

УДК 004.4+004.94+539.3

DOI: [10.26102/2310-6018/2026.58.7.015](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2026.58.7.015)

Численное моделирование одномерных волновых процессов в разномодульной среде: программная реализация и анализ сходимости

В.А. Полеся[✉], О.В. Дудко, А.А. Лаптева

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Российская Федерация

Резюме. Современная механика деформируемого твердого тела активно развивается в направлении моделирования разномодульных материалов – сред, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию. Этот класс охватывает природные и искусственные материалы, широко применяемые в инженерной практике. Различие модулей упругости при растяжении и сжатии приводит к сильной нелинейности механического отклика, что в случаях динамического нагружения порождает качественно сложные волновые картины с образованием и взаимодействием разрывов деформаций. Как следствие, аналитическое решение соответствующих краевых задач становится достаточно сложным из-за множественных взаимодействий волновых фронтов. В статье представлены разработка, программная реализация и верификация специализированного средства автоматизированного решения краевых задач одномерной динамики разномодульных упругих сред при произвольных режимах граничного воздействия. В его основу положен формализованный итерационный метод построения волновой картины, использующий кусочно-линейную аппроксимацию граничных условий и определяющих соотношений разномодульной среды Мясникова-Олейникова. Программное средство полностью автоматизирует построение волновой картины: отслеживает эволюцию системы волн, классифицирует события, автоматически формирует и решает системы нелинейных уравнений для определения параметров новых локальных областей между волновыми фронтами, а также контролирует эволюционность разрывов деформаций и добавление жестких слоев. Верификация выполнена на тестовых задачах с формированием ударных волн и жестких слоев. Анализ сходимости полученных результатов к известным аналитическим решениям подтверждает высокую точность реализованного метода при увеличении числа узлов аппроксимации граничного условия. Таким образом, разработанное программное средство является эффективным инструментом для автоматизации исследований волновых процессов, обеспечивающим физически корректное моделирование одномерного динамического деформирования разномодульных материалов. Полученные результаты имеют практическую ценность для исследователей в области механики деформируемого твердого тела, специалистов по численному моделированию, а также инженеров, занимающихся проектированием конструкций из разномодульных материалов при динамических воздействиях.

Ключевые слова: разномодульная упругая среда, одномерные волны деформаций, краевая задача, кусочно-линейная аппроксимация, эволюционность разрывов, ударные волны, жесткие слои, численное моделирование, автоматизация расчетов, анализ сходимости.

Для цитирования: Полеся В.А., Дудко О.В., Лаптева А.А. Численное моделирование одномерных волновых процессов в разномодульной среде: программная реализация и анализ сходимости. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2026;14(7). URL: <https://moitvvt.ru/journal/article?id=2394> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.58.7.015

Numerical modeling of one-dimensional wave processes in a bimodular medium: software implementation and convergence analysis

V.A. Polesia[✉], O.V. Dudko, A.A. Lapteva

Far Eastern Federal University, Vladivostok, the Russian Federation

Abstract. Modern mechanics of deformable solids is actively advancing towards modeling bimodular materials – media with different resistance to tension and compression. This class includes both natural and artificial materials widely used in engineering practice. The difference in elastic moduli under tension and compression leads to a strong nonlinearity of the mechanical response, which under dynamic loading generates qualitatively complex wave patterns with the formation and interaction of strain discontinuities. As a result, the analytical solution of the corresponding boundary value problems becomes quite challenging due to numerous wavefront interactions. This paper presents the development, software implementation, and verification of a specialized system for the automated solution of boundary value problems of one-dimensional dynamics of bimodular elastic media under arbitrary boundary loading regimes. The system is based on a formalized iterative method for constructing the wave pattern, which uses piecewise-linear approximation of both the boundary conditions and the constitutive relations of the Myasnikov-Oleynikov bimodular medium. The software fully automates the construction of the wave pattern: it tracks the evolution of the wave system, classifies events, automatically generates and solves systems of nonlinear equations to determine the parameters of new local domains between wavefronts, and controls the evolutionarity of strain discontinuities and introduction of rigid layers. Verification was performed on test problems involving the formation of shock waves and rigid layers. A convergence analysis of the results against known analytical solutions confirms the high accuracy of the implemented method with an increasing number of boundary condition approximation nodes. Thus, the developed software tool is an effective instrument for automating the study of wave processes, providing physically correct modeling of the one-dimensional dynamic deformation of bimodular materials. The results obtained are of practical value to researchers in solid mechanics, specialists in numerical modeling, and engineers involved in the design of structures made of bimodular materials under dynamic loads.

Keywords: bimodular elastic medium, one-dimensional strain waves, boundary value problem, piecewise-linear approximation, evolutionarity of discontinuities, shock waves, rigid layers, numerical modeling, automation of calculations, convergence analysis.

