

УДК 004.896

DOI: [10.26102/2310-6018/2026.58.7.005](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2026.58.7.005)

## Совместная навигация гетерогенной группы роботов

К.С. Лельков✉, В.А. Петрухин, А.И. Черноморский, Т.С. Хорев

*Московский авиационный институт, Москва, Российская Федерация*

**Резюме.** В работе рассматривается подход к оптимизации навигационных стратегий для гетерогенной группы роботов, осуществляющих совместное перемещение в сложных условиях окружающей среды, характеризующихся наличием препятствий и нестабильным приемом сигналов спутниковых систем. В частности, исследуется возможность повышения точности решения навигационной задачи для каждого агента группы путем реализации алгоритмов взаимной коррекции навигационных систем воздушных и наземных роботов, физически связанных между собой управляемым гибким тросом. Разработанные алгоритмы обеспечивают возможность как автономного функционирования каждого агента, так и их работу в едином комплексе. Они содержат дополнительные каналы коррекции, использующие информацию от датчиков длины, натяжения и угла отклонения тросового механизма. Эти данные позволяют непрерывно определять относительное пространственное положение роботов, эффективно компенсируя накапливающиеся ошибки бортовых инерциальных систем. Для теоретического обоснования подхода представлена комплексная математическая модель, описывающая пространственную динамику роботов. Приведены результаты имитационного моделирования процессов перемещения и оценки навигационных параметров. Полученные данные подтверждают, что предложенный метод комплексирования информации позволяет значительно снизить погрешность позиционирования по сравнению с изолированным функционированием роботов, повышая общую надежность выполнения миссии.

**Ключевые слова:** совместная навигация, группа роботов, имитационное моделирование, комплексная обработка информации, тросовый механизм.

**Для цитирования:** Лельков К.С., Петрухин В.А., Черноморский А.И., Хорев Т.С. Совместная навигация гетерогенной группы роботов. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2026;14(7). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=2318> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.58.7.005

## Cooperative navigation for a heterogeneous multi-robot system

K.S. Lelkov✉, V.A. Petruhin, A.I. Chernomorsky, T.S. Khorev

*Moscow Aviation Institute, Moscow, the Russian Federation*

**Abstract.** This paper presents an approach to optimizing navigation strategies for a heterogeneous robot group moving collaboratively in complex environments characterized by obstacles and unstable Global Navigation Satellite System signal reception. Specifically, the study investigates the potential to improve navigation accuracy for each agent in the group by implementing mutual correction algorithms for the navigation systems of aerial and ground robots physically connected by a controllable flexible tether. The developed algorithms enable both the autonomous operation of individual agents and their coordinated functioning as a unified system. They incorporate additional correction channels that utilize data from the tether mechanism's sensors, including length, tension, and deflection angle. This data allows for the continuous determination of the robots' relative spatial positions, effectively compensating for the accumulating drift errors of onboard inertial navigation systems. To provide a theoretical foundation for this approach, a comprehensive mathematical model describing the spatial dynamics of the robots is presented. Furthermore, the paper presents the results of simulation modeling for the movement processes and the estimation of navigation parameters. The obtained data confirm that the

proposed sensor fusion method significantly reduces positioning errors compared to the isolated operation of the robots, thereby enhancing the overall reliability of mission execution.

**Keywords:** cooperative navigation, multi-robot system, simulation modeling, sensor fusion, tether mechanism.

**For citation:** Lelkov K.S., Petruhin V.A., Chernomorsky A.I., Khorev T.S. Cooperative navigation for a heterogeneous multi-robot system. *Modeling, Optimization and Information Technology*. URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=2318> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.58.7.005

## Введение

В последние годы область робототехники активно развивается. На сегодняшний день существует много исследований применительно к разработке автономных роботизированных систем, способных осуществлять навигацию в сложных условиях окружающей среды [1]. Наземные и воздушные роботы стали важнейшими компонентами в различных прикладных областях – от поисково-спасательных операций до экологического мониторинга и управления сельскохозяйственным производством. По мере все более широкой интеграции таких роботов в промышленные процессы потребность в эффективном решении задачи совместной навигации приобретает первостепенное значение. Под совместной навигацией понимается способность группы роботов, в общем случае – гетерогенной, совместно определять свое местоположение, скорость перемещения и другие параметры навигации.

Современное состояние исследований в области децентрализованных алгоритмов [2] и многоагентных систем [3] рассматривает роботов изолированно, уделяя внимание только процессам скоординированного управления группой. Однако использование всего потенциала таких систем возможно только при реализации алгоритмов, объединяющих всю доступную информацию, поступающую с измерительных систем роботов в группе, в единую сеть для построения общего навигационного решения. Эта проблема становится особенно актуальной при использовании гетерогенных групп роботов, поскольку разнотипные роботы часто обладают взаимодополняющими преимуществами, которые могут быть использованы для повышения эффективности навигации в сложных условиях.

В работе предлагается новый подход к совместной навигации, основанный на интеграции наземного и воздушного роботов. За счет применения современных коммуникационных протоколов, обмена данными в реальном времени и адаптивных навигационных алгоритмов данный подход направлен на оптимизацию навигационных стратегий в гетерогенных робототехнических группах и повышение их ситуационной осведомленности [4]. Научная новизна исследования заключается в акценте на информационное взаимодействие между роботами, позволяющее наземному роботу использовать преимущества измерительных систем воздушного и, наоборот, воздушному роботу использовать данные, получаемые наземным аппаратом. Такое взаимодействие не только повышает точность определения параметров навигации каждого из роботов, но и усиливает общую устойчивость робототехнической системы в динамических и непредсказуемых условиях.

В работе рассматривается частный случай навигации гетерогенной группы роботов (ГРР) в окрестностях воздушного судна (ВС) на его стоянке. Такая задача является актуальной при разработке систем автоматизированного мониторинга дефектов наружной поверхности воздушного судна [5]. Полученные в работе результаты могут быть использованы для решения задач совместной навигации и в других областях: в условиях ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций; высокоточном земледелии; мониторинге сельскохозяйственных культур.

## Материалы и методы

Применительно к решению задачи совместной навигации ГТР в окрестностях ВС будем формировать навигационное решение для каждого из роботов в единой системе координат (СК), связанной непосредственно с ВС –  $O_t X_t Y_t Z_t$  (начало координат  $O_t$  – крайняя точка носа ВС, ось  $O_t X_t$  направлена вдоль фюзеляжа от носа к хвосту ВС, ось  $O_t Z_t$  направлена вертикально вниз, ось  $O_t Y_t$  дополняет СК до правой тройки векторов).

Для решения задачи навигации в этой СК роботы должны обладать возможностью определения своих параметров навигации относительно ВС. Эта возможность может быть обеспечена, в частности, путем использования алгоритмов фотограмметрии [6]. Однако применение таких алгоритмов накладывает серьезные ограничения на точность и скорость решения задач ориентации фотоаппаратуры на бортах роботов. В этой связи для наземного робота предлагается использовать более практичный подход – коррекцию навигационной системы (НС) по измерениям сканирующего лазерного дальномера [7]. Измеряя расстояние до стоек шасси ВС, при известной их геометрии, возможно определить координаты местоположения наземного робота относительно ВС, а также его угол курса в СК  $O_t X_t Y_t Z_t$ . При этом, воздушный робот, определяя свое местоположение относительно наземного робота на основе измерений датчиков тросового механизма, также получает информацию о координатах своего местоположения относительно ВС.

