УДК 519.21; 519.873
DOI: 10.26102/2310-6018/2026.57.6.008

Численное исследование характеристик надежности дублированной системы с приоритетом

С.М. Сидоров✉

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Российская Федерация

Резюме. Математическое моделирование дублированных систем с приоритетом, состоящих их разнородных элементов, позволяет получать аналитические выражения для анализа их надежности. Однако на практике эти выражения оказываются пригодными для инженерных расчетов лишь в частных случаях или для упрощенных моделей. Актуальность исследования обусловлена стремлением получить подобные приближенные выражения для полумарковской модели с фазовым пространством состояний общего вида. Данная статья посвящена численному исследованию характеристик надежности дублированной системы с приоритетным в использовании элементом. Ведущим методом исследования является применение алгоритма асимптотического фазового укрупнения и предположение о «быстром» восстановлении приоритетного элемента к полумарковской модели с фазовым пространством состояний общего вида, что, в свою очередь, позволяет получить более общие результаты при произвольных распределениях времен безотказной работы и восстановления элементов. В статье получены формулы, которые позволяют приближенно вычислять характеристики надежности дублированной системы с приоритетом. Оценена погрешность полученных приближенных формул в сравнении с точными и известными результатами для различных распределений времени безотказной работы и времени восстановления элементов. Материалы статьи представляют практическую ценность для инженеров и исследователей, занимающихся анализом надежности дублированных технических систем на этапах их проектирования и эксплуатации.

Ключевые слова: дублированная система с приоритетом, приближенные характеристики надежности, численное исследование, быстрое восстановление, вероятность безотказной работы.

Для цитирования: Сидоров С.М. Численное исследование характеристик надежности дублированной системы с приоритетом. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2026;14(6). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/article?id=2323 DOI: 10.26102/2310-6018/2026.57.6.008

Reliability characteristics numerical study of a duplicated system with priority

S.M. Sidorov✉

MIREA – Russian Technological University, Moscow, the Russian Federation

Abstract. Mathematical modeling of duplicated systems with a priority, consisting of non-homogeneous elements, allows for the derivation of analytical expressions for their reliability analysis. However, in practice, these expressions prove suitable for engineering calculations only in particular cases or for simplified models. The relevance of this research is determined by the aim to obtain such approximate expressions for a semi-Markov model with a state space in a general form. This article is devoted to the reliability characteristics numerical study of a duplicated system with a priority element. The principal research method involves applying the asymptotic phase merging algorithm and the assumption of "fast" restoration of the priority element to a semi-Markov model with a state space in a general form. This approach, in turn, allows for obtaining more general results under general form distributions of element uptimes and restoration times. The article presents formulas that enable the approximate calculation of reliability characteristics for a duplicated system with a priority. The error of the obtained approximate formulas is estimated by comparing them with exact and known results for various distributions of element uptimes and restoration times. The materials presented in the article are of practical value for engineers and researchers involved in the reliability analysis of duplicated technical systems at the stages of their design and operation.

Keywords: duplicated system with priority, approximate reliability characteristics, numerical study, fast restoration, probability of failure-free operation.

For citation: Sidorov S.M. Reliability characteristics numerical study of a duplicated system with priority. *Modeling, Optimization and Information Technology.* 2026;14(6). (In Russ.). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/article?id=2323 DOI: 10.26102/2310-6018/2026.57.6.008

Введение

Современные исследователи и инженеры сталкиваются с задачей расчета надежности технических систем, которые становятся все сложнее и сложнее. С одной стороны, разработка более адекватных математических моделей позволяет получить точные аналитические выражения для расчета надежности, однако они зачастую оказываются непригодными для инженерных расчетов в силу своей вычислительной сложности. С другой стороны, использование известных приближенных формул позволяет обойти эти вычислительные трудности, однако они, как правило, получены лишь для частных случаев или сильно упрощенных математических моделей, что поднимает вопрос об их применимости на практике.

Полумарковские модели с фазовым пространством состояний общего вида [1, 2] являются одними из наиболее общих математических моделей, используемых в математической теории надежности. Они позволяют получать точные выражения в общем виде для вычисления характеристик надежности систем различного назначения [3, 4], но практическое применение этих результатов весьма затруднительно. Поэтому актуальной является задача нахождения применимых на практике приближенных формул для расчета характеристик надежности на основе полумарковской модели.