For citation: Polesia V.A., Dudko O.V., Lapteva A.A. Numerical modeling of one-dimensional wave processes in a bimodular medium: software implementation and convergence analysis. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2026;14(7). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/journal/article?id=2394> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.58.7.015

Введение

Исследование динамики разномодульных материалов с различным сопротивлением растяжению и сжатию является важным и перспективным направлением механики деформируемого твердого тела. Свойством разномодульности обладают многие природные и конструкционные материалы, широко применяемые в инженерной практике: горные породы [1], грунты [2], различные композиты [3, 4], металлические сплавы [5] и др. Для математического описания деформационного поведения разномодульных сред предложен целый ряд подходов, в том числе модели с различными упругими константами для растяжения и сжатия [6], функциональными зависимостями упругих модулей от напряженного состояния [7], негладкими упругими потенциалами [8], особыми элементами в реологических схемах [9] и т. д. В основе данной работы лежит модель Мясникова-Олейникова [8], где определяющие

соотношения в одномерном случае принимают вид кусочно-линейной связи между напряжениями и деформациями с особенностью в точке свободного состояния. Эта нелинейность приводит к принципиальному эффекту: скорости распространения малых возмущений при растяжении и сжатии становятся различными.

При динамическом нагружении в разномодульной среде формируются волны двух различных семейств (условно, «растягивающие» и «сжимающие»), скорость которых зависит от знака деформации [10, 11]. Взаимодействие этих волн, их столкновение и отражение от границ среды порождают сложно эволюционирующую волновую картину с динамическим полем деформаций [12, 13], разделенным волновыми фронтами на локальные зоны. Физическая корректность таких волновых картин требует выполнения условий эволюционности (устойчивости) на каждом фронте разрыва деформаций [11], что может приводить к необходимости введения в решение «жестких слоев» (локальных зон с идеальной жесткостью) [14]. В результате даже для одномерных задач аналитическое построение полной волновой картины при произвольных граничных условиях становится чрезвычайно трудоемким. Процесс ручного отслеживания последовательности волновых событий, решения множества систем модельных уравнений относительно параметров новых областей с непрерывным контролем эволюционности волновых фронтов часто приводит к ошибкам и практически неприменим для сложных режимов нагружения [15].

Универсальные численные методы (например, методы конечных элементов и конечных разностей) не могут физически корректно описать взаимодействие движущихся волн деформаций в подобных нелинейных средах. Поэтому перспективным является подход [12], использующий структурную особенность модели – ее кусочно-линейность. Как показала апробация этого подхода в программном прототипе¹, он позволяет строить решение задачи как последовательность точных локальных решений с взаимодействующими линейными волнами при простых режимах нагружения [12]. Однако отсутствие законченных программных средств, полностью автоматизирующих этот формализм, от обнаружения событий до контроля эволюционности, сдерживает его широкое применение в исследовательской практике.

Таким образом, разработка программного инструмента, реализующего автоматизированную модификацию метода [12], является актуальной задачей. Такой инструмент позволит исключить рутинные операции и сосредоточиться на анализе результатов.

Цель настоящей работы – разработка, программная реализация и верификация специализированного программного средства для автоматизированного решения краевых задач одномерной динамики разномодульных упругих сред при произвольных кусочно-линейных граничных воздействиях.

Для достижения цели поставлены следующие задачи:

1. Реализация алгоритма итерационного построения волновой картины с автоматической классификацией событий (столкновение волн, отражение от границы, изменение граничного условия).

2. Реализация численных методов решения нелинейных систем уравнений для определения параметров (деформации, скорости, напряжения) в новых областях, возникающих после каждого волнового события.

¹ Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024687947 Российская Федерация. *VIM-dynamics* - программа для поддержки научных исследований динамики одномерных деформаций разномодульных упругих сред: № 2024687077: заявл. 11.11.2024; опубл. 22.11.2024 / О.В. Дудко, В.А. Полеся, А.А. Лаптева; заявитель Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук.

3. Создание механизма автоматического контроля эволюционности разрывов и корректировки решения путем введения жестких слоев.
4. Обеспечение визуализации результатов и проведение анализа сходимости решения при увеличении детализации аппроксимации граничных условий.

Материалы и методы

Модель динамики деформирования разномодульной упругой среды. Рассматривается одномерная задача о распространении плоских волн деформаций в упругом полупространстве $x \geq 0$ при $t \geq 0$, где x – координата точки среды (м), t – время (с). Определяются функции $u(x, t)$, $v(x, t) = \partial u(x, t) / \partial t = \dot{u}(x, t)$ – перемещение (м) и скорость перемещения точки среды (м/с), $e(x, t) = \partial u(x, t) / \partial x = u_x(x, t)$ – деформация (безразмерная величина).