Таким образом, аппаратное обеспечение четырехколесного наземного робота включает: энкодеры на колесах, курсовой гироскоп, сканирующий лазерный дальномер. На наземном роботе установлен также тросовый механизм, оснащенный датчиками силы натяжения троса, длины размотанной части троса и углового положения троса относительно платформы наземного робота. Аппаратное обеспечение воздушного робота, выполненного в виде гексакоптера, включает блок инерциальных датчиков, лазерный высотомер и приемник спутниковой навигационной системы (СНС). Применительно к решению задачи совместной навигации группы роботов вблизи ВС, качество спутниковых сигналов, принимаемых приемником, расположенным на наземном роботе, существенно хуже ввиду существенного переотражения сигналов и блокирования их фюзеляжем ВС. В этой связи, использование приемника СНС на наземном роботе является нецелесообразным.

Разработка систем навигации наземного и воздушного роботов осуществляется на основе использования математических моделей их движения. Модель динамики наземного робота в СК  $O_t X_t Y_t Z_t$  такова [8]:

$$\begin{aligned} m_g \ddot{x}_{gb} &= m_g \dot{\psi}_g \dot{y}_g + F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} + F_{x4} - \frac{1}{2} \rho C_d A_f (\dot{x}_g)^2 + F_t \cos \eta \sin \varepsilon, \\ m_g \ddot{y}_{gb} &= -m_g \dot{\psi}_g \dot{x}_g + F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} + F_{y4} - \frac{1}{2} \rho C_d A_s (\dot{y}_g)^2 + F_t \sin \eta \sin \varepsilon, \\ \ddot{x}_g &= \ddot{x}_{gb} \cos(\psi_{gt}) + \ddot{y}_{gb} \sin(\psi_{gt}), \\ \ddot{y}_g &= -\ddot{x}_{gb} \sin(\psi_{gt}) + \ddot{y}_{gb} \cos(\psi_{gt}), \\ I_{gz} \ddot{\psi}_g &= \frac{l_w}{2} (F_{x1} + F_{x3}) - \frac{l_w}{2} (F_{x2} + F_{x4}) + l_f (F_{y1} + F_{y2}) - l_r (F_{y3} + F_{y4}) + F_t l_{gtx} \cos \eta \sin \varepsilon, \\ I_\gamma \ddot{\gamma}_g &= M_\gamma - \varepsilon_\gamma \dot{\gamma}_g. \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_g, y_g$  – координаты местоположения наземного робота в СК  $O_t X_t Y_t Z_t$ ;  $x_{gb}, y_{gb}$  – координаты его местоположения в связанной СК;  $F_t$  – сила натяжения троса;  $\varepsilon, \eta$  – углы

наклона размотанной части троса в вертикальной и горизонтальной плоскостях;  $m_g$  – масса наземного робота;  $l_w$  – длина оси колесной пары;  $l_f, l_r$  – длины передней и задней полуосей продольной оси, определяющих соответственно расстояния от осей колесных пар до центра масс наземного робота;  $F_i (i = 1..4)$  – силы, приложенные к колесам со стороны подстилающей поверхности;  $\psi_g$  – угол курса;  $I_{gz}$  – момент инерции наземного робота вокруг вертикальной оси;  $l_{gtx}$  – горизонтальное смещение точки крепления троса относительно центра масс наземного робота;  $I_y$  – момент инерции передней оси колесной пары;  $\gamma_g$  и  $\varepsilon_\gamma$  – угол поворота и коэффициент демпфирования передней оси колесной пары.

Модель динамики воздушного робота имеет вид [9]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_a &= -\frac{U_1}{m_a} (\sin \psi_a \sin \gamma_a + \cos \psi_a \sin \theta_a \cos \gamma_a) + \frac{A_1}{m_a} + \frac{2}{m_a} (\dot{\theta}_a \dot{z}_a - \dot{y}_a \dot{\psi}_a) + \frac{F_t}{m_a} \sin \varepsilon \cos(\psi_g + \eta), \\ \ddot{y}_a &= \frac{U_1}{m_a} (\cos \psi_a \sin \gamma_a - \sin \psi_a \sin \theta_a \cos \gamma_a) + \frac{A_2}{m_a} + \frac{2}{m_a} (\dot{y}_a \dot{z}_a - \dot{x}_a \dot{\psi}_a) + \frac{F_t}{m_a} \sin \varepsilon \sin(\psi_g + \eta), \\ \ddot{z}_a &= g - \frac{U_1}{m_a} \cos \theta_a \cos \gamma_a + \frac{A_3}{m_a} + \frac{2}{m_a} (\dot{\theta}_a \dot{x}_a - \dot{y}_a \dot{y}_a) + \frac{F_t}{m_a} \cos \varepsilon, \\ \ddot{\psi}_a &= \frac{1}{I_z} U_2 + \frac{A_4}{I_z} + \dot{\gamma}_a \dot{\theta}_a \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{F_t l_{at}}{I_x} \sin \theta_a \sin \gamma_a \sin \varepsilon, \\ \ddot{\theta}_a &= \frac{1}{I_y} U_3 + \frac{A_5}{I_y} + \dot{\psi}_a \dot{\gamma}_a \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) - \frac{I_R}{I_y} \dot{\gamma}_a G_r - \frac{F_t l_{at}}{I_x} \cos(\psi_a - \psi_g - \eta) \sin \varepsilon, \\ \ddot{\gamma}_a &= \frac{1}{I_x} U_4 + \frac{A_6}{I_x} + \dot{\theta}_a \dot{\psi}_a \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) + \frac{I_R}{I_y} \dot{\theta}_a G_r + \frac{F_t l_{at}}{I_x} \sin(\psi_a - \psi_g - \eta) \sin \varepsilon, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $x_a, y_a, z_a$  – координаты местоположения воздушного робота в СК  $O_t X_t Y_t Z_t$ ;  $\psi_a, \theta_a, \gamma_a$  – его углы курса, тангажа и крена соответственно;  $m_a$  – масса воздушного робота;  $U_1$  – подъемная сила, развиваемая его двигателями;  $A_1, A_2, A_3$  – силы аэродинамического сопротивления;  $g$  – ускорение свободного падения;  $U_2, U_3, U_4$  – управляющие моменты разворотов по курсу, тангажу и крену соответственно;  $A_4, A_5, A_6$  – моменты аэродинамического сопротивления;  $I_x, I_y, I_z$  – моменты инерции воздушного робота;  $l_{at}$  – смещение точки крепления троса относительно центра масс воздушного робота;  $I_R$  – момент инерции винтов;  $G_r$  – суммарная (с учетом направления) угловая скорость вращения винтов.

