

УДК 621.396.67

DOI: [10.26102/2310-6018/2026.55.4.018](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2026.55.4.018)

## Исследование методов обращения матриц для применения в алгоритмах адаптивного диаграммообразования

Е.И. Глушанков<sup>1</sup>, А.А. Морозов<sup>1</sup>, З.К. Кондрашов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, Российская Федерация

<sup>2</sup>АО «Концерн «Автоматика», Москва, Российская Федерация

**Резюме.** Статья посвящена исследованию методов обращения ковариационных матриц в задачах адаптивного диаграммообразования в антенных решетках. Рассматриваются два варианта обработки сигналов, а именно пространственная и пространственно-временная обработка, для которых анализируется структура ковариационной матрицы и ее влияние на выбор алгоритмов обращения. В качестве эталонного решения используются оптимальные весовые коэффициенты, определяемые по критерию Винера как решение задачи минимизации среднеквадратической ошибки. Проведено сравнение алгоритма Холецкого, рекурсивного алгоритма типа Левинсона, метода Барайсса и БПФ-аппроксимации с точки зрения точности восстановления оптимальных весов, значения среднеквадратической ошибки обучения, формы диаграммы направленности и вычислительной сложности. Численное моделирование выполнено в MATLAB для различных геометрий антенных решеток при одинаковом сценарии помеховой обстановки. Рассмотрена связь между структурой ковариационной матрицы в задачах пространственной и пространственно-временной обработки, выбором алгоритмов ее обращения и их вычислительной эффективностью. Показано, что точные методы обращения обеспечивают совпадение с оптимальным решением, тогда как аппроксимационные методы позволяют существенно снизить вычислительные затраты при контролируемом росте ошибки. Полученные результаты подтверждают целесообразность использования структурных методов обращения ковариационной матрицы в задачах пространственно-временной адаптивной обработки сигналов.

**Ключевые слова:** адаптивная антенная решетка, адаптивное диаграммообразование, ковариационная матрица, обращение матрицы, среднеквадратическая ошибка.

**Для цитирования:** Глушанков Е.И., Морозов А.А., Кондрашов З.К. Исследование методов обращения матриц для применения в алгоритмах адаптивного диаграммообразования. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2026;14(4). URL: <https://moitvivr.ru/ru/journal/article?id=2250> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.55.4.018

## Investigation of matrix inversion methods for application in adaptive beamforming algorithms

E.I. Glushankov<sup>1</sup>, A.A. Morozov<sup>1</sup>, Z.K. Kondrashov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>The Bonch-Bruevich Saint Petersburg State University of Telecommunications, Saint Petersburg, the Russian Federation

<sup>2</sup>JSC «Concern Automatics», Moscow, the Russian Federation

**Abstract.** The paper presents a study of covariance matrix inversion methods in adaptive beamforming for antenna arrays. Two signal processing paradigms are considered, namely spatial processing and space–time processing, for which the structure of the covariance matrix and its impact on the choice of inversion algorithms are analyzed. Wiener-optimal weight vectors, obtained as the solution of the mean square error minimization problem, are used as a reference solution. The Cholesky decomposition, a recursive Levinson-type algorithm, the Bareiss method, and an FFT-based approximation are compared

in terms of the accuracy of reproducing the optimal weights, the resulting training mean square error, the shape of the radiation pattern and computational complexity. Numerical simulations are performed in MATLAB for different antenna array geometries under the same noise scenario. The article considers the relationship between the structure of the covariance matrix in spatial and space-time processing tasks, the choice of algorithms for its inversion, and their computational efficiency. It is shown that exact inversion methods provide results consistent with the Wiener-optimal solution, whereas approximate methods significantly reduce computational cost at the expense of a controlled increase in error. The obtained results confirm the practical relevance of structured covariance matrix inversion methods for space-time adaptive signal processing.

**Keywords:** adaptive antenna array, adaptive beamforming, covariance matrix, matrix inversion, mean square error.

**For citation:** Glushankov E.I., Morozov A.A., Kondrashov Z.K. Investigation of matrix inversion methods for application in adaptive beamforming algorithms. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2026;14(4). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=2250> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.55.4.018

## Введение

Адаптивное диаграммообразование является одним из методов повышения помехоустойчивости современных радиотехнических систем. Адаптивное формирование диаграммы направленности осуществляется различными алгоритмами [1], среди которых важное место занимают прямые алгоритмы адаптации, основанные на непосредственном обращении ковариационных матриц входных сигналов [1]. При этом эффективность и быстродействие таких алгоритмов в значительной мере определяются тем, каким именно способом реализовано обращение ковариационной матрицы входных сигналов [1, 2].

При увеличении числа элементов антенной решетки и глубины временных задержек размерность ковариационной матрицы быстро возрастает, что приводит к существенному увеличению вычислительных затрат. В связи с этим важной задачей является разработка и исследование методов обращения ковариационных матриц, обеспечивающих приемлемый компромисс между точностью вычислений и вычислительной сложностью алгоритмов.

В фундаментальных работах по оптимальной обработке сигналов в антенных решетках показано, что вычисление оптимальных весовых коэффициентов связано с обращением ковариационной матрицы входных наблюдений [3]. В работах по вычислительной линейной алгебре предложены различные алгоритмы обращения эрмитовых положительно определенных матриц, отличающиеся вычислительной сложностью и численной устойчивостью [4]. В последние годы активно исследуются методы, использующие структурные свойства ковариационных матриц, позволяющие существенно снизить вычислительные затраты при обработке сигналов в антенных решетках [5].

В литературе предложен ряд подходов к решению данной задачи [3, 4]:

1. Алгоритм Левинсона-Дурбина, использующий рекурсивную теплицевую структуру матрицы.
2. Метод Барайсса, обеспечивающий высокую численную устойчивость при обращении положительно определенных матриц.
3. Классический метод Холецкого, дающий точное разложение общей эрмитовой матрицы.
4. БПФ-метод, основанный на циркулянтном вложении и быстром преобразовании Фурье.

Несмотря на большое количество существующих методов, вопрос их сравнительной эффективности в задачах адаптивного диаграммообразования остается актуальным, особенно при переходе от пространственной обработки сигналов к пространственно-временной обработке, где размерность задачи существенно возрастает.

Целью работы является сравнительный анализ методов обращения ковариационных матриц в алгоритмах адаптивного диаграммообразования и исследование их влияния на точность восстановления оптимальных весовых коэффициентов, вычислительную сложность обработки и качество формируемой диаграммы направленности.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Анализ структуры ковариационных матриц при пространственной и пространственно-временной обработке сигналов.
2. Исследование алгоритмов обращения ковариационных матриц (Холецкого, Левинсона-Дурбина, Барайсса и БПФ-метода).
3. Численное моделирование работы алгоритмов для различных геометрий антенных решеток.
4. Сравнение методов по точности восстановления оптимальных весовых коэффициентов и вычислительной сложности.

### Материалы и методы

Рассмотрим геометрию антенных решеток – один из ключевых проектных параметров адаптивных приемных систем. От геометрии зависят апертура, пространственное разрешение, направление/ширина и структура боковых лепестков, а также удобство математического описания (структура ковариационной матрицы).

В разделе рассматривается классификация часто используемых конфигураций антенных решеток и дается математическое описание их моделей в задачах адаптивного диаграммообразования. Особое внимание уделено двум логическим уровням обработки сигналов: пространственной обработке сигналов (ПОС) и пространственно-временной обработке (ПВОС). Под пространственной обработкой сигналов понимается адаптивная обработка векторов наблюдений, сформированных из мгновенных отсчетов сигналов на элементах антенной решетки в фиксированный момент времени, при которой адаптация осуществляется исключительно по пространству путем формирования диаграммы направленности (ДН) антенны. Пространственно-временная обработка, в свою очередь, основана на формировании расширенного вектора наблюдений, включающего несколько последовательных временных отсчетов с каждого элемента решетки, что позволяет учитывать как пространственную, так и временную корреляцию принимаемых сигналов. Для каждого из этих случаев показано, каким образом геометрия решетки и модель сигнала определяют структуру корреляционной (ковариационной) матрицы, что влияет на выбор эффективных методов ее обращения и аппроксимации.