Одномерные движения точек разномодульной изотропно-упругой среды при ее одноосном динамическом деформировании описывает уравнение

$$(c(e))^2 u_{xx}(x, t) = \ddot{u}(x, t),$$

$$c(e) = \begin{cases} a = \sqrt{(\lambda + 2\mu + 2\nu)/\rho} & \text{при } e < 0 \text{ (сжатие)}, \\ b = \sqrt{(\lambda + 2\mu - 2\nu)/\rho} & \text{при } e > 0 \text{ (растяжение)}, \\ 0 & \text{при } e = 0 \text{ (недеформированное состояние)}, \end{cases} \quad (1)$$

где кусочно-линейная форма характеристической скорости $c(e)$ (м/с) следует из определяющих соотношений трехконстантного варианта модели Мясникова-Олейникова [8]. Упругие модули λ, μ (ГПа) соответствуют линейной части модели [8], ν – коэффициент разномодульности (ГПа) (при $\nu = 0$ среда [8] становится линейно-упругой), ρ – плотность среды (кг/м³).

Решение уравнения движения (1) при определенных краевых условиях может иметь разрывы – скачки производных функции перемещения $u(x, t)$. На каждом фронте сильного разрыва (скачке первых производных) с координатой $x = S(t)$ должны выполняться условие непрерывности перемещений и условие совместности разрывов [10, 11]:

$$u^+(S, t) = u^-(S, t), \quad (c^+)^2 e^+ - (c^-)^2 e^- = \dot{S}^2 (e^+ - e^-). \quad (2)$$

Индексами «+» и «-» в (2) и далее обозначены величины в малых окрестностях впереди и позади фронта $x = S(t)$.

Постановка начально-краевой задачи. Начальные и граничные условия (ГУ) задаются в перемещениях:

$$u(x, 0)|_{x \geq 0} = 0, \quad \dot{u}(x, 0)|_{x \geq 0} = 0, \quad u(0, t)|_{t \geq 0} = f(t), \quad (3)$$

где $f(t)$ – кусочно-линейная функция граничного перемещения, определяемая набором узлов $\{(t_j, u_j): j = 0, 1, \dots, n, 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n\}$. На каждом интервале времени $[t_j, t_{j+1}]$ функция $f(t)$ линейна: $f(t)|_{t \in [t_j, t_{j+1}]} = u_j + k_j(t - t_j)$, коэффициенты $k_j = (u_{j+1} - u_j) / (t_{j+1} - t_j)$ задают скорость перемещения границы полупространства.

Структура решения. Решение начально-краевой задачи представляется в виде волновой картины $W(t)$ – совокупности волновых фронтов и локальных решений:

$$W(t) = \left\{ \{x_k(t)\}_{k=1}^{N(t)}, \{u_i(x, t)\}_{i=0}^{N(t)} \right\}, \quad (4)$$

где $x_k(t)$ – координата k -го волнового фронта, $u_i(x, t)$ – локальное решение в i -ой зоне непрерывных деформаций, $N(t)$ – число фронтов в момент времени t .

Координата движущегося волнового фронта $x_k(t)$ в произвольный момент времени t определяется как

$$x_k(t) = X_k + \dot{x}_k(t - \tau_k), \quad t \geq \tau_k, \quad (5)$$

где X_k – начальная координата, $\dot{x}_k$ и τ_k – постоянная скорость фронта и время его возникновения. В зависимости от знаков деформаций e^- и e^+ по обе стороны от $x_k(t)$ различают три типа фронтов сильных разрывов [10]: полусигнотон ($e^+ = 0, e^- \neq 0$ или $e^+ \neq 0, e^- = 0$), простой разрыв ($\text{sgn}(e^+) = \text{sgn}(e^-)$) и ударная волна ($e^+ > 0, e^- < 0$ при $a > b$ в (1)). Полусигнотоны сжатия и растяжения для удобства в статье обозначены как γ^a, γ^b соответственно.

Локальное решение $u_i(x, t)$ в зоне между двумя соседними фронтами записывается в форме [12]:

$$u_i(x, t) = A_i + B_i(t - \tau_i) + C_i \cdot x, \quad (x, t) \in \delta_i(t), \quad (6)$$

где A_i – начальное значение перемещения при $t = \tau_i$ (м), B_i – скорость перемещения (м/с), C_i – деформация в i -ой зоне (безразмерная величина), τ_i – время возникновения локального решения (с), $\delta_i(t) = [x_l^{(i)}(t), x_r^{(i)}(t)]$ – интервал определения локального решения с подвижными или неподвижными границами $x_l^{(i)}, x_r^{(i)}$ (левой и правой соответственно).

Фронт сильного разрыва $x(t)$ существует, если для него выполняется условие эволюционности [11], которое можно записать в форме:

$$c(e^+) \leq |\dot{x}_k| \leq c(e^-). \quad (7)$$

Неэволюционные фронты заменяются растущим жестким слоем [14] – парой полусигнотонов $[\gamma^b, \gamma^a]$ с недеформированной областью между ними.