*Навигационная система наземного робота.* Задачей НС наземного робота является определение его координат местоположения  $x_g, y_g$ , угла курса  $\psi_g$ , а также линейных  $\dot{x}_g, \dot{y}_g$  и угловой  $\dot{\psi}_g$  скоростей. Структура этой НС представлена на Рисунке 1.

Согласно представленной на Рисунке 1 структуре, измерения энкодеров, курсового гироскопа и сканирующего лазерного дальномера поступают на вход сигма-поинт фильтра. В нем, на основе измерений энкодеров и курсового гироскопа осуществляется формирование оценок навигационных и кинематических параметров движения наземного робота. Коррекция этих оценок реализуется по измерениям сканирующего лазерного дальномера и датчиков тросового механизма.

Использование сигма-поинт фильтра, как одной из модификаций фильтра Калмана для нелинейных систем, обеспечивает возможность учета нелинейной динамики (1) при формировании оценок. В частности, возможно формирование оценок параметров проскальзывания колес наземного робота. Вектор состояния  $X_g$  применительно к рассматриваемому случаю имеет вид:

$$X_g = [x_g, y_g, \dot{x}_g, \dot{y}_g, \psi_g, \dot{\psi}_g, r_{1eff}, r_{2eff}, r_{3eff}, r_{4eff}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \omega_z]^T, \quad (3)$$

где  $r_{1eff}, r_{2eff}, r_{3eff}, r_{4eff}$  – эффективные радиусы качения колес наземного робота (мера продольного проскальзывания его колес);  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  – углы проскальзывания колес (мера бокового проскальзывания);  $\omega_z$  – сдвиг нуля бортового гироскопа.

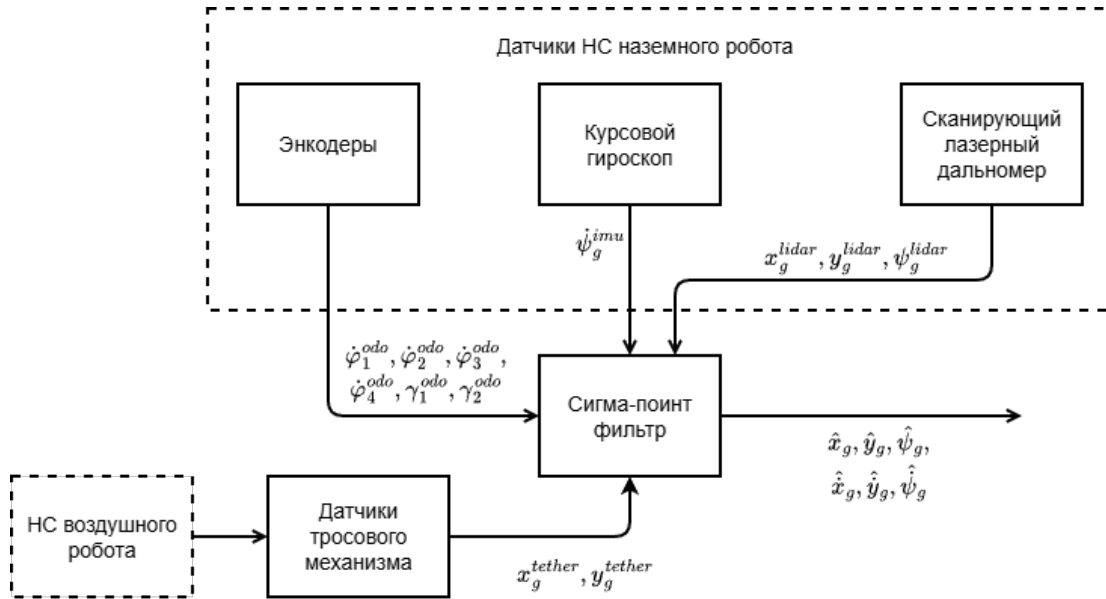


Рисунок 1 – Структура НС наземного робота  
Figure 1 – Navigation system structure for the ground robot

В предложенной структуре НС, измеряемые лазерным дальномером и датчиками тросового механизма параметры входят в вектор состояния напрямую. В этой связи уравнение измерений для сигма-поинт фильтра можно записать в линейной форме. Тогда уравнения динамики системы и измерений в дискретной форме таковы [10]:

$$\begin{aligned} \dot{X}_g &= f(X_g) + G_g \cdot w_g, \\ Z_g &= H_g \cdot X_g + v_g, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $X_g$  – вектор состояния;  $G_g$  – матрица влияния шумов системы;  $w_g, v_g$  – соответственно векторы гауссовых белых шумов динамики и измерений с нулевыми математическими ожиданиями;  $Z_g$  – вектор измерений наземного робота;  $f(X_g)$  – нелинейная функция в уравнении динамики;  $H_g$  – матрица измерений.

Для формирования функции нелинейной динамики системы  $f(X_g)$  на основе измерений энкодеров  $\dot{\varphi}_1^{odo}, \dot{\varphi}_2^{odo}, \dot{\varphi}_3^{odo}, \dot{\varphi}_4^{odo}, \gamma_1^{odo}, \gamma_2^{odo}$  запишем соотношения, определяющие взаимосвязь этих измерений с компонентами вектора состояния  $X_g$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{gb}^{odo} &= \frac{1}{4} (\dot{\varphi}_1^{odo} r_{1eff} \cos(\gamma_1^{odo} + \beta_1) + \dot{\varphi}_2^{odo} r_{2eff} \cos(\gamma_2^{odo} + \beta_2) + \\ &\quad + \dot{\varphi}_3^{odo} r_{3eff} \cos(\beta_3) + \dot{\varphi}_4^{odo} r_{4eff} \cos(\beta_4)), \\ \dot{y}_{gb}^{odo} &= \frac{1}{4} (\dot{\varphi}_1^{odo} r_{1eff} \sin(\gamma_1^{odo} + \beta_1) + \dot{\varphi}_2^{odo} r_{2eff} \sin(\gamma_2^{odo} + \beta_2) + \\ &\quad + \dot{\varphi}_3^{odo} r_{3eff} \sin(\beta_3) + \dot{\varphi}_4^{odo} r_{4eff} \sin(\beta_4)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{gb}^{odo} &= \frac{\dot{x}_g^{odo}}{l_f+l_r} \left( \tan \left( \frac{\gamma_1^{odo}+\gamma_2^{odo}}{2} + \frac{\beta_1+\beta_2}{2} \right) - \tan \left( \frac{\beta_3+\beta_4}{2} \right) \right), \\ \dot{x}_g^{odo} &= \dot{x}_{gb}^{odo} \cos \psi_g - \dot{y}_{gb}^{odo} \sin \psi_g, \\ \dot{y}_g^{odo} &= \dot{x}_{gb}^{odo} \sin \psi_g + \dot{y}_{gb}^{odo} \cos \psi_g, \\ \dot{\psi}_g^{odo} &= \dot{\psi}_g^{odo}.\end{aligned}\quad (5)$$

где  $\dot{x}_g^{odo}, \dot{y}_g^{odo}, \dot{\psi}_g^{odo}$  – линейные и угловая скорости движения наземного робота, рассчитанные на основе измерений энкодеров.