В практических системах чаще всего встречаются следующие типы планарных антенных решеток:

1. Равномерная линейная решетка (ULA) (Рисунок 1а). Наиболее распространенная и аналитически удобная конфигурация, где  $N$  элементов расположены вдоль прямой с шагом обычно  $d = \lambda/2$ .
2. Равномерная круговая решетка (UCA) (Рисунок 1б). Полезна при задачах  $360^\circ$  обзора, удобно использовать разложение по азимуту. Элементы расположены по окружности радиуса  $R$  через равные угловые шаги  $\varphi_m = 2\pi m/N$ .
3. Прямоугольная плоская решетка (UPA) (Рисунок 1в). Применяется при формировании двухмерных диаграмм и в системах с высокими требованиями к

пространственному разрешению, состоит из  $N \times N$  элементов на регулярной решетке по двум осям.

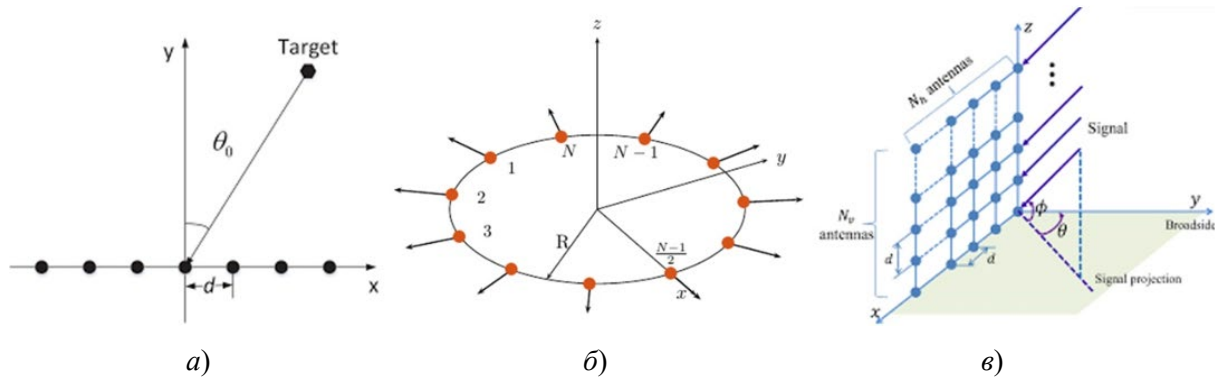


Рисунок 1 – Геометрии антенных решеток: *a* – равномерная линейная решетка; *b* – равномерная круговая решетка; *c* – прямоугольная плоская решетка

Figure 1 – Antenna array geometries: *a* – uniform linear array; *b* – uniform circular array; *c* – rectangular planar array

Геометрия антенной решетки и модель принимаемого сигнала определяют структуру ковариационной матрицы наблюдений. В задачах пространственной обработки сигналов при стационарных источниках и регулярной геометрии решетки ковариационная матрица, как правило, обладает теплицевой структурой [6], поскольку корреляция между элементами определяется только их взаимным пространственным смещением. В пространственно-временной обработке формируется расширенный вектор наблюдений, включающий несколько временных отсчетов, что при временной стационарности приводит к блочно-теплицевой структуре ковариационной матрицы размерности  $n \times n$ , где  $n = N \cdot L$ , матрица состоит из  $L \times L$  блоков  $r_k \in \mathbb{C}^{N \times N}$  [5, 7]. Указанные структурные свойства непосредственно определяют выбор алгоритмов обращения ковариационной матрицы: в пространственной обработке возможно применение классических теплицевых алгоритмов с пониженной вычислительной сложностью, тогда как в пространственно-временной обработке, вследствие увеличения размерности задачи и ухудшения обусловленности оценочной ковариационной матрицы при конечном объеме выборки, требуется использование блочных или двумерных аппроксимаций, а также применение метода регуляризации для обеспечения численной устойчивости [8].

В работе рассматриваются три типа антенных решеток с постоянным расстоянием между элементами  $d$ . В узкополосной постановке соответствующая ковариационная матрица является эрмитовой и положительно определенной. При пространственной стационарности принимаемого сигнала элемент ковариационной матрицы определяется выражением

$$R_{ij} = \mathbb{E}\{x_i x_j^*\},$$

откуда следует, что каждый элемент  $R_{ij}$  зависит только от разности индексов  $i-j$ . Это отражает пространственную стационарность поля вдоль апертуры и однородность шума для равных расстояний между элементами решетки. В результате ковариационная матрица обладает теплицевой структурой и может быть записана в виде

$$R = \begin{pmatrix} r_0 & r_{-1} & r_{-2} & \cdots \\ r_1 & r_0 & r_{-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{pmatrix}, \quad r_l = \mathbb{E}\{x_m x_{m-l}^*\}.$$

В адаптивном диаграммообразовании ключевая операция – обращение оценки выборочной ковариационной матрицы (КМ) приемных отсчетов:

$$\hat{R} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x(k)x(k)^H,$$

где при пространственной обработке  $x(k) \in \mathbb{C}^N$ , а при пространственно-временной –  $x(k) = x_{ST}(k) \in \mathbb{C}^{NL}$ .

Наблюдаемый вектор в момент  $t$  имеет размерность  $N$ , а обучающая матрица имеет размерность  $N \times N$ . Согласно закону больших чисел при росте числа обучающих отсчетов  $K$  оценка  $\hat{R}$  сходится почти к истинной ковариации  $R = \mathbb{E}\{xx^H\}$ . На практике это означает, что элементы матрицы и ее собственные числа стабилизируются с ростом  $K$ : дисперсия оценок элементов убывает примерно, как  $1/K$ . При фиксированной размерности матрицы рост числа независимых обучающих отсчетов  $K$  приводит к снижению дисперсии элементов оценки ковариации порядка  $O(1/K)$ , что на практике выражается в уменьшении необходимости диагональной загрузки (регуляризации) при ее обращении [8].

Когда к пространственной обработке добавляются временные задержки глубины  $L$ , формируется блочно-теплицевая структура: внутри каждого блока сохраняется теплицевость по пространству, а сами блоки повторяются по индексу задержки. Такая структура ковариационной матрицы  $R_{bt}$  формируется уже на уровне геометрии и позволяет существенно снизить вычислительные затраты при ее обращении за счет перехода от обработки полной матрицы размерности  $n \times n$  к работе с набором матричных блоков [4, 9]. Для пространственно-временной обработки в стационарных условиях ковариационная матрица обычно имеет вид [2]:

$$R_{bt} = \begin{pmatrix} r_0 & r_1^H & r_2^H & \dots & r_{L-1}^H \\ r_1 & r_0 & r_1^H & \dots & r_{L-2}^H \\ r_2 & r_1 & r_0 & \dots & r_{L-3}^H \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{L-1} & r_{L-2} & r_{L-3} & \dots & r_0 \end{pmatrix}, r_k \in \mathbb{C}^{N \times L},$$

где  $N$  – число антенных элементов,  $L$  – глубина задержек. Зная только блоки  $r_0, \dots, r_{L-1}$ , можно реконструировать всю матрицу.

Сравнение методов строится при фиксированных условиях «сигнал-помеха» и одинаковых настройках алгоритма, то есть варьируется лишь способ обращения. Формируется полезный сигнал (с направлением на  $0^\circ$ ). Задаются три гармонических помехи с углом прихода  $-45^\circ$ ,  $35^\circ$  и  $80^\circ$ . Добавляется слабый белый шум со среднеквадратичным отклонением (СКО)  $\sigma = 0,5$ . Спутники ГЛОНАСС генерируются на орбитах с углами:  $[0^\circ, 120^\circ, 240^\circ]$ , а углы видимости от  $0^\circ$  до  $\pm 90^\circ$  (шаг  $45^\circ$ ). Итого до 24 спутников.