Дублирование довольно часто встречается в инженерной практике [5, 6]. Оно применяется как для составных частей более сложных систем [7], так и для системы в целом, где приоритетным является элемент, выполняющий основную функцию [8]. Такой подход широко используется в насосных станциях, электронике, энергетических и информационных системах. В качестве резерва могут выступать возобновляемые источники энергии, дизель-генераторы, системы хранения энергии и др. Краткое описание первых результатов исследований дублированных систем (ДС) можно найти в [9]. Математическому моделированию дублированных систем ДС с приоритетом посвящено много работ. Проводились исследования восстанавливаемой ДС с приоритетом в использовании первого элемента при холодном [10] и горячем [11] резервировании. Однако они основывались на предположении об экспоненциальном распределении времени до отказа и времени ремонта для обоих элементов системы, что значительно ограничивает их практическую применимость. В [12] была проанализирована ДС с приоритетом, при условии, что время до отказа и время ремонта обоих элементов подчиняются распределениям Вейбулла. В [13] авторы вычислили приближенно среднее время безотказной работы двухэлементной системы с приоритетом, в предположении, что распределения вероятностей времени работы и восстановления могут быть аппроксимированы как смешанное распределение Эрланга. ДС с приоритетом первого элемента (как в использовании, так и в ремонте) была изучена в [14], при отрицательном экспоненциальном распределении частоты отказов элементов и распределении общего вида восстановления элементов. В [15] исследована ДС из двух разнородных элементов и одного восстанавливающего устройства с приоритетом в использовании первого элемента. Авторы нашли некоторые показатели надежности, предполагая, что распределение времени работы элементов является показательным, а распределение времени ремонта имеет произвольное распределение. В [16] построена полумарковская модель ДС с приоритетом и найдены аналитические выражения для вычисления характеристик надежности при показательных распределениях времени работы и времени восстановления элементов системы.

Целью данной работы является нахождение приближенных выражений для вычисления характеристик надежности дублированной системы с приоритетом на основе ее полумарковской модели с фазовым пространством состояний общего вида и исследование их погрешности.

Материалы и методы

Рассматривается система S, состоящая из двух разнородных элементов: приоритетного (основного) K_1 и резервного K_2, который находится в холодном (ненагруженном) резерве. В [16] приводится ее описание и построена полумарковская модель с дискретно-непрерывным фазовым пространством [7, 17]. Для случая, когда времена безотказной работы и времена восстановления элементов системы имеют экспоненциальное распределение, найдено стационарное распределение вложенной цепи Маркова (ВЦМ), получены формулы для нахождения стационарных характеристик надежности (СХН).

Для полноты изложения, приводятся некоторые результаты, полученные в [16], которые понадобятся в данном исследовании. Времена безотказной работы и восстановления элементов K_1 и K_2 являются случайными величинами (СВ) $\alpha_i(\beta_i)$, $i=\overline{1,2}$, имеющими функции распределения $F_i(t)\big(G_i(t)\big)$, соответственно. Предполагается, что СВ α_i и β_i независимы и имеют конечные математические ожидания, а также у $F_i(t)\big(G_i(t)\big)$ существуют плотности $f_i(t)\big(g_i(t)\big)$.

Вероятности переходов ВЦМ имеют вид:

$$p_{110x}^{212y}=f_1(x+y), y>0;\ p_{110x}^{100y}=f_1(x-y), 0<y<x;\ p_{201x}^{12}=\bar{F}_2(x),$$

$$p_{201x}^{200y}=f_2(x-y), 0<y<x;\ p_{100x}^{201y}=g_1(x+y), y>0;\ p_{100x}^{110y}=g_1(x-y), 0<y<x,$$

$$p_{200x}^{110y}=g_2(x+y), y>0;\ p_{200x}^{201y}=g_2(x-y), 0<y<x, \tag{1}$$

$$p_{01}^{200y}=\int_0^\infty g_1(y+t)f_2(t)dt\,, y>0;\quad p_{01}^{12}=\int_0^\infty \bar{F}_2(t)g_1(t)dt,$$

$$p_{212x}^{01}=1;\ p_1^{01}=1;\ p_{12}^{01}=1;\ \bar{F}_2(t)=1-F_2(t).$$

Средние времена пребывания в состояниях равны:

$$M\theta_1=M\alpha_1, M\theta_{01}=M(\beta_1\wedge\alpha_2)=\int_0^\infty \bar{G}_1(t)\bar{F}_2(t)dt\,, M\theta_{12}=M\alpha_1, M\theta_{212x}=x,$$

$$M\theta_{110x}=M(\alpha_1\wedge x)=\int_0^x \bar{F}_1(t)dt\,,\ M\theta_{201x}=M(\alpha_2\wedge x)=\int_0^x \bar{F}_2(t)dt, \tag{2}$$

$$M\theta_{100x}=M(\beta_1\wedge x)=\int_0^x \bar{G}_1(t)dt\,,\ M\theta_{200x}=M(\beta_2\wedge x)=\int_0^x \bar{G}_2(t)dt,$$

где $\wedge$ – знак минимума.

Метод приближенного нахождения характеристик надежности. В ряде случаев применяется метод приближенного нахождения СХН среднего стационарного времени безотказной работы T_+ и среднего стационарного времени восстановления T_-, описанный в [1, 4] и состоящий в следующем.