Тогда компоненты нелинейной функции динамики  $f(X_g)$  на основе (1), (3) и (5) таковы:

$$\begin{aligned}f(x_1) &= x_g + \dot{x}_g dt, f(x_2) = y_g + \dot{y}_g dt, f(x_3) = \dot{x}_g^{odo}, \\ f(x_4) &= \dot{y}_g^{odo}, f(x_5) = \psi_g + \dot{\psi}_g dt, f(x_6) = \dot{\psi}_g^{odo}, \\ f(x_7) &= r_{1eff}, f(x_8) = r_{2eff}, f(x_9) = r_{3eff}, f(x_{10}) = r_{4eff}, \\ f(x_{11}) &= \beta_1, f(x_{12}) = \beta_2, f(x_{13}) = \beta_3, f(x_{14}) = \beta_4, f(x_{15}) = \omega_z.\end{aligned}\quad (6)$$

Вектор белых шумов системы  $w_g$  имеет вид:

$$w = [\delta w_c, \delta w_c, \delta w_v, \delta w_v, \delta w_a, \delta w_r]^T, \quad (7)$$

где  $\delta w_c, \delta w_v, \delta w_a, \delta w_r$  – интенсивности шумов определения координат местоположения наземного робота, его линейных скоростей, угла курса и угловой скорости разворота по курсу.

Соответствующая вектору  $w_g$  матрица влияния шумов системы такова:

$$G_g = \begin{bmatrix} I_{6 \times 6} \\ [0]_{9 \times 6} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $I_{6 \times 6}$  – единичная матрица размером  $6 \times 6$ .

Вектор измерений  $Z_g$  содержит измерения сканирующего лазерного дальномера  $x_{gt}^{lidar}, y_{gt}^{lidar}, \psi_{gt}^{lidar}$ , датчиков тросового механизма  $x_g^{tether}, y_g^{tether}$ , а также разницу измерений курсового гироскопа  $\psi_g^{imu}$  и энкодеров (5):

$$Z_g = [x_g^{lidar}, y_g^{lidar}, \psi_g^{lidar}, \psi_g^{imu}, \psi_g^{imu} - \psi_g^{odo}, x_g^{tether}, y_g^{tether}]^T. \quad (9)$$

Соответствующая этому вектору матрица измерений такова:

$$H_g = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{2 \times 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I_{2 \times 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Вектор шумов измерений имеет вид:

$$v = [\delta v_l, \delta v_l, \delta v_{\psi_l}, \delta v_{gyr}, \delta v_{gyr} - \delta v_{odo}, \delta v_t + \delta v_{sa} dt, \delta v_t + \delta v_{sa} dt]^T, \quad (11)$$

где  $\delta v_l, \delta v_{\psi_l}$  – интенсивности шумов измерений координат и угла курса, определяемые на основе измерений сканирующего лазерного дальномера [7];  $\delta v_{gyr}$  – интенсивность шумов измерений курсового гироскопа наземного робота;  $\delta v_{odo}$  – интенсивность шумов косвенных измерений угловой скорости, осуществляемых на основе измерений

энкодеров;  $\delta v_t$  – интенсивность шумов измерений датчиков тросового механизма;  $\delta v_{sa}$  – ковариация измерений координат местоположения воздушного робота его НС.

С использованием представленных моделей динамики системы и измерений оценки вектора состояния могут быть получены на основе алгоритма сигма-поинт фильтра [10].

*Навигационная система воздушного робота.* Задачей НС воздушного робота является определение его координат местоположения  $x_a, y_a, z_a$ , углов ориентации  $\psi_a, \theta_a, \gamma_a$ , а также линейных скоростей движения  $\dot{x}_a, \dot{y}_a, \dot{z}_a$ . Структура этой НС представлена на Рисунке 2.

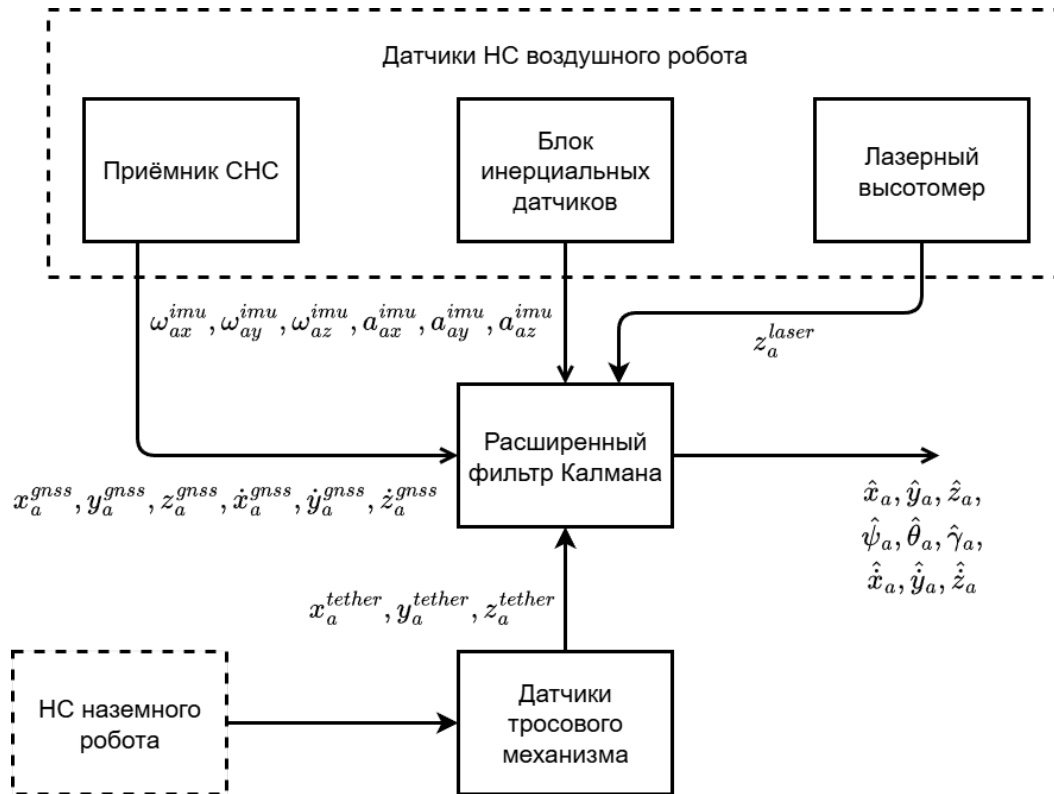


Рисунок 2 – Структура НС воздушного робота  
 Figure 2 – Navigation system structure for the aerial robot

Согласно этой структуре измерения приемника СНС, блока инерциальных датчиков, лазерного высотомера и датчиков тросового механизма поступают на вход расширенного фильтра Калмана. В фильтре на основе измерений блока инерциальных датчиков осуществляется формирование оценок параметров навигации воздушного робота, а коррекция этих оценок осуществляется на основе информации от приемника СНС, лазерного высотомера и датчиков тросового механизма.