Эффективность алгоритма будет оцениваться качеством пространственной фильтрации, которое характеризуется глубиной подавления в направлениях помех, шириной главного лепестка на уровне  $-3$  дБ, уровнем боковых лепестков. Динамические свойства алгоритма описываются числом итераций, необходимых для достижения 95 % стационарного значения SINR, либо порога по среднеквадратичной ошибке. Совокупность этих метрик позволяет одновременно оценить эффективность подавления помех и быстроту сходимости алгоритма [10].

Адаптивное диаграммообразование опирается на использование взвешенных сумм сигналов с антенной решетки, где вектор весов  $w$  подбирается так, чтобы минимизировать отклонение между выходным сигналом и эталонным. Все алгоритмы прямого вычисления весов требуют обращения КМ. Поскольку КМ  $R$  симметрична и положительно определена, стандартное обращение возможно, однако его

вычислительная сложность напрямую влияет на реализацию в реальном времени, особенно при большом числе элементов антенной решетки  $N$ .

Для повышения эффективности используются специализированные методы обращения и аппроксимации КМ  $R$ , включая разложение Холецкого, алгоритм Левинсона-Дурбина, метод Барайсса и приближенное обращение с использованием БПФ.

Разложение Холецкого [11, 12] – это классический способ обращения общей (не обязательно треугольной или циркулянтной) эрмитовой положительно определенной матрицы. Применяется для симметричных положительно определенных матриц и позволяет представить матрицу  $R$  в виде произведения  $R = LL^H$ , где  $L$  – нижнетреугольная матрица. Обратная матрица находится решением двух треугольных систем:

$$L_y = e_j, L_x^H = y \quad x = R_{e_j}^{-1}.$$

Метод Холецкого крайне устойчив и эффективен для небольших матриц, но по вычислительным затратам уступает специализированным алгоритмам для треугольной матрицы. Применяется при малых и средних  $NL$ .

Рекурсия Левинсона [13] – Дурбина для блочно-треугольных структур позволяет рекурсивно строить решение добавляя по одной линии задержки. В данном методе используются матричные рефлексоры и рекурсивные обновления:

Инициализация

$$P_0 = r_0^{-1}.$$

На шаге  $m$  вычисляют вспомогательную матрицу

$$E_m = r_m + \sum_{k=1}^{m-1} r_k f_{m-k},$$

Затем блок-рефлексор

$$K_m = -P_{m-1} E_m Q_{m-1},$$

И обновляют

$$P_m = P_{m-1} + K_m Q_{m-1} K_m^H, \quad Q_m = Q_{m-1} + K_m P_{m-1} K_m^H.$$

После  $m = L - 1$  собирают  $R_{bt}^{-1}$  из блоков, выраженных через  $P_{L-1}$  и последовательности  $f, b$ .

Данный метод позволяет снизить сложность до  $O(L^2 N^3)$ , за счет использования структурных свойств матрицы и, соответственно, уменьшить затраты памяти и число арифметических операций. Применяется для средних и больших  $L$  при умеренных  $N$ .

Суть метода Барайсса [11, 12] в том, что выполняется модификация схемы исключения Гаусса, которая уменьшает рост чисел и накопление погрешностей в вычислениях. Алгоритм на каждом шаге обновляет элементы по формуле типа

$$B_{i,j}^{(k)} = \frac{B_{i,j}^{(k-1)} B_{k,k}^{(k-1)} - B_{i,k}^{(k-1)} B_{k,j}^{(k-1)}}{d_k},$$

где знаменатель  $d_k$  – либо 1 для первого шага, либо главный элемент предыдущего шага  $B_{(k-1),(k-1)}^{(k-2)}$ . Если предположение о неравенстве нулю главных миноров окажется неверным, то есть  $B_{(k-1),(k-1)}^{(k)} = 0$ , а некоторые  $B_{j,(k-1)}^{(k)} \neq 0$  ( $i = k, \dots, n$ ), то мы можем переставить строки  $k-1$  и  $i$  местами, сменив знак конечного значения.

За счет быстрого преобразования Фурье [14, 15] происходит приближение треугольной матрицы к циркулянтной матрице  $C$ . Циркулянтная матрица диагоналізується матрицею дискретного преобразования Фурье:

$$C = F^H \Lambda F, \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M),$$

поскольку ее первые столбцы задают спектральную плотность, тогда

$$C^{-1} = F^H \Lambda^{-1} F,$$

где  $F$  – матрица дискретного преобразования Фурье,  $\Lambda$  – диагональная матрица собственных значений (получаемых через БПФ). После обращения  $C^{-1}$  выделяем верхний левый блок размерности  $NL \times NL$ :

$$R_{approx}^{-1} = (C^{-1})_{1:NL, 1:NL}.$$

В БПФ-методе обращение теплицевой матрицы заменяется циркулянтной аппроксимацией, диагонализуемой в частотной области, за счет чего вычислительная сложность снижается с  $O(n)^3$  до  $O(n^2 \log n)$ .

Практически ковариационная матрица формируется как выборочная оценка по конечному числу отсчетов, и при малом объеме данных ее структура отклоняется от теоретической (теплицевой или блочно-теплицевой). Однако согласно свойствам закона больших чисел, при увеличении количества наблюдений выборочная матрица с вероятностью 1 стремится к истинной, возвращая структурные симметрии.

В качестве основного критерия эффективности в работе используется среднеквадратичная ошибка. Это связано с тем, что оптимальные весовые коэффициенты в задачах адаптивного диаграммообразования определяются как решение задачи минимизации MSE, а отклонение от минимального значения напрямую отражает ухудшение качества восстановления полезного сигнала в реальных условиях и позволяет корректно сравнивать различные методы обращения ковариационной матрицы по их способности воспроизводить оптимальное решение. Если метод обращения матрицы корректно воспроизводит оптимальные весовые коэффициенты, то достигается значение ошибки, близкое к оптимальному. Веса  $w_{opt}$  определяются как:

$$w_{opt} = \arg \min_w \mathbb{E} |s - w^H x|^2.$$

Численное моделирование проводилось в MATLAB в условиях фиксированного сценария «сигнал–помеха–шум». Для всех рассматриваемых методов использовались одинаковые параметры полезного сигнала, одинаковые положения источников помех и одинаковый объем обучающей выборки, что обеспечивало корректность сравнительного анализа.

В узкополосном сценарии ULA рассматривается решетка на 8 элементов с шагом  $d = 0,5\lambda$ ; полезный источник расположен по нормали к апертуре. Уровни SNR изменяются в диапазоне от 0 до 10 дБ, количество помех 3, а их уровень задается порядка 30 дБ; длины обучающего и тестового участков совпадают для всех методов.

Для сценария с USA рассматривается решетка на 12 элементов, равномерно расположенных по окружности. Остальная структура остается такой же, как и в сценарии с линейной решеткой.

Для сценария с UPA рассматривается прямоугольная решетка 9 элементов, со сторонами 3 на 3 элемента. Остальная структура остается такой же, как и в сценарии с линейной решеткой.

Для учета временной структуры помех модель была расширена до пространственно-временной обработки, объединив  $L$  отсчетов в один вектор размерности  $n = ML$ , что приводит к блочно-теплицевой структуре ковариационной матрицы, которую мы строим по блокам.

## Результаты

Диаграммы направленности, полученные при работе с равномерной линейной решеткой для каждого метода, показаны на Рисунке 2. На Рисунке 3 представлено сравнение среднеквадратичной ошибки каждого метода с оптимальным значением.