Обозначим S – исходная система, S_0 – опорная система. В качестве опорной системы зачастую выбирается некая высоконадежная система, близкая к исходной.

Предполагается, что [1, 4]:

I. S описывается процессом марковского восстановления (ПМВ) $\{\xi_n, \theta_n; n \geq 0\}$ и соответствующим полумарковским процессом (ПМП) $\xi(t)$ в измеримом фазовом пространстве (X, B) с ПМ-ядром

$$Q(t, x, B) = P\{\xi_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t \mid \xi_n = x\}.$$

II. S близка к некоторой S_0, эволюция которой описывается ПМВ $\left\{\xi_n^{(0)}, \theta_n^{(0)}; n \geq 0\right\}$ с фазовым пространством $X^{(0)} \subset X$ с ПМ–ядром $Q^{(0)}(t, x, B)$. При этом ВЦМ $\left\{\xi_n^{(0)}; n \geq 0\right\}$ S_0, со стохастическим ядром $P^{(0)}(x, B)$, – эргодическая со стационарным распределением $\rho^{(0)}(B)$:

$$\rho^{(0)}(B) = \int_{X(0)} P^{(0)}(x, B)\rho^{(0)}(dx)\,, \rho\left(X^{(0)}\right) = 1.$$

III. Множество состояний X системы S:

$$X = E_+ \cup E_-,\ E_+ \cap E_- = \emptyset.$$

При выполнении условий I–III для приближенного вычисления T_+, T_- можно использовать приближенные формулы [1, 3]:

$$T_+ \approx \frac{(\rho^{(0)}, \overline{m}_1)}{(\rho^{(0)}, P^{(r)}\overline{1}_0)},\ T_- \approx \frac{(\rho^{(0)}, P^{(r)}\overline{m}_0)}{(\rho^{(0)}, P^{(r)}\overline{1}_0)}, \tag{3}$$

где оператор P определяется равенством:

$$[Pf](x) = \int_X f(y)P(x, dy)\,, \overline{m}_1(x) = \begin{cases} m(x), x \in E_+, \\ 0,\ \ x \in E_-, \end{cases}\ \overline{m}_0(x) = \begin{cases} 0,\ x \in E_+, \\ m(x), x \in E_-, \end{cases}$$

$$\overline{1}_0(x) = \begin{cases} 0,\ \ x \in E_+, \\ 1,\ \ x \in E_-, \end{cases}\ (\rho, f) = \int_X f(x)\rho(dx),$$

где $m(x)$ – среднее время пребывания в состоянии исходной системы, $P^{(r)}$ – r-я степень оператора P, r – минимальное число шагов, за которое реальная система может перейти в подмножество неработоспособных состояний E_- из состояний, принадлежащих E_+, входящих в эргодический класс $X^{(0)}$ системы S_0.

Результаты

Предположим, что у элемента K_1 системы S «быстрое» восстановление [18, 1], т. е. время восстановления β_1 зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ таким образом, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} M\beta_1^{(\varepsilon)} = 0. \tag{4}$$

На Рисунке 1 показана временная диаграмма функционирования системы S_0. Мгновенные состояния указаны в скобках, а утолщенная линия показывает нахождение элемента 2 в холодном резерве.

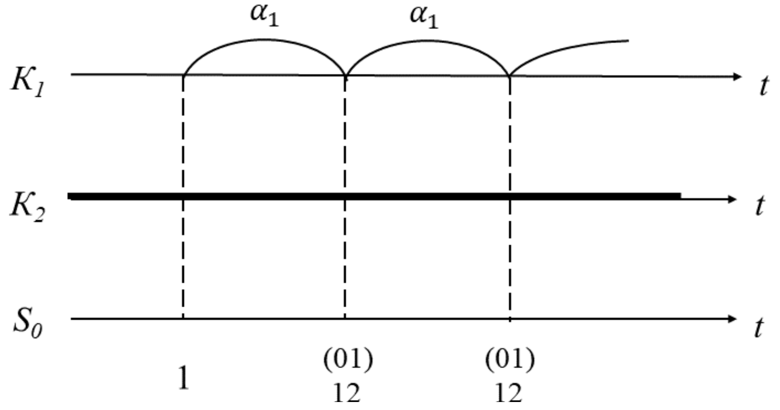

Рисунок 1 – Функционирование опорной системы S_0 во времени
Figure 1 – Functioning of the support system S_0 in time

Фазовое пространство состояний и вероятности переходов ВЦМ $\left\{\xi_n^{(0)}; n \geq 0\right\}$ опорной системы:

$$X^{(0)} = \{1,\ 01,\ 12\},\ p_1^{01} = p_{01}^{12} = p_{12}^{01} = 1. \tag{5}$$