Алгоритм решения краевой задачи. Задача решается итерационным методом [12], основанным на последовательном построении волновой картины. Базовый алгоритм [12] приведен в максимально формализованную форму, готовую для программной реализации. На каждой итерации выполняются три основных этапа.

Этап 1. Определение события. Цель – определить причину появления нового локального решения $u_i(t)$ и момент его возникновения.

Рассматриваются три типа событий:

- 1) ω_1 – столкновение двух волновых фронтов;
- 2) ω_2 – падение волны на границу полупространства $x = 0$;
- 3) ω_3 – изменение граничного условия.

Для каждого интервала $\delta^{(k)} = [x_k(t), x_{k+1}(t)]$ между соседними фронтами-границами проверяется условие сужения: $|\delta^{(k)}(t)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Интервал сужается и исчезает при столкновении (ω_1), если:

- 1) границы интервала движутся навстречу: $\dot{x}_k > 0, \dot{x}_{k+1} < 0$;
- 2) обе границы движутся вправо, левая быстрее: $\dot{x}_k > \dot{x}_{k+1} > 0$;
- 3) обе границы движутся влево, правая быстрее: $\dot{x}_k < \dot{x}_{k+1} < 0$.

Время конкретного события вычисляется из условия равенства координат взаимодействующих фронтов (границ) при $t = \tau_i$:

$$\begin{aligned}\omega_1: \tau_i &= \frac{X_{k+1} - X_k + \dot{x}_k \tau_l - \dot{x}_{k+1} \tau_{k+1}}{\dot{x}_k - \dot{x}_{k+1}}, \\ \omega_2: \tau_i &= \tau_1 - \frac{X_1}{\dot{x}_1}, \\ \omega_3: \tau_i &= t_j.\end{aligned}\quad (8)$$

Для определения причины возникновения нового локального решения $u_i(x, t)$ на текущей волновой картине строится множество $\theta_i = \{(\delta^{(k)}(t); \theta^{(k)}; \tau^{(k)})\}$ всех потенциальных событий $\theta^{(k)} \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, из которого выбирается элемент с минимальным временем наступления $\tau_i = \min\{\tau^{(k)}\}$.

Этап 2. Решение системы нелинейных уравнений. Цель – определить параметры нового локального решения $u_i(x, t)$ в форме (6).

Параметры смежных с ним решений u_L (слева) и u_R (справа) определяются в зависимости от типа события. Для столкновения волн (ω_1) это локальные решения по обе стороны сужающегося интервала. Для падения на границу (ω_2) и изменения граничного условия (ω_3) левое решение определяется по актуальной части функции $f(t)$: $A_L = u_j$, $B_L = k_j$, $C_L = 0$.

При ω_1 начальной координатой X_i нового решения является координата столкновения фронтов, при ω_2 и ω_3 – граница полупространства $X_i = 0$.

Условия непрерывности перемещений (2) на границах нового решения с учетом (6) записываются соотношениями [12]:

$$A_L + B_L(\tau_i - \tau_L) + C_L X_i = A_i + C_i X_i = A_R + B_R(\tau_i - \tau_R) + C_R X_i, \quad (9)$$

$$B_i + C_i \dot{x}_l^{(i)} = B_L + C_L \dot{x}_l^{(i)}, \quad (10)$$

$$B_i + C_i \dot{x}_r^{(i)} = B_R + C_R \dot{x}_r^{(i)}. \quad (11)$$

Скорости границ связаны с деформациями через динамические условия совместности [11] в форме [12]:

$$(\dot{x}_l^{(i)})^2 = \frac{(c(C_L))^2 \cdot C_L - (c(C_i))^2 \cdot C_i}{C_L - C_i}, \quad (\dot{x}_r^{(i)})^2 = \frac{(c(C_R))^2 \cdot C_R - (c(C_i))^2 \cdot C_i}{C_R - C_i}. \quad (12)$$

Решение системы нелинейных уравнений (9)–(11) строится численно:

- методом Ньютона – для быстрой сходимости при гладких функциях;
- методом бисекции – для надежного нахождения корня при негладкости.

Этап 3. Корректировка решения. Цель – проверить эволюционность волновых фронтов и обновить волновую картину.

Для каждой границы нового решения проверяется условие эволюционности (7). Неэволюционная граница $x(t) = X + \dot{x}(t - \tau)$ подлежит замене на жесткий слой $[\gamma^b, \gamma^a]$ [14], границы которого имеют равные с $x(t)$ параметры X и τ . Корректировка выполняется следующим образом:

1) вместо $x(t)$ в волновую картину вводятся два попутных полусигнотона: медленный $\gamma^b = X + \dot{\gamma}^b(t - \tau)$ со скоростью $|\dot{\gamma}^b| = b$ и быстрый $\gamma^a = X + \dot{\gamma}^a(t - \tau)$ со скоростью $|\dot{\gamma}^a| = a$;

2) на интервале $[\gamma^b, \gamma^a]$ вводится решение $u_{rigid} = A_{rigid} + B_{rigid}(t - \tau)$, $C_{rigid} = 0$;

3) система уравнений (9)–(11) перестраивается и заново решается с учетом жесткого слоя.