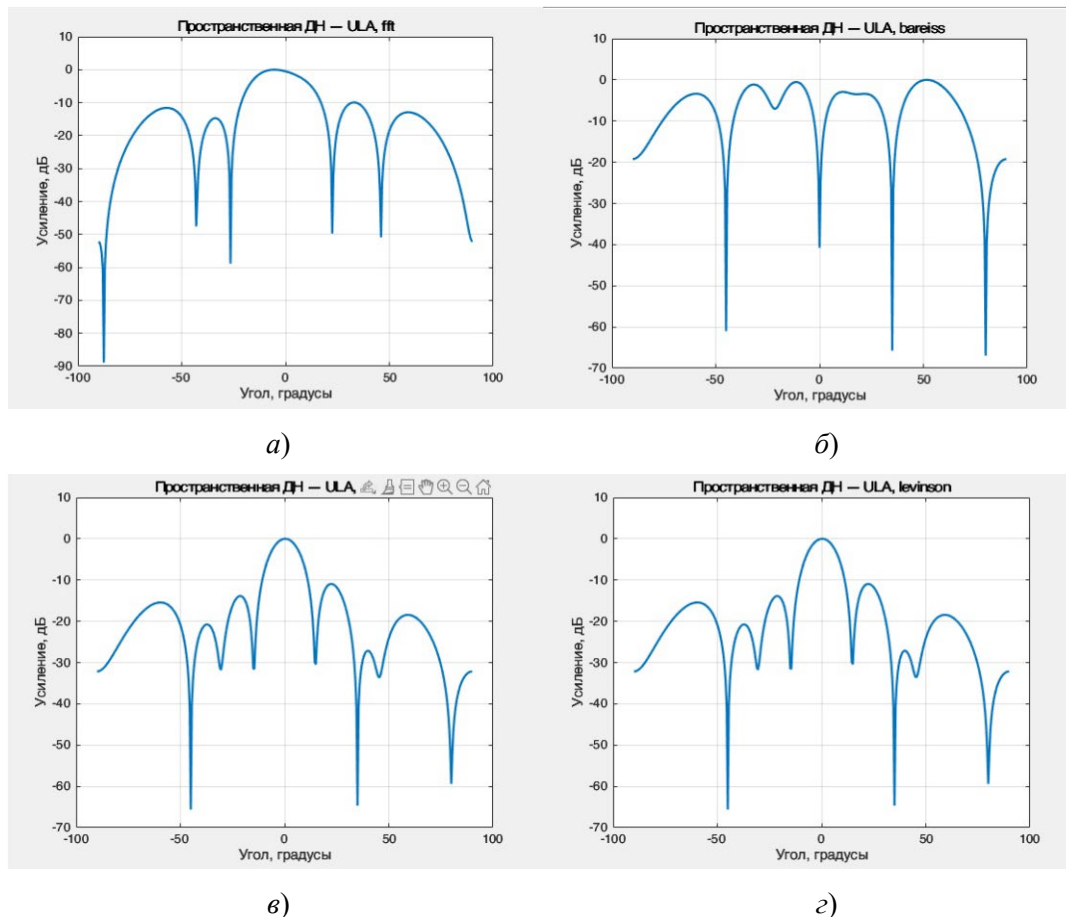


Рисунок 2 – Диаграмма направленности линейной решетки при ПОС: *a* – быстрое преобразование Фурье, *b* – метод Барайсса, *c* – метод Холецкого, *d* – метод Левинсона  
Figure 2 – Radiation pattern of the linear array under spatial signal processing: *a* – Fast Fourier Transform; *b* – Bareiss method; *c* – Cholesky method; *d* – Levinson method

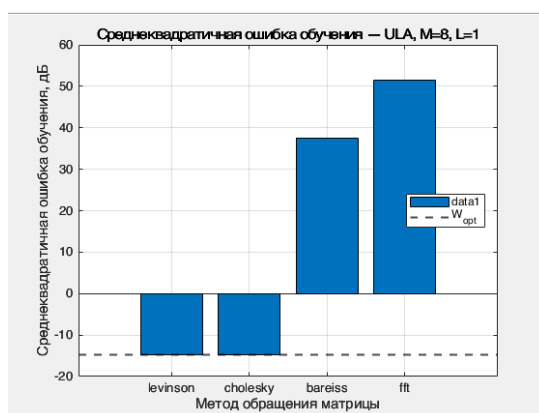


Рисунок 3 – Сравнение среднеквадратичной ошибки каждого метода с оптимальным значением среднеквадратичной ошибки при работе с линейной решеткой  
Figure 3 – Comparison of the mean square error of each method with the optimal mean square error for the linear array

Диаграммы направленности, полученные при работе с равномерной круговой решеткой для каждого метода, показаны на Рисунке 4. На Рисунке 5 представлено сравнение среднеквадратичной ошибки каждого метода с оптимальным значением.

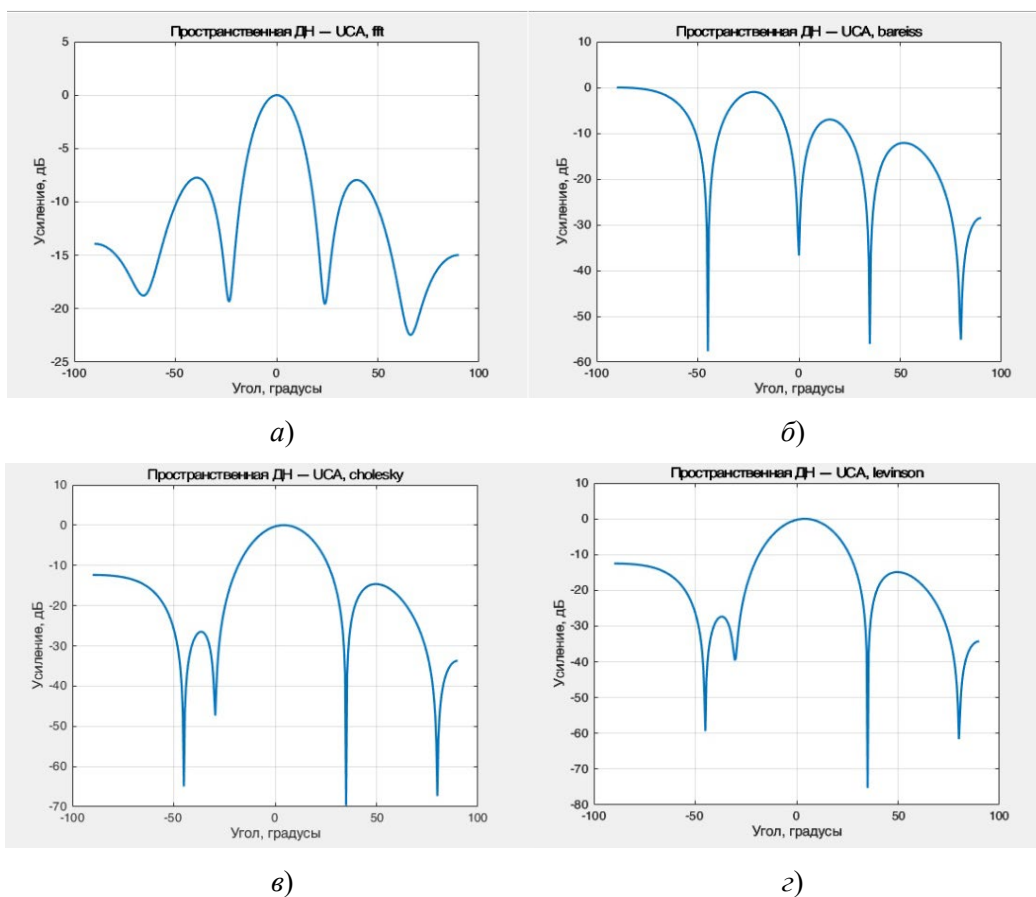


Рисунок 4 – Диаграмма направленности круговой решетки при ПОС: *а* – быстрое преобразование Фурье, *б* – метод Барайсса, *в* – метод Холецкого, *г* – метод Левинсона  
 Figure 4 – Radiation pattern of the circular array under spatial signal processing: *a* – Fast Fourier Transform; *b* – Bareiss method; *c* – Cholesky method; *d* – Levinson method

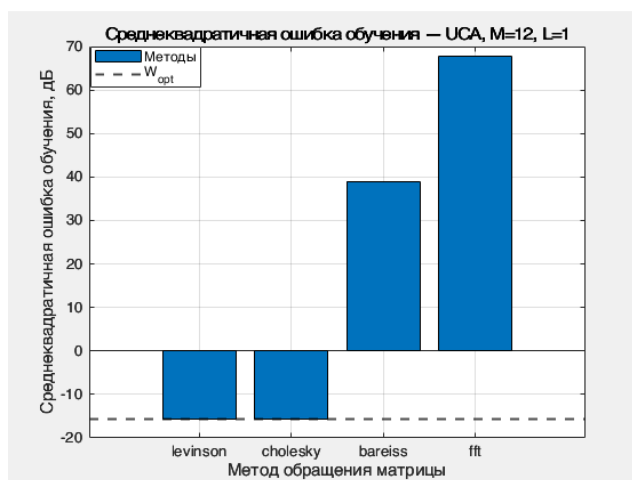


Рисунок 5 – Сравнение среднеквадратичной ошибки каждого метода с оптимальным значением среднеквадратичной ошибки при работе с круглой решеткой  
 Figure 5 – Comparison of the mean square error of each method with the optimal mean square error for the circular array

Диаграммы направленности, полученные при работе с равномерной прямоугольной решеткой для каждого метода, показаны на Рисунке 6. На Рисунке 7 представлено сравнение среднеквадратичной ошибки каждого метода с оптимальным значением.