В основе алгоритма НС воздушного робота лежит расширенный фильтр Калмана, обеспечивающий возможность учета нелинейной динамики аппарата (2). Уравнения динамики системы и измерений в общем случае имеют вид [11]:

$$\begin{aligned} \dot{X}_a &= F_c \cdot X_a + G_a \cdot w_a, \\ Z_a &= H_a \cdot X_a + v_a, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $X_a$  – вектор состояния воздушного робота;  $F_c$  – матрица Якоби в уравнении динамики системы;  $G_a$  – матрица влияния шумов системы;  $H_a$  – матрица Якоби в уравнении

измерений;  $w_a, v_a$  – векторы белых шумов динамики системы и измерений соответственно.

Вектор состояния  $X_a$  примем в виде:

$$X_a = [\Delta p_{1x3}, \Delta v_{1x3}, \Delta \theta_{1x3}, \Delta b_{1x3}^g, \Delta b_{1x3}^a]^T, \quad (13)$$

где  $\Delta p_{1x3} = [\Delta x_{at}, \Delta y_{at}, \Delta z_{at}]$  – ошибки определения координат местоположения беспилотного летательного аппарата (БЛА);  $\Delta v_{1x3} = [\Delta \dot{x}_{at}, \Delta \dot{y}_{at}, \Delta \dot{z}_{at}]$  – ошибки определения проекций линейной скорости перемещения БЛА;  $\Delta \theta_{1x3} = [\Delta \psi_{at}, \Delta \theta_{at}, \Delta \gamma_{at}]$  – ошибки определения углов ориентации БЛА;  $\Delta b_{1x3}^a = [\Delta a_{x0}, \Delta a_{y0}, \Delta a_{z0}]$  – ошибки определения сдвигов нулей бортового акселерометра БЛА;  $\Delta b_{1x3}^g = [\Delta \omega_{x0}, \Delta \omega_{y0}, \Delta \omega_{z0}]$  – ошибки определения сдвигов нулей бортового гироскопа БЛА.

Матрица Якоби в уравнении динамики системы  $F_c$ , формируемая на основе измерений инерциальных датчиков, такова:

$$F_c = \begin{bmatrix} 0 & I_{3x3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{R}_a^t [\hat{f} \times] & 0 & -\hat{R}_a^t \\ 0 & 0 & -[\hat{\omega} \times] & -I_{3x3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/\tau_g \times I_{3x3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\tau_a \times I_{3x3} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $\hat{R}_a^t$  – матрица направляющих косинусов, определяющая ориентацию СК  $O_t X_t Y_t Z_t$  относительно связанной СК воздушного робота;  $[\hat{f} \times]$  и  $[\hat{\omega} \times]$  – кососимметричные матрицы, сформированные на основе векторов  $a_{at}^{imu}$  и  $\omega_{at}^{imu}$  соответственно;  $\tau_a, \tau_g$  – постоянные времени дрейфов акселерометров и гироскопа в модели Гаусса-Маркова первого порядка.

Вектор шумов системы  $w_a$  имеет вид:

$$w_a = [\delta w_c, \delta w_c, \delta w_c, \delta w_v, \delta w_v, \delta w_v, \delta w_a, \delta w_a, \delta w_a]^T, \quad (15)$$

где  $\delta w_c, \delta w_v, \delta w_a$  – интенсивности белых шумов ошибок определения координат, скоростей и углов ориентации воздушного робота соответственно.

Соответствующая вектору  $w_a$  матрица влияния шумов системы такова:

$$G_a = \begin{bmatrix} I_{9x9} \\ [0]_{6x6} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Вектор измерений, содержащий ошибки измерений компонентов вектора состояния, и формируемый на основе измерений приемника СНС  $x_a^{gnss}, y_a^{gnss}, z_a^{gnss}, \dot{x}_a^{gnss}, \dot{y}_a^{gnss}, \dot{z}_a^{gnss}$ , лазерного высотомера  $z_a^{laser}$  и датчиков тросового механизма, запишем в виде:

$$\begin{aligned} Z_a &= [c x_a^{gnss}, c y_a^{gnss}, c z_a^{gnss}, c \dot{x}_a^{gnss}, c \dot{y}_a^{gnss}, c \dot{z}_a^{gnss}, c z_a^{laser}, c x_a^{tether}, c y_a^{tether}, c z_a^{tether}]^T, \\ c x_a^{gnss} &= x_a^{gnss} - l_{sz} (\cos \psi_a \sin \theta_a \cos \gamma_a + \sin \psi_a \sin \gamma_a) - \hat{x}_a, \\ c y_a^{gnss} &= y_a^{gnss} - l_{sz} (\sin \psi_a \sin \theta_a \cos \gamma_a - \cos \psi_a \sin \gamma_a) - \hat{y}_a, \\ c z_a^{gnss} &= z_a^{gnss} - l_{sz} \cos \theta_a \cos \gamma_a - \hat{z}_a, \\ c \dot{x}_a^{gnss} &= \dot{x}_a^{gnss} - \dot{\psi}_a l_{sz} (\cos \psi_a \sin \gamma_a - \sin \psi_a \sin \theta_a \cos \gamma_a) - \\ &\quad - \dot{\theta}_a l_{sz} \cos \psi_a \cos \theta_a \cos \gamma_a - \dot{\gamma}_a l_{sz} (\sin \psi_a \cos \gamma_a - \cos \psi_a \sin \theta_a \sin \gamma_a) - \hat{\dot{x}}_a, \\ c \dot{y}_a^{gnss} &= \dot{y}_a^{gnss} - \dot{\psi}_a l_{sz} (\cos \psi_a \sin \theta_a \cos \gamma_a + \sin \psi_a \sin \gamma_a) - \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 & -\dot{\theta}_a l_{sz} \sin \psi_a \cos \theta_a \cos \gamma_a + \dot{\gamma}_a l_{sz} (\sin \psi_a \sin \theta_a \sin \gamma_a + \cos \psi_a \cos \gamma_a) - \hat{y}_a, \\
 c\dot{z}_a^{gnss} &= \dot{z}_a^{gnss} + \dot{\theta}_a l_{sz} \sin \theta_a \cos \gamma_a + \dot{\gamma}_a l_{sz} \cos \theta_a \sin \gamma_a - \hat{z}_a, \\
 cz_a^{laser} &= z_a^{laser} - \hat{z}_a.
 \end{aligned}$$

где  $cx_a^{gnss}, cy_a^{gnss}, cz_a^{gnss}$  и  $c\dot{x}_a^{gnss}, c\dot{y}_a^{gnss}, c\dot{z}_a^{gnss}$  – измерения ошибки определения координат местоположения и линейных скоростей центра масс воздушного робота приемником СНС с учетом линейного смещения антенны приемника  $l_{sz}$  относительно центра масс;  $cz_a^{laser}$  – измерение ошибки определения высоты лазерным высотомером;  $cx_a^{tether}, cy_a^{tether}, cz_a^{tether}$  – расчетные значения ошибок определения координат местоположения воздушного робота, определяемые на основе измерений датчиков тросового механизма ( $cx_a^{tether} = x_a^{tether} - \hat{x}_a, cy_a^{tether} = y_a^{tether} - \hat{y}_a, cz_a^{tether} = z_a^{tether} - \hat{z}_a$ ).