После корректировки обновляется волновая картина $W^{(i)}(t)$:

- 1) при столкновении волн (ω_1) удаляются фронты-участники события и локальное решение на сужающемся интервале;
- 2) добавляются новые локальные решения и соответствующие волновые фронты;
- 3) фронты сортируются по координате.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока множество событий не станет пустым ($\Theta_i = \emptyset$), что означает завершение эволюции волновой картины.

Программная реализация. Разработанное программное средство полностью автоматизирует описанный алгоритм и включает следующие компоненты:

- модуль задания и валидации граничных условий;
- модуль построения и отслеживания волновой картины;
- модуль численного решения нелинейных уравнений;
- модуль контроля эволюционности и введения жестких слоев;
- модуль визуализации результатов.

Программное средство позволяет исследовать эволюцию волновых процессов при произвольных параметрах материала (λ, μ, ν, ρ) и произвольном количестве и положении узлов кусочно-линейной функции граничного перемещения $f(x)$.

Результаты

Для апробации разработанного программного средства моделирования волновых процессов в разномодульных упругих средах проведены вычислительные эксперименты с различными режимами граничного нагружения. В качестве модельного материала использовалась разномодульная среда с параметрами $\rho = 7600$ кг/м³, $\lambda = 19,8$ ГПа, $\mu = 26,9$ ГПа, $\nu = 15,3$ ГПа [8]. Характеристические скорости при этом составили: $a = 3702,77$ м/с для волн сжатия, $b = 2378,63$ м/с для волн растяжения.

На всех графиках с граничными условиями и результатами вычислительных экспериментов для гладких функций используется красный цвет, для соответствующих им кусочно-линейных аппроксимаций (заданных или вычисленных) – синий.

Режим I: единственный импульс граничного растяжения-сжатия с формированием ударной волны. Рассмотрен режим знакопеременного нагружения, когда полупространство сначала подвергается растяжению, затем при $t = 0,0015$ с начинается сжатие.

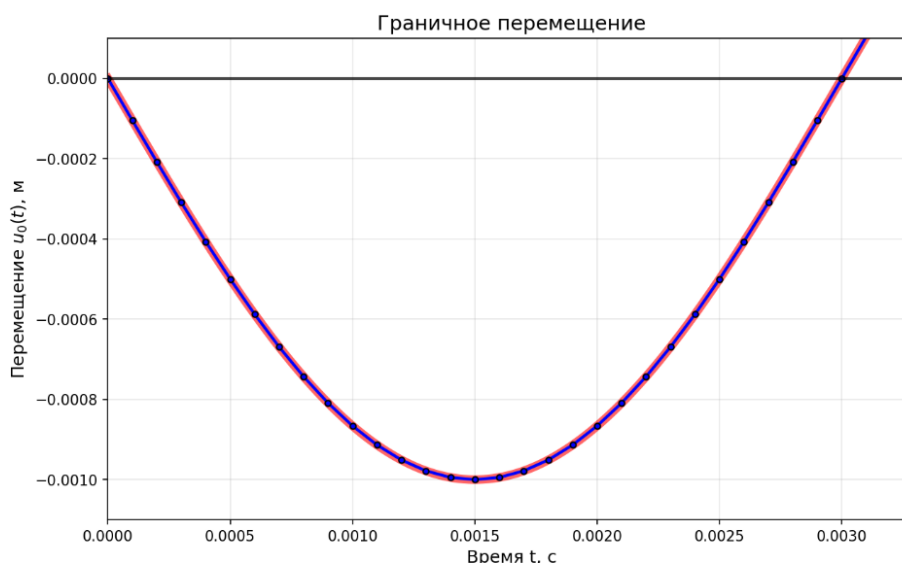


Рисунок 1 – Граничное условие для режима «растяжение-сжатие»

Figure 1 – Boundary condition for the tension-compression mode

В момент времени $t = 0,0015$ с происходит формирование ударной волны, на которой деформация скачкообразно меняет знак с положительного на отрицательный. На Рисунке 1 представлен график граничного перемещения, соответствующий описанному режиму. Красной линией отмечена гладкая функция граничного перемещения [14], синей – ее кусочно-линейная аппроксимация с 30 узлами.

При заданном режиме движения границы (Рисунок 1) в момент времени $t = 0,0023$ с получены результаты решения краевой задачи в виде графиков перемещений и деформаций. На Рисунке 2 представлен график перемещения $u(x, t)$ в момент времени t . На Рисунке 3 представлен график деформаций в момент времени t , где вычисленное поле $e(x, t)$ представляет собой ступенчатую функцию.