Стационарное распределение ВЦМ и класс эргодических состояний $X_{(0)}$ опорной системы S_0 имеет вид:

$$\rho^{(0)}(01) = \rho^{(0)}(12) = \tfrac{1}{2},\ X_{(0)} = \{01, 12\}. \tag{6}$$

В силу того, что S может за один шаг ($r = 1$) перейти во множество неработоспособных состояний E_- из работоспособных состояний E_+, принадлежащих эргодическому классу состояний $X_{(0)}$, формулы (3) принимают вид:

$$T_+ \approx \frac{\int_{E_+} m(x)\rho^{(0)}(dx)}{\int_{E_+} P(x,E_-)\rho^{(0)}(dx)},\ T_- \approx \frac{\int_X \rho^{(0)}(dx)\int_{E_-} m(y)P(x,dy)}{\int_{E_+} P(x,E_-)\rho^{(0)}(dx)},\ \ K_\Gamma \approx \frac{T_+}{T_+ + T_-}. \tag{7}$$

Определим выражения, входящие в формулы (7).

$$\int_{E_+} P(x, E_-)\rho^{(0)}(dx) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dy \int_0^\infty g_1^{(\varepsilon)}(y+t) f_2(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \bar{G}_1^{(\varepsilon)}(t) f_2(t)dt = \frac{1}{2}P\left(\beta_1^{(\varepsilon)} > \alpha_2\right). \tag{8}$$

Используя (6) и (1)–(2), получим

$$\int_{E_+} m(x)\rho^{(0)}(dx) = \frac{1}{2}\left(M\alpha_1 + \int_0^\infty \bar{G}_1^{(\varepsilon)}(t)\bar{F}_2(t)dt\right) = \frac{1}{2}\left(M\alpha_1 + M\left(\alpha_2 \wedge \beta_1^{(\varepsilon)}\right)\right), \tag{9}$$

$$\int_X \rho^{(0)}(dx)\int_{E_-} m(y)P(x,dy) = \frac{1}{2}\int_0^\infty dy \int_0^y \bar{G}_2(z)dz \int_0^\infty g_1^{(\varepsilon)}(y+t) f_2(t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \bar{G}_2(z)dz \int_0^\infty \bar{G}_1^{(\varepsilon)}(z+t) f_2(t)dt. \tag{10}$$

Следовательно,

$$T_+ \approx \left(M\alpha_1 + M\left(\alpha_2 \wedge \beta_1^{(\varepsilon)}\right)\right) / P\left(\beta_1^{(\varepsilon)} > \alpha_2\right), \tag{11}$$

$$T_- \approx \int_0^\infty \bar{G}_2(z)dz \int_0^\infty \bar{G}_1^{(\varepsilon)}(z+t) f_2(t)dt / P\left(\beta_1^{(\varepsilon)} > \alpha_2\right), \tag{12}$$

$$K_\Gamma \approx \frac{M\alpha_1 + M\left(\alpha_2 \wedge \beta_1^{(\varepsilon)}\right)}{M\alpha_1 + M\left(\alpha_2 \wedge \beta_1^{(\varepsilon)}\right) + \int_0^\infty \bar{G}_2(z)dz \int_0^\infty \bar{G}_1^{(\varepsilon)}(z+t) f_2(t)dt}. \quad (13)$$

Слагаемое $M\left(\alpha_2 \wedge \beta_1^{(\varepsilon)}\right)$ мало в силу условия (4), поэтому формулы (11) и (13) примут следующий вид:

$$T_+ \approx M\alpha_1 / P\left(\beta_1^{(\varepsilon)} > \alpha_2\right), \quad (14)$$

$$K_\Gamma \approx \frac{M\alpha_1}{M\alpha_1 + \int_0^\infty \bar{G}_2(z)dz \int_0^\infty \bar{G}_1^{(\varepsilon)}(z+t) f_2(t)dt}. \quad (15)$$

Погрешность полученных приближенных формул. Для анализа погрешности приближенных формул (14), (12), (15) сравним их с точными формулами, полученными в [16]. Для этого рассмотрим случай, когда времена безотказной работы и восстановления элементов K_1 и K_2 описываются СВ, имеющими экспоненциальное распределение с плотностями $f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \lambda_i > 0,$ $g_i(t) = \mu_i e^{-\mu_i t}, \mu_i > 0, t \geq 0,$ $i = 1{,}2$. В [16] получены следующие точные формулы для данного случая:

$$T_+ = \frac{\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)+\lambda_1\mu_2(\lambda_1+\mu_2)+\lambda_1\mu_1(\lambda_2+\mu_2)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)(\mu_1+\mu_2)}, \quad (16)$$

$$T_- = \frac{1}{\mu_1+\mu_2}, \quad (17)$$

$$K_\Gamma = \frac{\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)+\lambda_1\mu_2(\lambda_1+\mu_2)+\lambda_1\mu_1(\lambda_2+\mu_2)}{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)+\mu_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2)+\lambda_1\mu_2(\lambda_1+\mu_2)+\lambda_1\mu_1(\lambda_2+\mu_2)}. \quad (18)$$