При формировании измерений СНС будем учитывать, что  $x_a^{gnss}, y_a^{gnss}, z_a^{gnss}$  – метрические величины. Изначально измерения приемника СНС формируются в формате географических широты  $\varphi_a^{gnss}$ , долготы  $\lambda_a^{gnss}$  и высоты  $h_a^{gnss}$ . При малых перемещениях ГГР (до 1000 м), переход от географических координат к метрическим можно осуществить так:

$$\begin{aligned}
 x_a^{gnss} &= (\varphi_a^{gnss} - \varphi_{a0}^{gnss}) \cdot 111110, \\
 y_a^{gnss} &= (\lambda_a^{gnss} - \lambda_{a0}^{gnss}) \cdot \cos \varphi_{a0}^{gnss} \cdot 111110, \\
 z_a^{gnss} &= h_a^{gnss} - h_{a0}^{gnss},
 \end{aligned} \tag{18}$$

где  $\varphi_{a0}^{gnss}, \lambda_{a0}^{gnss}, h_{a0}^{gnss}$  – географические координаты воздушного робота в начальный момент времени (перед взлетом).

Матрицу Якоби в уравнении измерений  $H_a$  на основе (17) сформируем следующим образом:

$$H_a = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & 0 & -\hat{R}_a^t[l_{sz} \times] & 0 & 0 \\ 0 & I_{3 \times 3} & -\hat{R}_a^t(\hat{\omega} \times l_{sz}) & 0 & 0 \\ [0 & 0 & 1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Вектор шумов измерений  $v_a$  имеет вид:

$$v_a = \left[ \delta v_s, \delta v_s, \delta v_s, \delta v_{sv}, \delta v_{sv}, \delta v_{sv}, \delta v_z, \delta v_t + \delta v_{sg} dt, \delta v_t + \delta v_{sg} dt, \delta v_t + \delta v_{sg} dt \right]^T, \tag{20}$$

где  $\delta v_s, \delta v_{sv}, \delta v_z$  – интенсивности шумов измерений координат местоположения, путевых скоростей и высоты БЛА соответствующими датчиками;  $dt$  – шаг дискретизации;  $\delta v_{sg}$  – ковариация ошибки определения координат НС наземного робота.

Оценки вектора состояния могут быть получены на основе представленных уравнений динамики системы и измерений с использованием алгоритма расширенного фильтра Калмана [11].

## Результаты

Верификация разработанных алгоритмов осуществлялась на основе результатов имитационного моделирования. В моделируемом сценарии наземный и воздушный роботы осуществляют перемещения по заданным траекториям вокруг ВС SSJ-100. Динамика перемещений роботов моделировалась в соответствии с представленными моделями (1) и (2). Приняты допущения, что отклонения роботов от заданных

траекторий минимальны, а трос между роботами всегда находится в слабонатяннутом состоянии (сила натяжения троса составляет 1 Н).

Моделирование осуществлялось при использовании следующих значений параметров математических моделей наземного и воздушного роботов. Параметры модели наземного робота:  $r_k = 0,2$  м;  $m_g = 46$  кг;  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $l_w = 0,8$  м;  $h = 0,5$  м;  $h_a = 0,6$  м;  $l_f = l_r = 0,7$  м;  $c_d = 0,4$ ;  $S_f = 0,64$  м<sup>2</sup>;  $S_s = 1,12$  м<sup>2</sup>;  $f = 0,02$ ;  $I_g = 10,12$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{axis} = 2,23$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_w = 0,2$  кг·м<sup>2</sup>; максимальный угол поворота оси передней колесной пары  $\gamma_{max} = 30^\circ$ ;  $l_{gtz} = 0,3$  м;  $l_{gtx} = 0$  м (трос крепится в центре посадочной площадки); максимальная скорость вращения колес  $\dot{\phi}_{max}$  об/мин. Параметры модели воздушного робота:  $m_a = 5$  кг;  $l_r = 0,3$  м;  $\rho = 1,2$  кг/м<sup>3</sup>;  $k_{ar} = 0,08$ ;  $c_x = c_y = 0,08$ ;  $c_z = 0,12$ ;  $m_x = m_y = 0,05$ ;  $m_z = 0,02$ ;  $I_r = 3 \cdot 10^{-5}$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{ax} = I_{ay} = 0,02$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{az} = 0,03$  кг·м<sup>2</sup>;  $S_{ax} = S_{ay} = 0,4$  м<sup>2</sup>;  $S_{az} = 0,15$  м<sup>2</sup>;  $S_a = 0,075$  м<sup>2</sup>;  $l_{at} = 0,1$  м; максимальная угловая скорость вращения винтов  $\omega_{amax}$  об/мин. При моделировании ошибок датчиков использованы следующие значения параметров. Шумы гироскопов – белые с математическим ожиданием 0,013 1/с и СКО 0,0018 1/с. Шумы приемника СНС моделируются с использованием формирующего фильтра первого порядка с параметрами:  $\delta_{СНС}^c = -0,01$  м; СКО  $\delta_{СНС}^w = 0,01$  м;  $\mu = 0,001$  с;  $\sigma_{\Delta_{СНС}^c} = 0,28$  м [12]. Шумы энкодеров формируются в виде сумм двух гармонических сигналов со следующими параметрами:  $\delta_{Од}^{cm} = -0,17$  1/с; СКО  $\delta_{Од}^{bw} = 0,01$  1/с;  $A_1 = 0,07$  1/с;  $A_2 = 0,04$  1/с. Параметры вектора белых шумов системы наземного робота:  $\delta w_c = 0,56$  м,  $\delta w_v = 0,06$  м/с,  $\delta w_a = 0,0003$  рад,  $\delta w_r = 0,1$  рад/с. Шумы измерений наземного робота:  $\delta v_{gyr} = 0,35$  рад/с;  $\delta v_{odo} = 0,01$  рад/с;  $\delta v_\gamma = 0,003$  рад;  $\delta v_l = 0,46$  м;  $\delta v_{\psi l} = 0,02$  м/с. Параметры вектора белых шумов системы воздушного робота:  $\delta w_c = 0,0005$  м;  $\delta w_v = 0,0006$  м/с;  $\delta w_a = 0,005$  рад. Шумы измерений воздушного робота:  $\delta v_{gyr} = 0,0003$  рад/с;  $\delta v_s = 0,12$  м;  $\delta v_{sv} = 0,02$  м/с;  $\delta v_h = 0,05$  м. Начальные значения компонентов векторов состояния роботов приняты нулевыми. Основные результаты моделирования представлены на Рисунках 3–6.