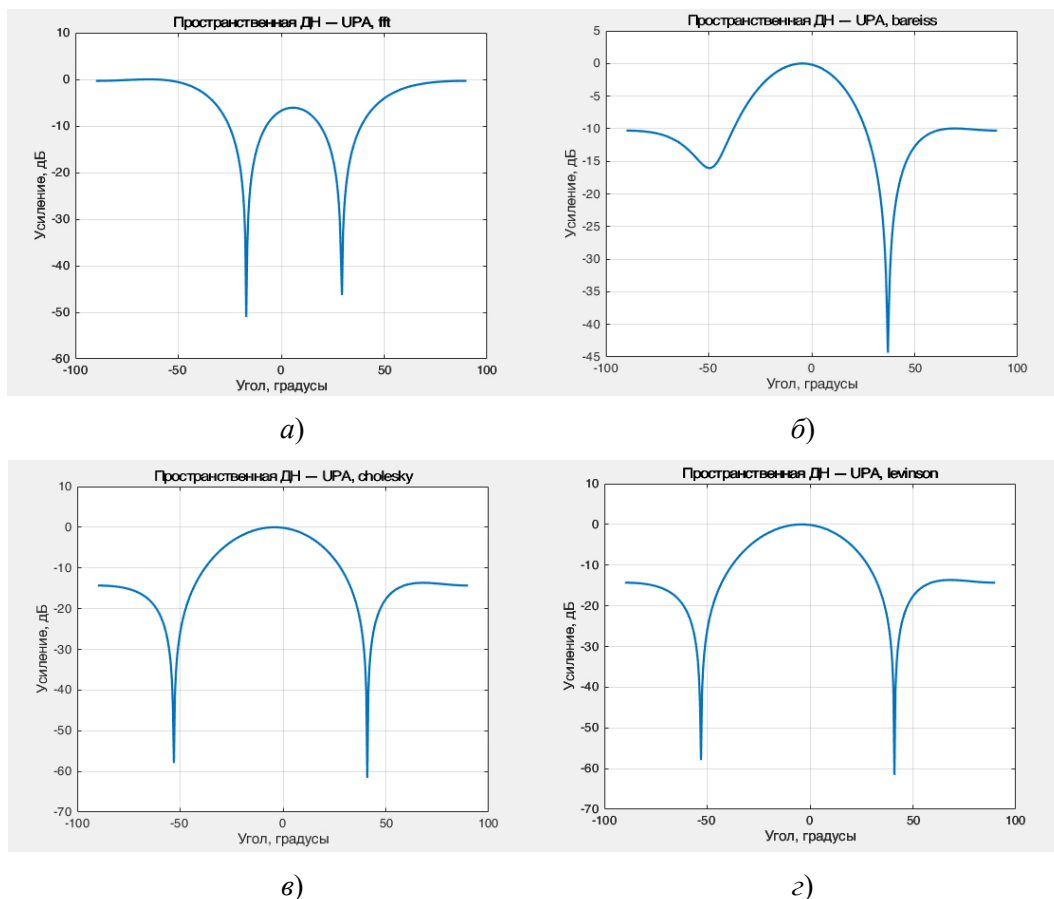


Рисунок 6 – Диаграмма направленности прямоугольной решетки при ПОС: *a* – быстрое преобразование Фурье, *b* – метод Барайсса, *c* – метод Холецкого, *d* – метод Левинсона  
 Figure 6 – Radiation pattern of the rectangular planar array under spatial signal processing: *a* – Fast Fourier Transform; *b* – Bareiss method; *c* – Cholesky method; *d* – Levinson method

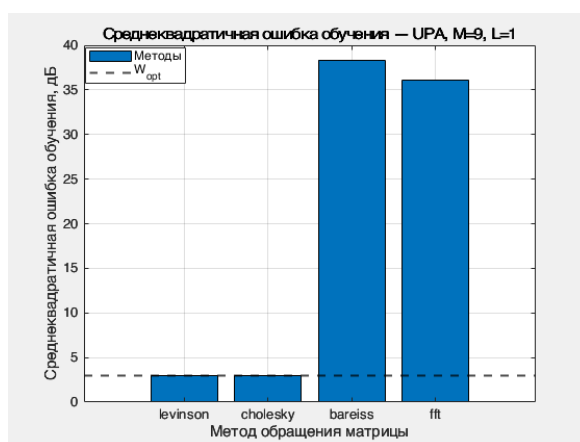


Рисунок 7 – Сравнение среднеквадратичной ошибки каждого метода с оптимальным значением среднеквадратичной ошибки при работе с прямоугольной решеткой  
 Figure 7 – Comparison of the mean square error of each method with the optimal mean square error for the rectangular planar array

Ниже приведены результаты ПВОС для тех же сценариев и методов обращения, что и для ПОС. На Рисунках 8–10 представлены диаграммы направленности для каждой геометрии антенной решетки с учетом метода обращения матрицы. На Рисунке 11 представлено сравнение среднеквадратичной ошибки каждого метода с оптимальным значением с учетом геометрии решетки.

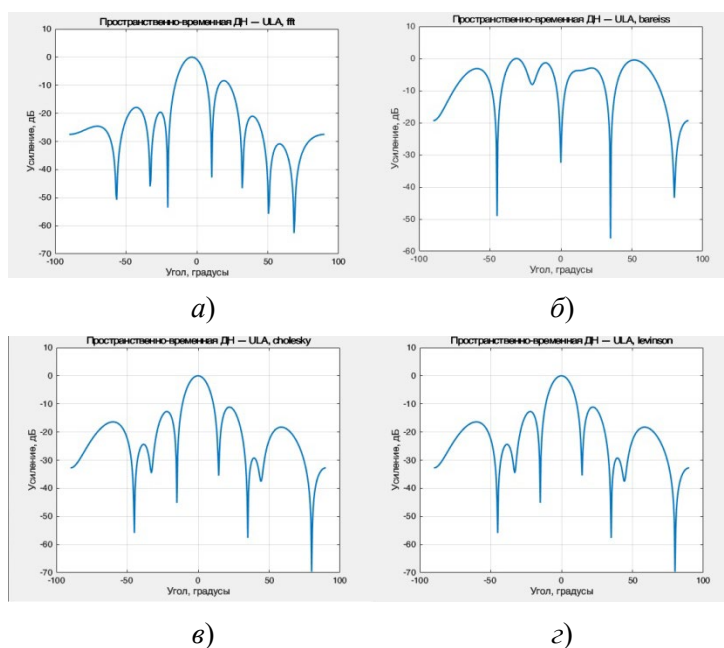


Рисунок 8 – Диаграмма направленности линейной решетки при ПВОС: *a* – быстрое преобразование Фурье, *b* – метод Барайсса, *c* – метод Холецкого, *d* – метод Левинсона  
 Figure 8 – Radiation pattern of the linear array under space-time signal processing: *a* – Fast Fourier Transform; *b* – Bareiss method; *c* – Cholesky method; *d* – Levinson method