В этом случае приближенные формулы (14), (12), (15) принимают вид:

$$T_+ \approx \frac{\lambda_2+\mu_1}{\lambda_1\lambda_2}, \quad (19)$$

$$T_- \approx \frac{1}{\mu_1+\mu_2}, \quad (20)$$

$$K_\Gamma \approx \frac{(\mu_1+\mu_2)(\lambda_2+\mu_1)}{\lambda_1\lambda_2+(\mu_1+\mu_2)(\lambda_2+\mu_1)}. \quad (21)$$

Видно, что в рассматриваемом случае значение приближенной формулы (20) совпадает со значением точной формулы (17), поэтому не будем их рассматривать для оценки погрешности.

Замечание 1. Нетрудно убедиться, что в однородном случае значения точных формул (16)–(18) совпадают с приближенными (19)–(21), соответственно. Отметим, что для ДС с приоритетом, как правило, приоритетный элемент имеет большее время безотказной работы, а дублирующий элемент нужен как временное решение.

Для оценки погрешности приближенных формул рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Предположим, что $\lambda_1 = 0{,}01$, т. е. $M\alpha_1 = 100$ часов; $\lambda_2 = 0{,}0125$, т. е. $M\alpha_2 = 80$ часов; $\mu_2 = 0{,}1$, т. е. $M\beta_2 = 10$ часов. В Таблице 1 приведены результаты расчетов СХН по точным формулам (16), (18) и приближенным формулам (19), (21), указана их относительная погрешность.

Из Таблицы 1 видно, что с улучшением условий «быстрого» восстановления приоритетного элемента ошибка вычислений по приближенным формулам (19), (21) уменьшается и составляет около 2–3 %.

Таблица 1 – Погрешность приближенных формул (19), (21)
Table 1 – Error of approximate formulas (19), (21)

	μ_1	СХН	**Точные формулы (16), (18)**	**Приближенные формулы (19), (21)**	**Относительная погрешность, %**
$\lambda_1 = 1/300$ $\lambda_2 = 1/75$ $\mu_2 = 0{,}2$	0,2	T_+, ч. $K_Г$	4687,5 0,999467	4800,0 0,999479	2,4 0,001
	0,5	T_+, ч. $K_Г$	11406,7 0,999875	11550,0 0,999876	1,26 0,0002
	1	T_+, ч. $K_Г$	22516,6 0,999963	22800,0 0,999963	1,26 –
	2	T_+, ч. $K_Г$	44676.0 0,999990	45300.0 0,999990	1,4 –
$\lambda_1 = 1/400$ $\lambda_2 = 1/50$ $\mu_2 = 0{,}2$	0,2	T_+, ч. $K_Г$	4225,0 0,999409	4400,0 0,999432	4,14 0,002
	0,5	T_+, ч. $K_Г$	10247,1 0,999861	10400,0 0,999863	1,49 0,00021
	1	T_+, ч. $K_Г$	20177,1 0,999959	20400,0 0,999959	1,11 –
	2	T_+, ч. $K_Г$	39964,1 0,999989	40400,0 0,999989	1,09 –
$\lambda_1 = 1/400$ $\lambda_2 = 1/50$ $\mu_2 = 0{,}1$	0,2	T_+, ч. $K_Г$	4250,8 0,999216	4400,0 0,999243	3,51 0,00266
	0,5	T_+, ч. $K_Г$	10179,1 0,999836	10400,0 0,999840	2,17 0,00035
	1	T_+, ч. $K_Г$	19969,1 0,999954	20400,0 0,999955	2,16 0,0001
	2	T_+, ч. $K_Г$	39500,6 0,999988	40400,0 0,999988	2,28 –

Замечание 2. Приближенные формулы (14), (12), (15) позволяют выполнить расчет рассматриваемых СХН ДС с приоритетом для произвольных законов распределения случайных величин, описывающих функционирование их элементов, в отличие от формул, полученных в [16] при экспоненциальных распределениях.

Пример 2. В качестве примера использования полученных приближенных формул (14), (12), (15) рассмотрим электроснабжение загородного дома, состоящее из основного источника питания и резервного (например, дизель-генератора). Основной источник питания периодически выходит из строя, и предположим, что среднее время между его отказами составляет 2150 часов. Имеется дизель-генератор, который включается в случае отказа основного источника питания. Среднее время между отказами определяется имеющимся запасом топлива, пересчитанным в часы работы. Дизель-генератор считается вышедшим из строя либо из-за поломки, либо из-за нехватки топлива. В Таблице 2 представлены результаты расчетов с использованием приближенных формул (14), (12), (15) для различных распределений времени безотказной работы и времени восстановления основного источника питания и дизель-генератора при заданных значениях их математических ожиданий.