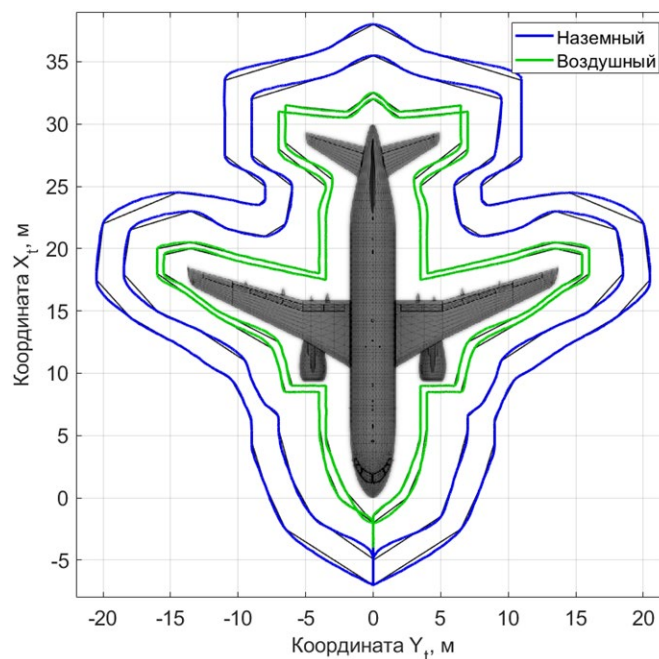


Рисунок 3 – Траектории перемещений наземного и воздушного роботов в процессе имитационного моделирования

Figure 3 – Ground and aerial robots' motion trajectories during the simulation process

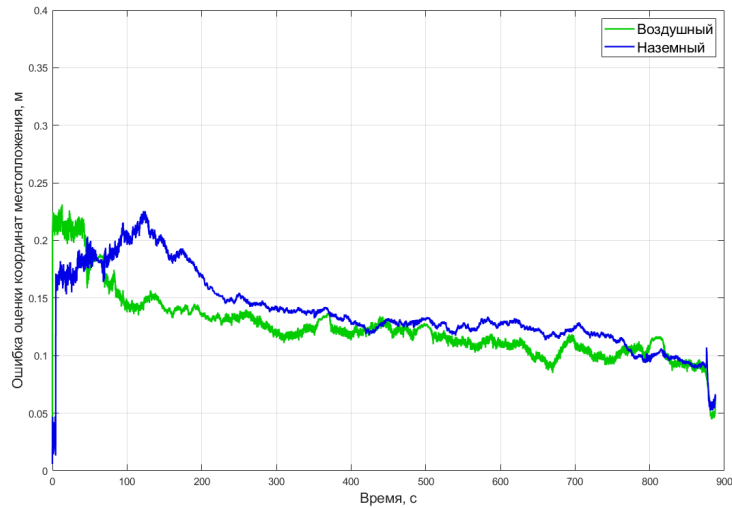


Рисунок 4 – Ошибки оценок координат наземного и воздушного роботов  
Figure 4 – Coordinate estimation errors for the ground and aerial robots

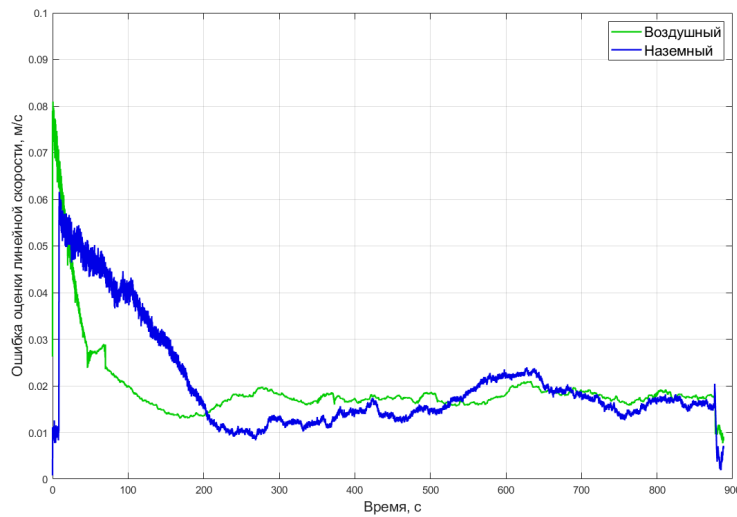


Рисунок 5 – Ошибки оценок линейных скоростей движения наземного и воздушного роботов  
Figure 5 – Velocity estimation errors for the ground and aerial robots

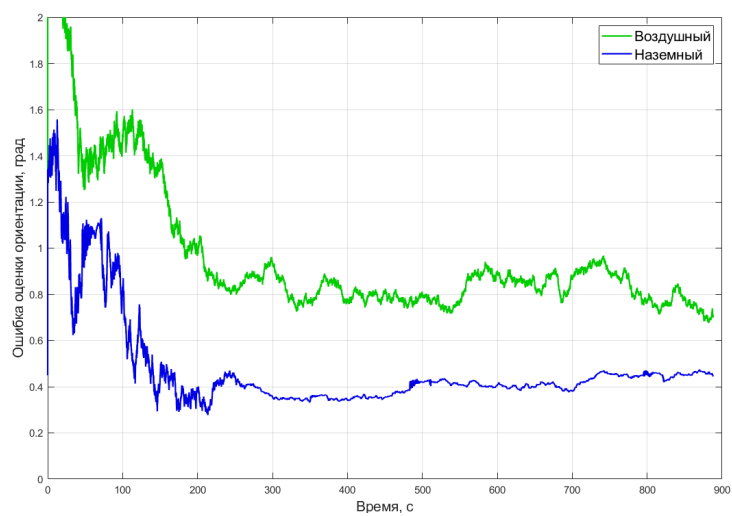


Рисунок 6 – Ошибки оценок угловой ориентации наземного и воздушного роботов  
Figure 6 – Angular orientation estimation errors for the ground and aerial robots

## Обсуждение

Анализ результатов имитационного моделирования показал, что математическое ожидание (МО) ошибки оценки координат местоположения для наземного и воздушного роботов составили 0,138 м и 0,125 м соответственно. При этом среднеквадратические отклонения (СКО) этих ошибок составили 0,033 м и 0,029 м. Полученные значения ошибок существенно меньше использованных при моделировании значений шумов измерений бортовых систем роботов. МО ошибок определения линейных скоростей составили 0,02 м/с и 0,019 м/с для наземного и воздушного роботов соответственно. СКО этих ошибок – 0,011 м/с и 0,008 м/с. МО ошибок определения угловой ориентации составили 0,48° и 0,97° при СКО 0,21° и 0,326° для наземного и воздушного роботов соответственно. При этом также были получены оценки сдвигов нулей инерциальных датчиков для обоих роботов и оценки параметров проскальзывания колес наземного робота. МО ошибки оценки эффективных радиусов качения колес составило 0,013 м, а МО ошибки оценки углов проскальзывания колес составило 0,005 рад. МО ошибок оценки сдвигов нулей бортовых гироскопов для наземного и воздушного роботов составили 0,004 рад/с и 0,0063 рад/с, а МО ошибки сдвигов нулей акселерометров на борту воздушного робота составило 0,071 м/с<sup>2</sup>.