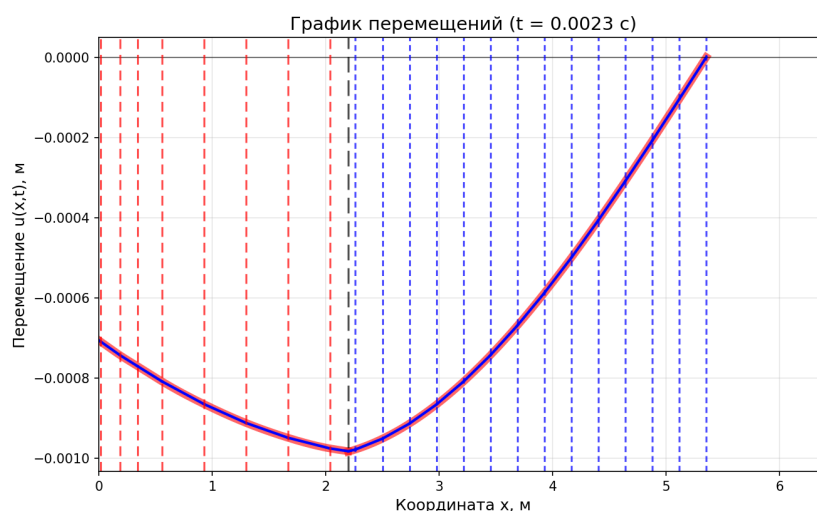


Рисунок 2 – График перемещений для режима «растяжение-сжатие»
Figure 2 – Displacement graph for the tension-compression mode

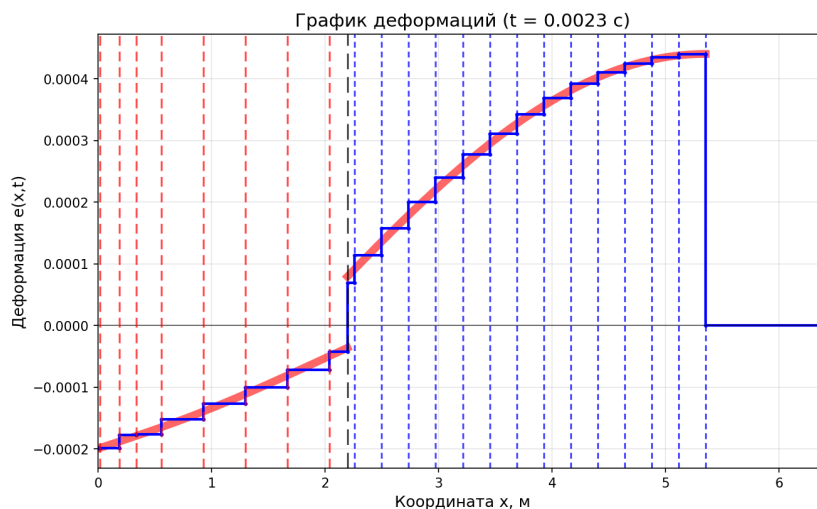


Рисунок 3 – График деформаций для режима «растяжение-сжатие»
Figure 3 – Deformation graph for the tension-compression mode

Вертикальными пунктирными линиями на Рисунках 2, 3 и на дальнейших графиках перемещений и деформаций обозначены волновые фронты: синим цветом помечены медленные фронты растяжения со скоростью b , красным – быстрым фронты сжатия со скоростью a . Черная пунктирная линия соответствует ударной волне, возникающей в момент изменения режима с растяжения на сжатие.

Режим 2: единичный импульс граничного сжатия-растяжения с формированием жесткого слоя. На Рисунке 4 представлено кусочно-линейное граничное условие с 30 узлами и гладкая функция аналогичного режима для аналитического решения [14]. В этом случае полупространство сначала подвергается сжатию, затем с момента времени $t = 0,0015$ с начинается растяжение. При $t = 0,0015$ с происходит формирование жесткого слоя $[\gamma^b, \gamma^a]$.

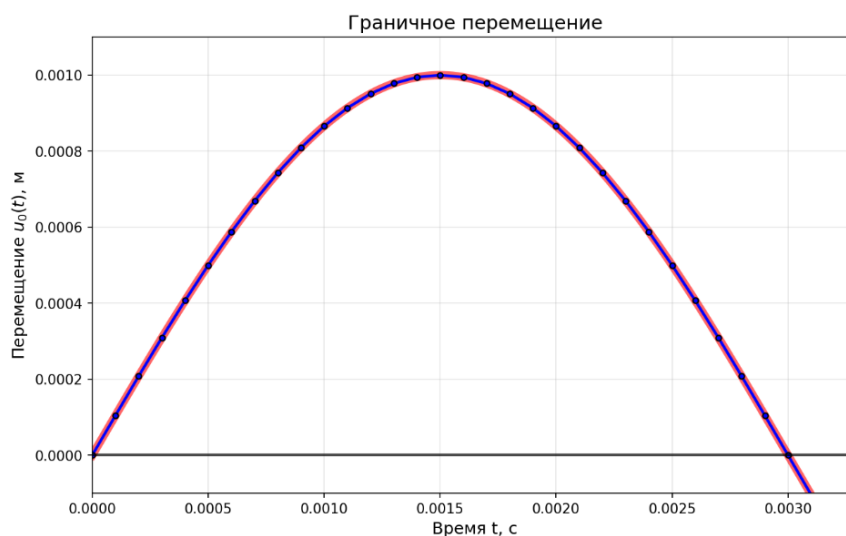


Рисунок 4 – Граничное условие для режима «сжатие-растяжение»