Таблица 2 – Приближенные стационарные характеристики надежности
Table 2 – Approximate stationary reliability characteristics

Мат. ожидание	Распределение	Параметры	Стационарные характеристики	Приближенные значения
$M\alpha_1 = 2150$ $M\beta_1 = 36$ $M\alpha_2 = 48$ $M\beta_2 = 8$	Рэлея Эрланга Вейбулла-Гнеденко Логнормальное	$\sigma = 1715{,}45$ $k = 4$; $\theta = 9$ $k = 2{,}3$; $\lambda = 54{,}2$ $\mu = 0{,}95$; $\sigma = 1{,}5$	T_+, ч. T_-, ч. $K_Г$	6435,59 4,42 0,999313
$M\alpha_1 = 2150$ $M\beta_1 = 24$ $M\alpha_2 = 48$ $M\beta_2 = 8$	Рэлея Эрланга Вейбулла-Гнеденко Логнормальное	$\sigma = 1715{,}45$ $k = 4$; $\theta = 6$ $k = 2{,}3$; $\lambda = 54{,}2$ $\mu = 0{,}95$; $\sigma = 1{,}5$	T_+, ч. T_-, ч. $K_Г$	12673,29 3,69 0,99971
$M\alpha_1 = 2150$ $M\beta_1 = 12$ $M\alpha_2 = 48$ $M\beta_2 = 8$	Рэлея Эрланга Вейбулла-Гнеденко Логнормальное	$\sigma = 1715{,}45$ $k = 4$; $\theta = 3$ $k = 2{,}3$; $\lambda = 54{,}2$ $\mu = 0{,}95$; $\sigma = 1{,}5$	T_+, ч. T_-, ч. $K_Г$	52370,26 2,6 0,99995
$M\alpha_1 = 2150$ $M\beta_1 = 36$ $M\alpha_2 = 48$ $M\beta_2 = 8$	Вейбулла-Гнеденко Рэлея Вейбулла-Гнеденко Эрланга	$k = 2{,}5$; $\lambda = 2423{,}18$ $\sigma = 28{,}72$ $k = 1{,}5$; $\lambda = 53{,}17$ $k = 4$, $\theta = 2$	T_+, ч. T_-, ч. $K_Г$	5273,75 6,85 0,998702
$M\alpha_1 = 2150$ $M\beta_1 = 24$ $M\alpha_2 = 48$ $M\beta_2 = 8$	Вейбулла-Гнеденко Рэлея Вейбулла-Гнеденко Эрланга	$k = 2{,}5$; $\lambda = 2423{,}18$ $\sigma = 19{,}1492$ $k = 1{,}5$; $\lambda = 53{,}17$ $k = 4$; $\theta = 2$	T_+, ч. T_-, ч. $K_Г$	8174,17 6,22 0,999240
$M\alpha_1 = 2150$ $M\beta_1 = 12$ $M\alpha_2 = 48$ $M\beta_2 = 8$	Вейбулла-Гнеденко Рэлея Вейбулла-Гнеденко Эрланга	$k = 2{,}5$; $\lambda = 2423{,}18$ $\sigma = 9{,}5746$ $k = 1{,}5$; $\lambda = 53{,}17$ $k = 4$; $\theta = 2$	T_+, ч. T_-, ч. $K_Г$	19912,81 4,72 0,999763

Из Таблицы 2 видно, что распределения времен безотказной работы и восстановления элементов существенно влияют на среднее стационарное время безотказной работы и среднее стационарное время восстановления при заданных значениях их математических ожиданий, что подчеркивает практическую значимость полученных приближенных формул (14), (12), (15).

Вероятность безотказной работы. Пусть τ_x – время пребывания ПМП $\xi(t)$ в подмножестве работоспособных состояний E_+ при условии, что $\xi(0) = x, x \in E_+$.

Определение. $F(t,x) = P(\tau_x > t)$ называется вероятностью безотказной работы (ВБР) системы S на промежутке $[0,t)$ [1].

В [1] получены предельные теоремы типа фазового укрупнения, которые позволяют приближенно находить ВБР. Воспользуемся ними для рассматриваемой дублированной системы с приоритетом в предположении, что выполнены условия I–III и условие «быстрого» восстановления (4) приоритетного элемента.

Тогда, согласно [1], имеет место приближенное равенство:

$$P(\tau_x > t) \approx e^{-\Lambda_{(\varepsilon)} t}, \tag{22}$$

где

$$\Lambda_{(\varepsilon)} = q/\widehat{m}, \tag{23}$$

причем

$$q = \int_{E_+} P(x, E_-)\rho^{(0)}(dx)\,,\ \widehat{m} = \int_{E_+} m(x)\rho^{(0)}(dx), \tag{24}$$

$m(x)$ – среднее время пребывания в состоянии x исходной системы.