С целью проведения сравнительного анализа также осуществлено моделирование перемещений ГТР по второму сценарию, в котором каналы коррекции по взаимному расположению (на основе измерений датчиков тросового механизма) в (9) и (17) были исключены. Результаты моделирования показали, что МО ошибки оценки местоположения для наземного и воздушного роботов в этом случае составляют 0,21 м и 0,312 м при СКО – 0,06 м и 0,07 м. МО ошибок оценки ориентации составили 0,85° и 1,08° при СКО 0,41° и 0,39°. Полученные результаты являются ожидаемыми, так как добавление дополнительных каналов коррекции способствует повышению эффективности НС путем преобразования избыточности навигационной информации в точность получаемых оценок. Таким образом, использование алгоритмов взаимной коррекции при решении задачи совместной навигации ГТР в моделируемом сценарии обеспечило повышение точности определения координат местоположения на 34 % для наземного робота и на 60 % для воздушного. Соответствующие увеличения точностей определения угловой ориентации роботов составили 43 % и 10 %.

## Заключение

В работе представлен новый подход к решению задачи совместной навигации наземных и воздушных роботов, основанный на применении методов комплексной обработки информации на основе фильтра Калмана. За счет обеспечения обмена навигационной информацией между роботами удалось добиться существенного повышения точности навигации. Результаты моделирования показывают, что предложенный метод повышает точность оценки положения каждого робота относительно других участников группы, эффективно снижая влияние шумов и неопределенности, присущих традиционным навигационным алгоритмам.

В дальнейшем предполагается проведение экспериментальных исследований разработанных алгоритмов совместной навигации, а также разработка робастных алгоритмов адаптивного управления движением гетерогенной группы роботов.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Zhang P., Liu Y., Du H. An integrated framework for UAV-based precision plant protection in complex terrain: the ACHAGA solution for multi-tea fields. *Frontiers in Plant Science*. 2024;15:1440234. <https://doi.org/10.3389/fpls.2024.1440234>

2. Pereira G.A.S., Kumar V., Campos M.F. Decentralized algorithms for multirobot manipulation via caging. In: *Algorithmic Foundations of Robotics V*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2004. P. 257–273. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-45058-0\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-540-45058-0_16)
3. Groenewald C.A., Saha G.Ch., Mann G., et al. Multi-agent systems in robotics: coordination and communication using machine learning. *Naturalista Campano*. 2024;28(1):882–897.
4. Salam T., Hsieh M.A. Heterogeneous robot teams for modeling and prediction of multiscale environmental processes. *Autonomous Robots*. 2023;47(4):353–376. <https://doi.org/10.1007/s10514-023-10089-6>
5. Bhatia V., Arora R., Sidharth S. Deep learning for automated aircraft surface defect detection. In: *2024 International Conference on Intelligent Computing and Emerging Communication Technologies (ICEC), 23–25 November 2024, Guntur, India*. IEEE; 2024. <https://doi.org/10.1109/ICEC59683.2024.10837564>
6. Liu C., Wei S., Zhang M., et al. High-precision monitoring during the installation of large steel structures by UAV nap-of-the-object photogrammetry. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 2024;XLVIII-4-2024:317–323. <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLVIII-4-2024-317-2024>
7. Chernomorsky A.I., Lelkov K.S., Kuris E.D. About one way to increase the accuracy of navigation system for ground wheeled robot used in aircraft parking. *Smart Science*. 2020;8(4):219–226. <https://doi.org/10.1080/23080477.2020.1824055>
8. Лельков К.С., Черноморский А.И. Комплексная навигационная система наземного колёсного робота. В сборнике: *XXIX Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам, 30 мая – 01 июня 2022 года, Санкт-Петербург, Россия*. Санкт-Петербург: Электроприбор; 2022. С. 50–53.  
Lelkov K.S., Chernomorsky A.I. Integrated navigation system for ground wheeled robot. In: *2022 29<sup>th</sup> Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS), 30 May – 01 June 2022, Saint Petersburg, Russia*. IEEE; 2022. <https://doi.org/10.23919/ICINS51784.2022.9815389>
9. Lei Y., Cheng M. Aerodynamic performance of a hex-rotor unmanned aerial vehicle with different rotor spacing. *Measurement and Control*. 2020;53(3-4):711–718. <https://doi.org/10.1177/0020294019901313>
10. Wan E.A., Van Der Merwe R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In: *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium, 04 October 2000, Lake Louise, AB, Canada*. IEEE; 2000. P. 153–158. <https://doi.org/10.1109/ASSPCC.2000.882463>
11. Schacht-Rodriguez R., Ortiz-Torres G., García-Beltrán C.D., et al. SoC estimation using an extended Kalman filter for UAV applications. In: *2017 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 13–16 June 2017, Miami, FL, USA*. IEEE; 2017. P. 179–187. <https://doi.org/10.1109/ICUAS.2017.7991381>
12. Бродский М.С., Звонарев В.В., Хуббиев Р.В. и др. Компьютерная модель радиоканала системы спутниковой связи и ретрансляции данных при многопозиционной передаче сигнала. *Труды МАИ*. 2022;(127). <https://doi.org/10.34759/trd-2022-127-10>  
Brodsky M.S., Zvonarev V.V., Khubbiev R.V., et al. Computer model of the satellite communication and data relay system radio channel during multiposition signal transmission. *Trudy MAI*. 2022;(127). (In Russ.). <https://doi.org/10.34759/trd-2022-127-10>

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

**Лельков Константин Сергеевич**, аспирант,  
московский авиационный институт, Москва,  
Российская Федерация.

*e-mail:* [kon.lelkov@gmail.com](mailto:kon.lelkov@gmail.com)

ORCID: [0009-0003-9257-0210](https://orcid.org/0009-0003-9257-0210)

**Konstantin S. Lelkov**, Postgraduate, Moscow  
Aviation Institute, Moscow, the Russian  
Federation.

**Петрухин Владимир Андреевич**, старший  
преподаватель, Московский авиационный  
институт, Москва, Российская Федерация.

*e-mail:* [riksorge@gmail.com](mailto:riksorge@gmail.com)

**Vladimir A. Petruhin**, Senior Lecturer, Moscow  
Aviation Institute, Moscow, the Russian  
Federation.

**Черноморский Александр Исаевич**, кандидат  
технических наук, доцент, старший научный  
сотрудник, Московский авиационный институт,  
Москва, Российская Федерация.

*e-mail:* [chernomorsky@yandex.ru](mailto:chernomorsky@yandex.ru)

ORCID: [0000-0001-7970-6230](https://orcid.org/0000-0001-7970-6230)

**Alexander I. Chernomorsky**, Candidate of  
Engineering Sciences, Docent, Senior Researcher,  
Moscow Aviation Institute, Moscow, the Russian  
Federation.

**Хорев Тимофей Сергеевич**, старший  
преподаватель, Московский авиационный  
институт, Москва, Российская Федерация.

*e-mail:* [ieslondor@gmail.com](mailto:ieslondor@gmail.com)

**Timofey S. Khorev**, Senior Lecturer, Moscow  
Aviation Institute, Moscow, the Russian  
Federation.

*Статья поступила в редакцию 27.03.2026; одобрена после рецензирования 17.06.2026;  
принята к публикации 07.07.2026.*

*The article was submitted 27.03.2026; approved after reviewing 17.06.2026;  
accepted for publication 07.07.2026.*