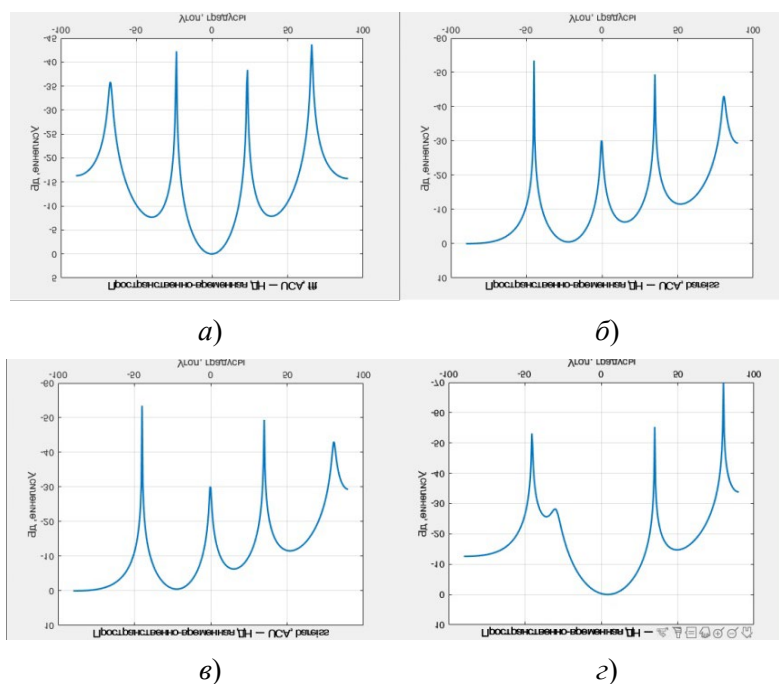


Рисунок 9 – Диаграмма направленности круговой решетки при ПВОС: *a* – быстрое преобразование Фурье, *b* – метод Барайсса, *c* – метод Холецкого, *d* – метод Левинсона  
 Figure 9 – Radiation pattern of the circular array under space-time signal processing: *a* – Fast Fourier Transform; *b* – Bareiss method; *c* – Cholesky method; *d* – Levinson method

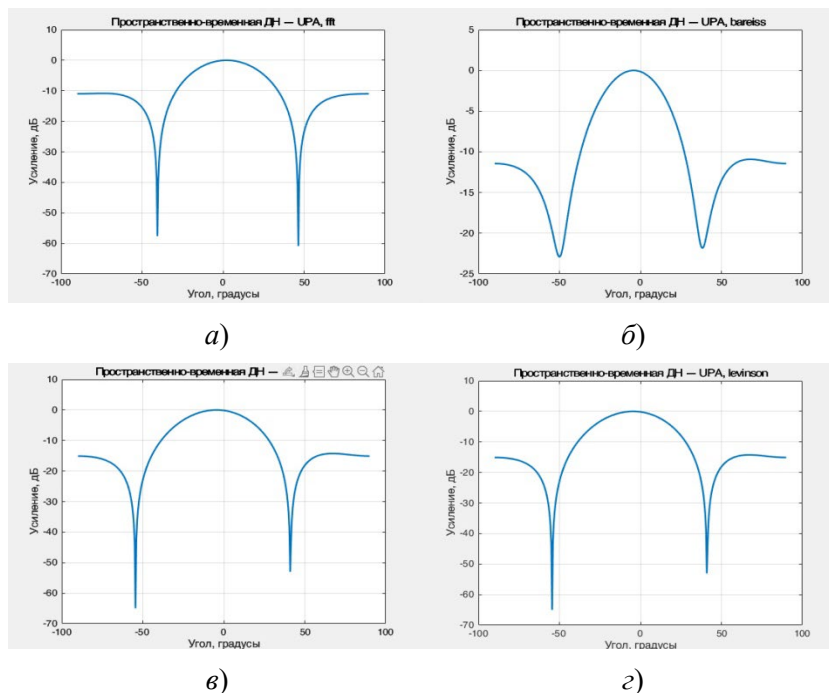


Рисунок 10 – Диаграмма направленности прямоугольной решетки при ПВОС: *a* – быстрое преобразование Фурье, *б* – метод Барайсса, *в* – метод Холецкого, *г* – метод Левинсона  
 Figure 10 – Radiation pattern of the rectangular planar array under space-time signal processing: *a* – Fast Fourier Transform; *b* – Bareiss method; *c* – Cholesky method; *d* – Levinson method

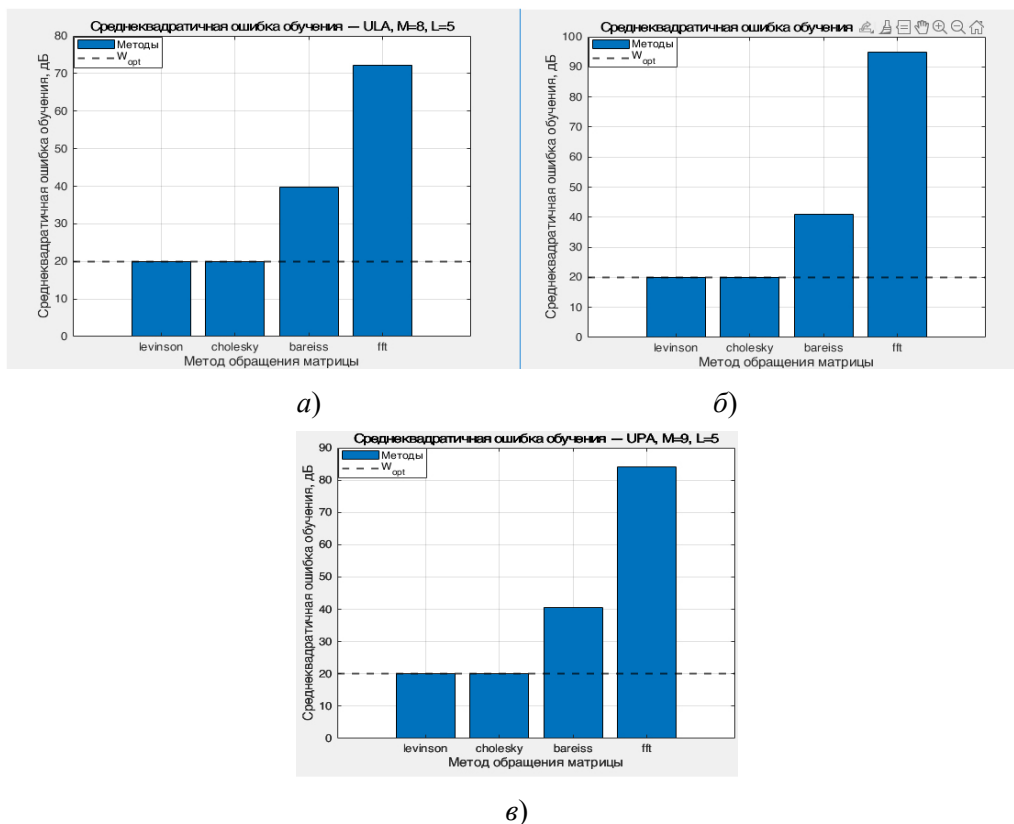


Рисунок 11 – Сравнение среднеквадратичной ошибки каждого метода с оптимальным: *a* – линейная решетка, *б* – круговая решетка, *в* – прямоугольная решетка  
 Figure 11 – Comparison of the mean square error of each method with the optimal value: *a* – linear array; *b* – circular array; *c* – rectangular planar array

Анализ вычислительной сложности:

1. Барайсс:  $O((NL)^3)$
2. Левинсон-Дурбин:  $O(L^2N^3)$
3. Холецкий:  $O((NL)^3)$
4. БПФ:  $O((NL)^2 \log(NL))$

Независимые от метода этапы алгоритма обработки:

1. Оценка ковариации  $O(NL^2T_{обуч})$

2. Для примера, основной RLS-цикл алгоритма  $O(TN^2)$  на один угол и  $O(ATN^2)$  для нескольких направлений, где  $N$  – число антенн,  $L$  – глубина линий задержки,  $T_{обуч}$  – размер обучающей выборки,  $T$  – число временных отсчетов и  $A$  – число сканируемых углов.