Figure 4 – Boundary condition for the compression-tension mode

На Рисунке 5 показано распределение перемещений $u(x, t)$, а на Рисунке 6 представлено распределение деформаций $e(x, t)$ в полупространстве в момент времени $t = 0,0023$ с при заданном режиме движения границы полупространства (Рисунок 4).

В момент времени изменения режима воздействия со сжатия на растяжение формируется растущий жесткий слой $[\gamma^b, \gamma^a]$, которому соответствует зона постоянного перемещения (горизонтальный участок) на Рисунке 5 и зона нулевой деформации на Рисунке 6.

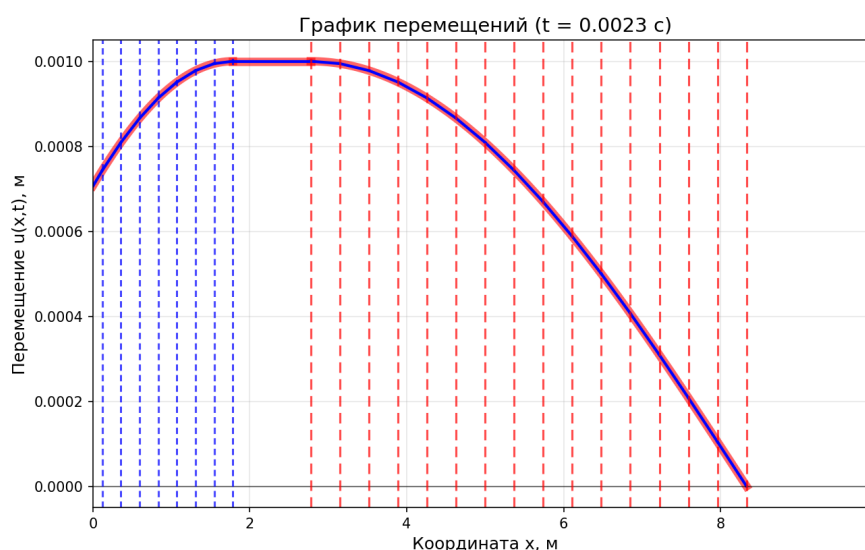


Рисунок 5 – График перемещений для режима «сжатие-растяжение»

Figure 5 – Displacement graph for the compression-tension mode

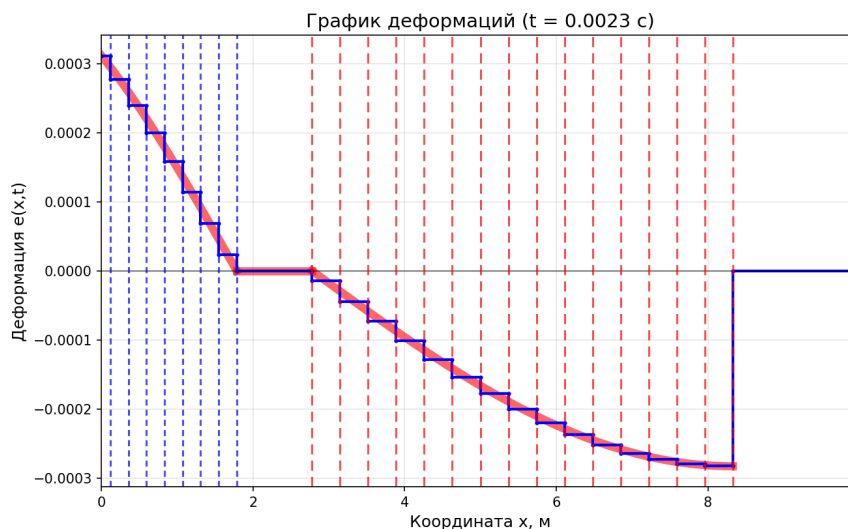


Рисунок 6 – График деформаций для режима «сжатие-растяжение»
Figure 6 – Deformation graph for the compression-tension mode

В Таблице 1 указаны значения относительных погрешностей в виде процента отклонения приближенного решения от точного решения [14] в зависимости от числа узловых точек линейной аппроксимации граничного условия для режима 1 и режима 2.