Опорная система S_0 остается прежней, значения q и $\widehat{m}$ были найдены ранее и определяются формулами (8), (9):

$$q = \frac{1}{2}P\left(\beta_1^{(\varepsilon)} > \alpha_2\right),\ \widehat{m} = \frac{1}{2}\left(M\alpha_1 + M\left(\alpha_2 \wedge \beta_1^{(\varepsilon)}\right)\right).$$

Следовательно, ВБР рассматриваемой системы, учитывая условие (4), можно приближенно вычислить по формуле (22), где

$$\Lambda_{(\varepsilon)} = P\left(\beta_1^{(\varepsilon)} > \alpha_2\right)/M\alpha_1. \tag{25}$$

В Таблице 3 приведены значения ВБР, рассчитанные по формуле (22) с (25), ДС с приоритетом при соблюдении условий $M\alpha_1 =$1500 ч., $M\alpha_2 =$48 ч., $M\beta_1 = 36$ ч., $M\beta_2 = 12$ ч. и следующих распределениях:

1. СВ α_1 имеет распределение Эрланга 5-го порядка ($k = 5$) с параметром $\lambda = 300$; СВ α_2 имеет распределение Рэлея с параметром $\sigma = 38{,}3$; СВ β_1 имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с параметрами $k = 1{,}5$ и $\lambda = 39{,}88$; СВ β_2 имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с параметрами $k = 2{,}1$ и $\lambda = 13{,}55$. В этом случае $T_+ \approx 4255{,}79$ ч., $T_- \approx 9{,}44$ ч., $K_\Gamma \approx 0{,}997788$.

2. СВ α_1 имеет распределение Рэлея с параметром $\sigma = 1196{,}83$; СВ α_2 имеет распределение Эрланга 4-го порядка ($k = 4$) с параметром $\lambda = 12$; СВ β_1 имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с параметрами $k = 2{,}5$ и $\lambda = 40{,}57$; СВ β_2 имеет нормальное распределение с параметрами $a = 12$ и $\sigma = 2$. В этом случае $T_+ \approx 4214{,}95$ ч., $T_- \approx 9{,}14$ ч., $K_\Gamma \approx 0{,}997835$.

3. СВ α_1 имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}0007$; СВ α_2 имеет распределение Рэлея с параметром $\sigma = 38{,}3$; СВ β_1 имеет распределение Эрланга 4-го порядка ($k = 4$) с параметром $\lambda = 9$; СВ β_2 имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с параметрами $k = 1{,}7$ и $\lambda = 13{,}45$. В этом случае $T_+ \approx 4219{,}42$ ч., $T_- \approx 8{,}8$ ч., $K_\Gamma \approx 0{,}997919$.

4. СВ α_1 имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с параметрами $k = 1{,}75$ и $\lambda = 1684{,}22$; СВ α_2 имеет распределение Рэлея с параметром $\sigma = 38{,}3$; СВ β_1 имеет

нормальное распределение с параметрами $a = 36$ и $\sigma = 4$; СВ β_2 имеет распределение Вейбулла-Гнеденко с параметрами $k = 2{,}5$ и $\lambda = 13{,}53$. В этом случае $T_+ \approx 4195{,}39$ ч., $T_- \approx 8{,}48$ ч., $K_\Gamma \approx 0{,}997982$.

5. СВ α_1 имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}0007$; СВ α_2 имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}0208$; СВ β_1 имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}0278$; СВ β_2 показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}0833$. В этом случае равны $T_+ \approx 3500$ ч., $T_- \approx 9$ ч., $K_\Gamma \approx 0{,}997435$.

Таблица 3 – Вероятность безотказной работы дублированной системы с приоритетом
Table 3 – Probability of failure-free operation of a duplicated system with priority

Вероятность безотказной работы					
Время, ч.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
500	0,88915	0,88814	0,88825	0,88765	0,86688
750	0,83843	0,83699	0,83715	0,83630	0,80712
1000	0,79060	0,78879	0,78899	0,78792	0,75148
1250	0,74549	0,74337	0,74360	0,74234	0,69968
1500	0,70296	0,70056	0,70082	0,69940	0,65144
2000	0,62504	0,62220	0,62251	0,62082	0,56472
3000	0,49415	0,49079	0,49115	0,48915	0,42438
4000	0,39067	0,38713	0,38752	0,38541	0,31891
5000	0,30887	0,30536	0,30575	0,30367	0,23966

Заключение

В статье получены новые формулы, которые позволяют приближенно вычислять характеристики надежности ДС с приоритетом. Оценена их погрешность в сравнении с точными и известными результатами для различных распределений времени безотказной работы и времени восстановления элементов. Показано, что при улучшении условия «быстрого» восстановления приоритетного элемента ошибка вычислений по приближенной формуле (14) уменьшается и составляет около 2–3 %, в то время как (12), (15) совпадают с точными результатами. При этом формулы (14), (12), (15) позволяют рассчитать СХН при распределениях общего вида, что позволяет использовать их на практике для инженерных расчетов и анализа надежности на этапах проектирования, разработки и эксплуатации радиотехнических, информационных, энергетических, производственных и других технических систем с приоритетным элементом.