#### I. Вычислительная сложность при ПОС

Оценка вычислительной сложности при использовании равномерной линейной решетки:

При подстановке параметров ( $N = 8, L = 1 \Rightarrow NL = 8; T = 3000, T_{обуч} = 2000, A = 15$ ) получается:

1. Оценка ковариации:  $O(N^2T_{обуч}) = 64 \cdot 2000 = 128000$  оп.
2. RLS:  $O(ATN^2) = 15 \cdot 3000 \cdot 64 = 2,9 \cdot 10^6$  оп.
3. Обращение матрицы:
  - Барайсс/Холецкий:  $(NL)^3 = 8^3 = 512$  оп.
  - Левинсон-Дурбин:  $L^2N^3 = 1 \cdot 512 = 512$  оп.
  - БПФ:  $(NL)^2 \log(NL) = 64 \cdot \log_2 8 = 64 \cdot 3 = 192$  оп.

Оценка вычислительной сложности при использовании равномерной круговой решетки:

При подстановке параметров ( $N = 12, L = 1 \Rightarrow NL = 12; T = 3000, T_{обуч} = 2000, A = 15$ ) получается:

1. Оценка ковариации:  $O(NL^2T_{обуч}) = 12 \cdot 1 \cdot 2000 = 24000$  оп.
2. RLS:  $O(ATN^2) = 15 \cdot 3000 \cdot 144 = 6,48 \cdot 10^6$  оп.
3. Обращение матрицы:
  - Барайсс/Холецкий:  $(NL)^3 = 12^3 = 1728$  оп.
  - Левинсон-Дурбин:  $L^2N^3 = 1 \cdot 1728 = 1728$  оп.
  - БПФ:  $(NL)^2 \log(NL) = 144 \cdot \log_2 12 = 144 \cdot 3,6 = 519$  оп.

Оценка вычислительной сложности при использовании плоской прямоугольной решетки:

При подстановке параметров ( $N = 9, L = 1 \Rightarrow NL = 9; T = 3000, T_{обуч} = 2000, A = 15$ ) получается:

1. Оценка ковариации:  $O(NL^2T_{обуч}) = 9 \cdot 1 \cdot 2000 = 18000$  оп.
2. RLS:  $O(ATN^2) = 15 \cdot 3000 \cdot 81 = 3,65 \cdot 10^6$  оп.
3. Обращение матрицы:
  - Барайсс/Холецкий:  $(NL)^3 = 9^3 = 729$  оп.
  - Левинсон-Дурбин:  $L^2N^3 = 1 \cdot 729 = 729$  оп.
  - БПФ:  $(NL)^2 \log(NL) = 81 \cdot \log_2 9 = 81 \cdot 3,17 = 257$  оп.

#### II. Вычислительная сложность при ПВОС

Оценка вычислительной сложности при использовании равномерной линейной решетки:

При подстановке параметров ( $N = 8, L = 5 \Rightarrow NL = 40; T = 3000, T_{обуч} = 2000, A = 15$ ) получается:

1. Оценка ковариации:  $O(NL^2T_{обуч}) = 8 \cdot 25 \cdot 2000 = 4 \cdot 10^5$  оп.

2. RLS:  $O(ATN^2) = 15 \cdot 3000 \cdot 64 = 2,9 \cdot 10^6$  оп.

3. Обращение матрицы:

– Барайсс/Холецкий:  $(NL)^3 = 40^3 = 64000$  оп.

– Левинсон-Дурбин:  $L^2N^3 = 25 \cdot 512 = 12800$  оп.

– БПФ:  $(NL)^2 \log(NL) = 1600 \cdot \log_2 40 = 1600 \cdot 5,3 = 8500$  оп.

Оценка вычислительной сложности при использовании равномерной круговой решетки:

При подстановке параметров ( $N = 12, L = 5 \Rightarrow NL = 60; T = 3000, T_{обуч} = 2000, A = 15$ ) получается:

1. Оценка ковариации:  $O(NL^2T_{обуч}) = 12 \cdot 25 \cdot 2000 = 6 \cdot 10^5$  оп.

2. RLS:  $O(ATN^2) = 15 \cdot 3000 \cdot 144 = 6,48 \cdot 10^6$  оп.

3. Обращение матрицы:

– Барайсс/Холецкий:  $(NL)^3 = 60^3 = 216000$  оп.

– Левинсон-Дурбин:  $L^2N^3 = 25 \cdot 1728 = 43200$  оп.

– БПФ:  $(NL)^2 \log(NL) = 3600 \cdot \log_2 60 = 3600 \cdot 5,9 = 21240$  оп.

Оценка вычислительной сложности при использовании плоской прямоугольной решетки:

При подстановке параметров ( $N = 9, L = 5 \Rightarrow NL = 45; T = 3000, T_{обуч} = 2000, A = 15$ ) получается:

1. Оценка ковариации:  $O(NL^2T_{обуч}) = 9 \cdot 25 \cdot 2000 = 4,5 \cdot 10^5$  оп.

2. RLS:  $O(ATN^2) = 15 \cdot 3000 \cdot 81 = 3,65 \cdot 10^6$  оп.

3. Обращение матрицы:

– Барайсс/Холецкий:  $(NL)^3 = 45^3 = 91125$  оп.

– Левинсон-Дурбин:  $L^2N^3 = 25 \cdot 729 = 18225$  оп.

– БПФ:  $(NL)^2 \log(NL) = 2025 \cdot \log_2 45 = 2025 \cdot 5,5 = 11138$  оп.

### Обсуждение

Полученные результаты показывают, что методы Холецкого и Левинсона-Дурбина воспроизводят оптимальные весовые коэффициенты, соответствующие критерию Винера-Хопфа. Это объясняется тем, что данные методы выполняют точное решение системы линейных уравнений, определяющей оптимальные веса.

Аппроксимационные методы (БПФ-подход и метод Барайсса в рассматриваемой вычислительной реализации) демонстрируют увеличение среднеквадратичной ошибки. Данный эффект обусловлен тем, что в этих методах используется приближенное обращение ковариационной матрицы, что приводит к отклонению вычисленных весов от оптимального решения

При переходе от пространственной обработки к пространственно-временной обработке размерность задачи возрастает от  $N$  до  $NL$ , что приводит к росту вычислительных затрат на обращение ковариационной матрицы и повышению чувствительности к ошибкам ее выборочной оценки. В этих условиях преимущество методов, использующих структурные свойства матрицы, становится более выраженным.

По результатам численных экспериментов наблюдается, что при пространственно-временной обработке сигналов минимально достижимое значение среднеквадратичной ошибки определяется критерием Винера и зависит от временной структуры сигнала, его мощности и уровня шума, но не от геометрии антенной решетки. В связи с этим для различных конфигураций решетки (ULA, UPA, UCA) при использовании критериально-оптимальных весов наблюдается совпадение значений минимальной MSE. Различия в значениях ошибки для методов БПФ и Барайсса

обусловлены аппроксимационным характером данных методов обращения ковариационной матрицы, в результате это приводит к отклонению найденных весов от оптимального решения и, как следствие, к увеличению MSE.

Практическое значение полученных результатов состоит в возможности выбора метода обращения ковариационной матрицы в зависимости от доступных вычислительных ресурсов и размерности задачи. Для малых и средних размерностей приоритетным является использование точных методов, прежде всего разложения Холецкого. При увеличении размерности задачи и наличии выраженной структуры ковариационной матрицы более предпочтительными становятся структурные алгоритмы, обеспечивающие лучшее соотношение между точностью и вычислительной сложностью.

Преимущество рекурсии Левинсона-Дурбина проявляется в тех случаях, когда ковариационная матрица сохраняет теплицеву или блочно-теплицеву структуру. В этом случае достигается снижение вычислительной сложности при сохранении точности решения. При отклонении выборочной матрицы от идеальной структуры, обусловленном конечным объемом обучающей выборки, эффективность структурных методов может снижаться, что требует применения регуляризации и структурных аппроксимаций.

