функции отклика при минимальной стоимости изменений.

Найти $\Delta x^{(k+1)}$ как решение

$$min\, C(\Delta x),$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} g_i^{(k)} \cdot \Delta x_i = \Delta y^*, \\ \Delta x \in D, \end{cases}$$

где D – область допустимых решений.

2.4. Уточняется положение промежуточной точки путем решения нелинейного уравнения, которое обеспечивает согласованность между текущей оценкой приращений факторов и теоретическим предсказанием на основе теоремы Лагранжа о промежуточной точке.

Решить уравнение относительно $\alpha^{(k+1)}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^{(0)} + \alpha^{(k+1)} \Delta x^{(k+1)}\right) \cdot \Delta x_i^{(k+1)} - \Delta y^* = 0.$$

2.5. Проверяется, достигнута ли требуемая точность решения по трем ключевым параметрам: точности достижения целевого приращения функции, стабилизации решения по приращениям факторов и стабилизации параметра α.

Если выполняются условия: $\left|f\left(x^{(0)} + \Delta x^{(k+1)}\right) - f\left(x^{(0)}\right) - \Delta y^*\right| < \varepsilon_f$ или $\left\|\Delta x^{(k+1)} - \Delta x^{(k)}\right\| < \varepsilon_x$ или $\left|\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}\right| < \varepsilon_\alpha$, то перейти к Шагу 3.

Шаг 3. Выполняется проверка корректности найденного решения, включающая контроль соблюдения ограничений и оценку точности достижения целевого приращения функции.

3.1. Проверить выполнение ограничений: $\Delta x^* \in D$.

3.2. Убедиться в точности достижения цели: $\left|f\left(x^{(0)} + \Delta x^*\right) - f\left(x^{(0)}\right) - \Delta y^*\right| < \varepsilon_f$.

3.3. Проанализировать устойчивость решения.

Шаг 4. Проводится комплексный анализ полученного решения, включающий оценку эффективности затрат, распределение вклада факторов в общее изменение.

4.1. Вычислить финальное значение целевой функции $C^* = C(\Delta x^*)$.

4.2. Определить вклад каждого фактора в общее изменение.

Предложенный алгоритм демонстрирует принципиально новый подход к решению обратных задач анализа чувствительности, позволяя не только точно достигать заданного изменения отклика модели, но и оптимально распределять приращения между факторами с учетом их стоимостных характеристик. В отличие от традиционных методов, основанных на локальной линеаризации, данный алгоритм учитывает нелинейность поведения модели на всем интервале изменений за счет итерационного уточнения положения промежуточной точки в соответствии с теоремой Лагранжа. Для демонстрации практической эффективности предложенного метода и верификации его вычислительных характеристик рассмотрим конкретный пример применения алгоритма.

Результаты и обсуждение

В качестве примера рассмотрим модель Ишигами – широко известный тестовый пример в анализе чувствительности, описываемый функцией:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sin x_1 + a \cdot \sin^2 x_2 + b \cdot x_3 \cdot \sin x_1,$$

где обычно принимают $a = 7,\ b = 0{,}1$, а факторы x_1, x_2, x_3 распределены равномерно на интервале $[-\pi;\ \pi]$.

Функция стоимости в нашем случае может быть определена как

$$C(\Delta x) = \sum_{i=1}^{3}\left(c_i \cdot \Delta x_i^2 + d_i \cdot |\Delta x_i|\right),$$

где c_i – коэффициенты, отражающие нелинейную стоимость изменения i-го фактора, d_i –коэффициенты, отражающие линейную стоимость изменения i-го фактора. Примем в данном примере $c_i = [0{,}15; 0{,}1; 0{,}01]$, $d_i = [1{,}0; 0{,}5; 0{,}25]$.

Область допустимых решений может быть записана в виде:

$$D = \begin{cases} -\pi \le x_i^0 + \Delta x_i \le \pi \\ |\Delta x_i| \le \Delta x_i^{max} \end{cases}.$$

Для реализации алгоритма анализа чувствительности и решения обратной задачи был разработан скрипт на языке R. Программная реализация включает следующие основные компоненты: функция Ишигами и вычисление ее частных производных аналитическим способом; функция стоимости изменений факторов с заданными коэффициентами; итерационный алгоритм решения обратной задачи, сочетающий метод проекции градиента для оптимизации и метод секущих для определения параметра α; визуализация результатов в виде гистограммы вкладов факторов и круговой диаграммы распределения.

Скрипт позволяет находить оптимальную комбинацию приращений факторов Δx^*, обеспечивающую достижение заданного приращения функции Δy_{target} при минимальной стоимости изменений $C(\Delta x)$.