В дальнейшем планируется разработка математической модели и численное исследование характеристик надежности систем, в которых отказы и восстановление элементов могут быть коррелированы, что свойственно, например, системам с общими ресурсами.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Королюк В.С., Турбин А.Ф. *Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем*. Киев: Наук. думка; 1982. 236 с.
2. Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. *Stochastic Models of Systems*. Dordrecht: Springer Science+Business Media; 1999. 185 p. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4625-8
3. Корлат А.Н., Кузнецов В.Н., Новиков М.М., Турбин А.Ф. *Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания*. Кишинев: Штиинца; 1991. 275 с.

4. Obzherin Yu.E., Boyko E.G. *Semi-Markov Models: Control of Restorable Systems with Latent Failures*. London: Elsevier Academic Press; 2015. 214 p. https://doi.org/10.1016/C2014-0-02226-5
5. Gnedenko B.V., Ushakov I.A. *Probabilistic Reliability Engineering*. New York: John Wiley & Sons; 1995. 518 p.
6. Ushakov I.A. *Probabilistic Reliability Models*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2012. 250 p.
7. Obzherin Yu.E., Sidorov S.M. Semi-Markov Model of a Duplicated System with Loaded Redundancy and Limited Recovery. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*. 2025;32(6). https://doi.org/10.1142/S0218539325500433
8. Grabski F. *Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance*. Amsterdam: Elsevier Science; 2014. 270 p.
9. Nakagawa T. Two-Unit Redundant Models. In: *Stochastic Models in Reliability and Maintenance*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2002. P. 165–191. https://doi.org/10.1007/978-3-540-24808-8_7
10. Zhang Y.L., Wang G.J. A deteriorating cold standby repairable system with priority in use. *European Journal of Operational Research*. 2007;183(1):278–295. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.09.075
11. Yuan L., Meng X.-Yu. Reliability analysis of a warm standby repairable system with priority in use. *Applied Mathematical Modelling*. 2011;35(9):4295–4303. https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.03.002
12. Pundir P.S., Patawa R., Gupta P.K. Stochastic outlook of two non-identical unit parallel system with priority in repair. *Cogent Mathematics & Statistics*. 2018;5(1). https://doi.org/10.1080/25742558.2018.1467208
13. Takemoto Y., Arizono I. A study of MTTF in two-unit standby redundant system with priority under limited information about failure and repair times. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*. 2015;230(1):67–74. https://doi.org/10.1177/1748006X15584235
14. Kumar N., Malik S.C., Nandal N. Stochastic analysis of a repairable system of non-identical units with priority and conditional failure of repairman. *Reliability: Theory and Applications*. 2022;17(1). https://doi.org/10.24412/1932-2321-2022-167-123-133
15. Wang J., Xie N., Yang N. Reliability analysis of a two-dissimilar-unit warm standby repairable system with priority in use. *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 2019;50(4):792–814. https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1642488
16. Обжерин Ю.Е., Сидоров С.М. Модель дублированной системы с приоритетным блоком. *Математические методы в технологиях и технике*. 2025;(6):43–47.
    Obzherin Yu.E., Sidorov S.M. Duplicated system model with a priority unit. *Mathematical Methods in Technology and Technology*. 2025;(6):43–47. (In Russ.).
17. Обжерин Ю.Е., Сидоров С.М., Никитин М.М. Анализ надежности и фазовое укрупнение систем с поэлементными накопителями. *Известия Российской академии наук. Энергетика*. 2019;(6):66–77. https://doi.org/10.1134/S0002331019050108
    Obzherin Yu.E., Sidorov S.M., Nikitin M.M. Analysis of reliability and phase merging of systems with component-wise storages. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*. 2019;(6):66–77. (In Russ.). https://doi.org/10.1134/S0002331019050108
18. Соловьев А.Д. Резервирование с быстрым восстановлением. *Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика*. 1970;(1):56–71.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Сидоров Станислав Михайлович, кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики, МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Российская Федерация.
e-mail: xaevec@mail.ru
ORCID: 0000-0002-9785-9182

Stanislav M. Sidorov, Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor at the Applied Mathematics Department, MIREA – Russian Technological University, Moscow, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 30.03.2026; одобрена после рецензирования 25.05.2026; принята к публикации 18.06.2026.

The article was submitted 30.03.2026; approved after reviewing 25.05.2026; accepted for publication 18.06.2026.