Анализ вычислительной сложности показывает, что при переходе от пространственной обработки сигналов к пространственно-временной обработке размерность задачи возрастает пропорционально произведению числа антенных элементов и глубины временных задержек. В таких условиях использование алгоритмов, учитывающих структурные свойства ковариационной матрицы, становится особенно важным, поскольку позволяет снизить вычислительную сложность обращения матрицы по сравнению с универсальными методами линейной алгебры.

### Заключение

В работе выполнено сравнительное исследование методов обращения (и аппроксимации) ковариационной матрицы в задачах адаптивного диаграммообразования на основе критерия Винера-Хопфа и алгоритма RLS для режимов пространственной (ПОС) и пространственно-временной (ПВОС) обработки. В качестве основного количественного критерия эффективности использована среднеквадратичная ошибка, поскольку оптимальные весовые коэффициенты определяются как решение задачи минимизации среднеквадратичной ошибки, а отклонение от оптимального значения напрямую отражает деградацию качества восстановления полезного сигнала. Показано, что выбор метода обращения определяет как вычислительную нагрузку системы, так и устойчивость и качество формируемой диаграммы направленности.

С теоретической точки зрения, базовые методы общего вида (Холецкий, Барайсс) имеют кубическую сложность по размеру задачи, тогда как специализированные алгоритмы, использующие структуру теплицевой/блочно-теплицевой матрицы, обеспечивают квадратичную сложность, а БПФ-подход – логарифмически-ускоренное аппроксимированное решение. Численное моделирование в типовых сценариях АДО подтвердило, что:

- при малой/средней размерности и жестких требованиях к точности наилучшим эталоном остается разложение Холецкого;
- при наличии выраженной блочно-теплицевой структуры наилучший баланс точность/производительность демонстрирует рекурсия Левинсона-Дурбина;

– БПФ-аппроксимация дает заметный выигрыш по времени при корректной регуляризации и допустимом уровне систематической аппроксимационной погрешности;

– метод Барайсса целесообразен как универсальный вариант при отсутствии структуры, однако в задачах с плавающей точкой и SPD-матрицами, как правило, уступает Холецкому по устойчивости.

Результаты моделирования показали, что точные методы решения (разложение Холецкого и структурный алгоритм Левинсона-Дурбина) воспроизводят критериально-оптимальные веса и обеспечивают значения MSE, совпадающие с оптимальным значением, при этом формируя корректные нули диаграммы направленности в направлениях помех. При переходе к ПВОС наблюдается рост размерности задачи  $n = NL$ , что приводит к ухудшению обусловленности выборочной оценки и делает целесообразным использование блочных аппроксимаций и регуляризирующих приемов. Аппроксимационные методы (БПФ-подход с циркулярным вложением и метод Барайсса в реализованной вычислительной схеме) демонстрируют выигрыш по вычислительным затратам, однако приводят к заметному увеличению MSE по сравнению с оптимальным, что обусловлено ошибкой аппроксимации обратной матрицы и отклонением найденных весов от оптимальных. Полученные результаты показывают, что при малой и средней размерности задачи точные методы обращения обеспечивают воспроизведение оптимальных весов, тогда как при росте  $n$  аппроксимационные методы позволяют существенно снизить вычислительные затраты ценой контролируемого увеличения MSE. Это определяет область их практической применимости в задачах пространственно-временной обработки.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Глушанков Е.И., Царик В.И. Прямые методы адаптации линейных и кольцевых антенных решеток в навигационных спутниковых системах. *Известия высших учебных заведений России. Радиоэлектроника*. 2023;26(1):6–16. <https://doi.org/10.32603/1993-8985-2023-26-1-6-16>  
Glushankov Ye.I., Tsarik V.I. Direct Adaption Methods for Linear and Circular Antenna Arrays. *Journal of the Russian Universities. Radioelectronics*. 2023;26(1):6–16. (In Russ.). <https://doi.org/10.32603/1993-8985-2023-26-1-6-16>
2. Глушанков Е.И., Царик И.В., Царик В.И. Пространственно-распределенная технология адаптивного формирования диаграммы направленности антенной решетки. *Научные известия*. 2022;(29):165–169.  
Glushankov E.I., Tsarik I.V., Tsarik V.I. Spatially distributed technology of adaptive formation of the antenna array pattern. *Scientific News*. 2022;(29):165–169. (In Russ.).
3. Van Trees H.L. *Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory*. New York: John Wiley & Sons; 2002. 1472 p.
4. Golub G.H., Van Loan Ch.F. *Matrix Computations*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press; 2013. 756 p.
5. Aubry A., Babu P., De Maio A., Rosamilia M. Advanced Methods for MLE of Toeplitz Structured Covariance Matrices With Applications to Radar Problems. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2024;70(12):9277–9292. <https://doi.org/10.1109/TIT.2024.3474977>
6. Джиган В.И. *Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы*. Москва: Техносфера; 2013. 528 с.

7. Sosulski Ja., Tangermann M. Introducing block-Toeplitz covariance matrices to remaster linear discriminant analysis for event-related potential brain-computer interfaces. *Journal of Neural Engineering*. 2022;19(6). <https://doi.org/10.1088/1741-2552/ac9c98>
8. Woolrich M., Hunt L., Groves A., Barnes G. MEG beamforming using Bayesian PCA for adaptive data covariance matrix regularization. *NeuroImage*. 2011;57(4):1466–1479. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2011.04.041>
9. Haykin S.S. *Adaptive Filter Theory*. Boston: Pearson; 2014. 912 p.
10. Глушанков Е.И., Царик В.И. Анализ качества алгоритмов адаптивной пространственной и пространственно-частотной фильтрации сигналов в системах спутниковой навигации. *Труды учебных заведений связи*. 2022;8(3):37–43. <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2022-8-3-37-43>  
Glushankov E., Tsarik V. Quality Analysis of Space and Space-Frequency Adaptive Signal Processing Algorithms in Satellite Navigation Systems. *Proceedings of Telecommunication Universities*. 2022;8(3):37–43. (In Russ.). <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2022-8-3-37-43>
11. Böttcher A., Grudsky S.M. *Toeplitz matrices, asymptotic linear algebra and functional analysis*. Gurgaon: Hindustan Book Agency; 2000. 126 p. <https://doi.org/10.1007/978-93-86279-04-0>
12. Akaike H. Block Toeplitz matrix inversion. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1973;24(2):234–241. <https://doi.org/10.1137/0124024>
13. Cybenko G. The Numerical Stability of the Levinson-Durbin Algorithm for Toeplitz Systems of Equations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1980;1(3):303–319. <https://doi.org/10.1137/0901021>
14. Chan T.F. An optimal circulant preconditioner for Toeplitz systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*. 1988;9(4):766–771. <https://doi.org/10.1137/0909051>
15. Gray R.M. Toeplitz and Circulant Matrices: A Review. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*. 2006;2(3):155–239.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Глушанков Евгений Иванович**, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры радиотехники, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

*e-mail:* [glushankov57@gmail.com](mailto:glushankov57@gmail.com)

ORCID: [0000-0003-4148-3208](https://orcid.org/0000-0003-4148-3208)

**Морозов Александр Алексеевич**, старший преподаватель, Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, Российская Федерация.

*e-mail:* [aa.morozov56@gmail.com](mailto:aa.morozov56@gmail.com)

ORCID: [0000-0001-5502-0664](https://orcid.org/0000-0001-5502-0664)

**Кондрашов Захар Константинович**, заместитель генерального конструктора АО «Концерн «Автоматика», Москва, Российская Федерация.

*e-mail:* [ka@ao-avtomatika.ru](mailto:ka@ao-avtomatika.ru)

*Статья поступила в редакцию 25.02.2026; одобрена после рецензирования 16.04.2026;  
принята к публикации 19.04.2026.*

*The article was submitted 25.02.2026; approved after reviewing 16.04.2026;  
accepted for publication 19.04.2026.*