Разработанный алгоритм успешно решил обратную задачу анализа чувствительности для модели Ишигами в точке $x = (-1; -2{,}3)$, обеспечив достижение целевого приращения $\Delta y = 0{,}15$ с точностью 99,3 % при минимальной стоимости изменений 0,0096. Результаты демонстрируют эффективность метода: алгоритм идентифицировал доминирующий вклад фактора x_3 (82,1 %), компенсирующий отрицательный вклад x_1 (−10 %) и положительный вклад x_2 (7,9 %) (Рисунок 1), что позволило найти оптимальную комбинацию приращений факторов $\Delta x = (-0{,}0039; 0{,}0028; -0{,}0172)$ с учетом нелинейного поведения модели через параметр $\alpha = 0{,}999$. Распределение вклада факторов в абсолютных значениях представлено на Рисунке 2.

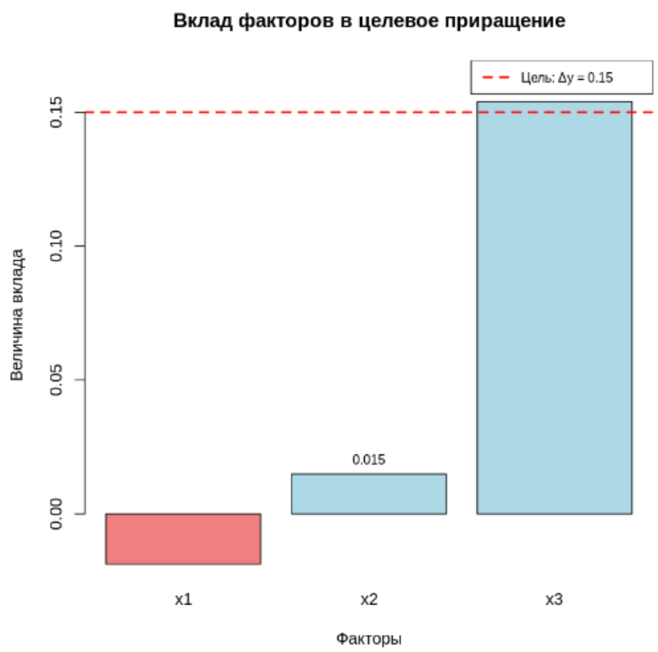

Рисунок 1 – Вклад факторов в целевое приращение функции Ишигами
Figure 1 – Contribution of factors to the target increment of the Ishigami function

Полученное решение наглядно иллюстрирует ключевое преимущество предложенного подхода – способность учитывать нелинейные эффекты взаимодействия факторов при конечных приращениях. Несмотря на сравнительно небольшое абсолютное изменение фактора x_3 (−0,0172), его вклад оказался доминирующим благодаря высокой чувствительности функции $f(x)$ к вариациям именно этого входа в окрестности выбранной точки, что выражается в значении соответствующей частной производной $\partial f/\partial x_3$. Алгоритм эффективно использовал эту особенность, минимизируя стоимость изменений за счет оптимального распределения вкладов между факторами, при этом параметр $\alpha = 0{,}999$ указывает на практически линейное поведение модели на данном интервале изменений, что подтверждает корректность решения и его соответствие условиям теоремы Лагранжа о конечных приращениях.

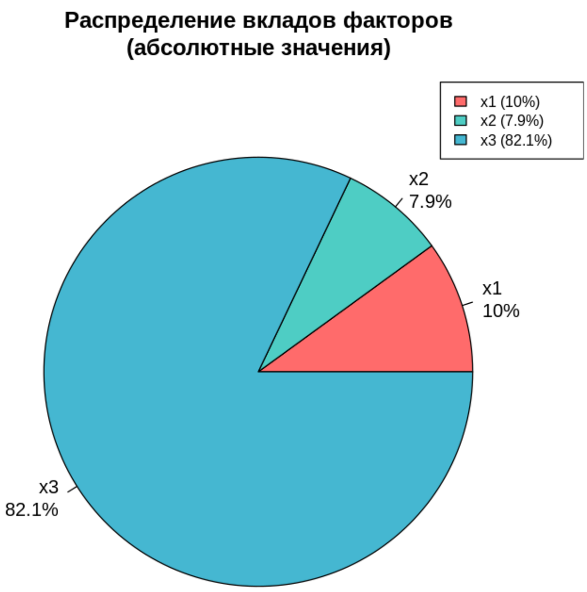

Рисунок 2 – Вклад факторов в целевое приращение функции Ишигами
Figure 2 – Distribution of factor contributions to the target increment of the Ishigami function

Заключение

В статье рассмотрена актуальная обратная задача целевого управления системами. Предложен новый методологический подход, основанный на анализе чувствительности с использованием аппарата анализа конечных изменений. Основным научным результатом является разработка универсального итерационного алгоритма, который определяет вектор изменений входных факторов, обеспечивающий заданное целевое приращение выходного показателя с минимальной стоимостью и соблюдением ограничений. Ключевая особенность синтезированного алгоритма – использование точного равенства из теоремы Лагранжа, что позволяет корректно учитывать нелинейные эффекты и взаимодействия факторов при конечных изменениях.

Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением области применимости предложенного подхода. Ключевыми направлениями являются адаптация алгоритма для работы со стохастическими моделями, где входные факторы или выходной отклик характеризуются распределениями, что потребует интеграции методов анализа чувствительности для случайных факторов и переформулировки целевого условия (например, как достижение заданного математического ожидания или квантиля). Другим важным направлением является применение метода к моделям типа «черный ящик» и повышение его вычислительной эффективности. Для сложных моделей, где аналитический расчет градиента невозможен или чрезмерно затратен, перспективной представляется комбинация алгоритма с приближенными методами для аппроксимации как градиента, так и самой функции отклика, что позволит значительно снизить вычислительные затраты.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Hamby D.M. A review of techniques for parameter sensitivity analysis of environmental models. Environmental Monitoring and Assessment. 1994;32(2):135–154. https://doi.org/10.1007/BF00547132
2. Saltelli A., Tarantola S., Campolongo F. Sensitivity analysis as an ingredient of modeling. *Statistical Science*. 2000;15:377–395. https://doi:10.1214/ss/1009213004
3. Sarrazin F., Pianosi F., Wagener T. Global Sensitivity Analysis of environmental models: Convergence and validation. *Environmental Modelling & Software*. 2016;79:135–152. https://doi:10.1016/j.envsoft.2016.02.005
4. Saltelli A., et al. *Global Sensitivity Analysis: The Primer*. John Wiley & Sons; 2008:292.
5. Pujol G. Simplex-based screening designs for estimating metamodels. *Reliability Engineering & System Safety*. 2009;94:1156–1160. https://doi:10.1016/j.ress.2008.08.002
6. Hamby D.M. A comparison of sensitivity analysis techniques. *Health Physics*. 1995;68:195–204.
7. Box G.E.P., Meyer R.D. An analysis for unreplicated fractional factorials. *Technometrics*. 1986;28:11–18. https://doi:10.1080/00401706.1986.10488093
8. Dean A., Lewis S., editors. *Screening: Methods for Experimentation in Industry, Drug Discovery, and Genetics*. Springer; 2006:332.
9. Iooss B., Lemaître P. A review on global sensitivity analysis methods. In: Dellino G., Meloni C., editors. *Uncertainty Management in Simulation-Optimization of Complex Systems: Algorithms and Applications*. Springer; 2015. p. 101–122. https://doi:10.1007/978-1-4899-7547-8_5
10. Sobol I.M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2001;55:271–280. https://doi:10.1016/S0378-4754(00)00270-6
11. Sobol I.M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiments*. 1993;1:407–414.
12. Homma T., Saltelli A. Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models. *Reliability Engineering & System Safety*. 1996;52:1–17. https://doi:10.1016/0951-8320(96)00002-6
13. Hoeffding W. A class of statistics with asymptotically normal distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1948;19:293–325. https://doi:10.1007/978-1-4612-0919
14. Efron B., Stein C. The jackknife estimate of variance. *The Annals of Statistics*. 1981;9:586–596. https://doi:10.1007/978-0-387-75692-9_10
15. Lamboni M., Kucherenko S. Multivariate sensitivity analysis and derivative-based global sensitivity measures with dependent variables. *Reliability Engineering & System Safety*. 2021;212:107519. https://doi:10.1016/J.RESS.2021.107519
16. Rana S., Ertekin T., King G.R. An efficient assisted history matching and uncertainty quantification workflow using Gaussian processes proxy models and variogram based sensitivity analysis: GP-VARS. *Computational Geosciences*. 2018;114:73–83. https://doi.org/10.1016/J.CAGEO.2018.01.019
17. Ratto M., Castelletti A., Pagano A. Emulation techniques for the reduction and sensitivity analysis of complex environmental models. *Environmental Modelling & Software*. 2012;34:1–4. https://doi:10.1016/j.envsoft.2011.11.003
18. Borgonovo E., Castaings W., Tarantola S. Model emulation and moment-independent sensitivity analysis: An application to environmental modelling. *Environmental Modelling & Software*. 2012;34:105–115. https://doi:10.1016/j.envsoft.2011.06.006
19. Sysoev A., Ciurlia A., Scheglevatych R., Blyumin S. Sensitivity analysis of neural network models: Applying methods of analysis of finite fluctuations. *Periodica Polytechnica*

Electrical Engineering and Computer Science. 2019;63:306–311. https://doi:10.3311/PPee.14654
20. Blyumin S.L., Borovkova G.S., Serova K.V., Sysoev A.S. Analysis of finite fluctuations for solving big data management problems. In: *Proceedings of the 2015 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT)*; 14–16 October 2015; Rostov-on-Don, Russia. IEEE; 2015. https://doi:10.1109/ICAICT.2015.7338514

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Сысоев Антон Сергеевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики и системного анализа, Липецкий государственный технический университет, Липецк, Российская Федерация.
e-mail: sysoev_as@stu.lipetsk.ru
ORCID: 0000-0002-0866-1124

Anton S. Sysoev, Candidate of Engineering Sciences, Docent, Head of the Department of Applied Mathematics and System Analysis, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 02.02.2026; одобрена после рецензирования 17.02.2026; принята к публикации 24.02.2026.

The article was submitted 02.02.2026; approved after reviewing 17.02.2026; accepted for publication 24.02.2026.