Таблица 1 – Относительные погрешности при единичных импульсах граничного воздействия
Table 1 – Relative errors with single boundary impact pulses

Число узлов ГУ	Относительная погрешность $u(x, t)$, %		Относительная погрешность $e(x, t)$, %	
	Режим 1	Режим 2	Режим 1	Режим 2
100	0,0091	0,0081	2,7645	3,8538
400	0,0006	0,0005	2,6105	3,6279
800	0,0001	0,0001	2,6027	3,6108
1200	0,0001	0,0001	2,6013	3,6065

Режим 3: циклическое знакопеременное нагружение. На Рисунке 7 представлены гладкая функция граничного перемещения и ее кусочно-линейная аппроксимация с 43 узлами, соответствующие нескольким тактам граничного растяжения-сжатия.

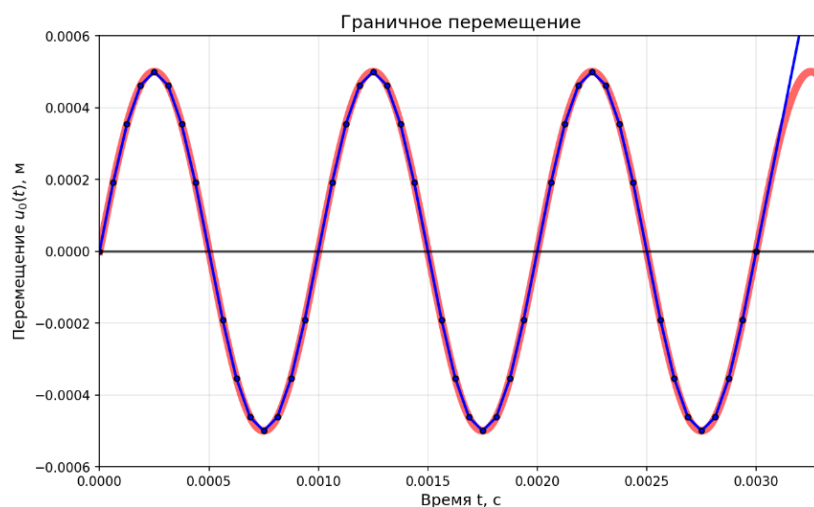


Рисунок 7 – Граничное условие для циклического знакопеременного нагружения
Figure 7 – Boundary condition for the cyclic alternating load mode

В этом случае в разномодульном полупространстве формируется огромное количество взаимодействующих между собой волновых фронтов, что делает процесс аналитического решения задачи практически невозможным.

На Рисунках 8 и 9 показаны кусочно-линейный график перемещения и ступенчатый график деформации, полученные в результате работы программного средства для режима циклического знакопеременного нагружения (Рисунок 7) в момент времени $t = 0,002$ с.

Сложные волновые картины на Рисунках 8 и 9 содержат весь спектр возможных типов волн растяжения и сжатия (в том числе ударных волн и полусигнотонов – границ жестких слоев). Все они способны многократно сталкиваться как друг с другом, так и с границей полупространства, приводя к дальнейшей эволюции решения задачи.

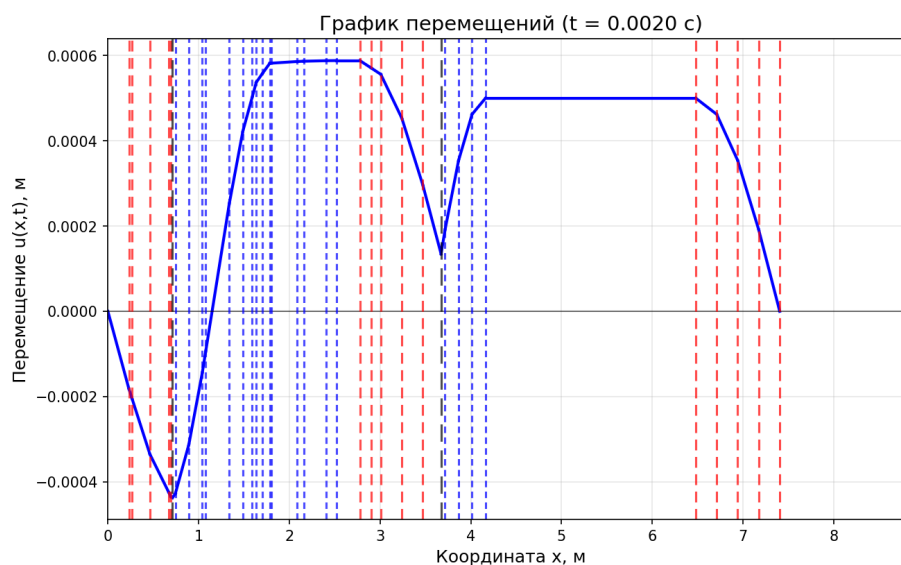


Рисунок 8 – График перемещений для циклического знакопеременного нагружения
Figure 8 – Displacement graph for the cyclic alternating load mode

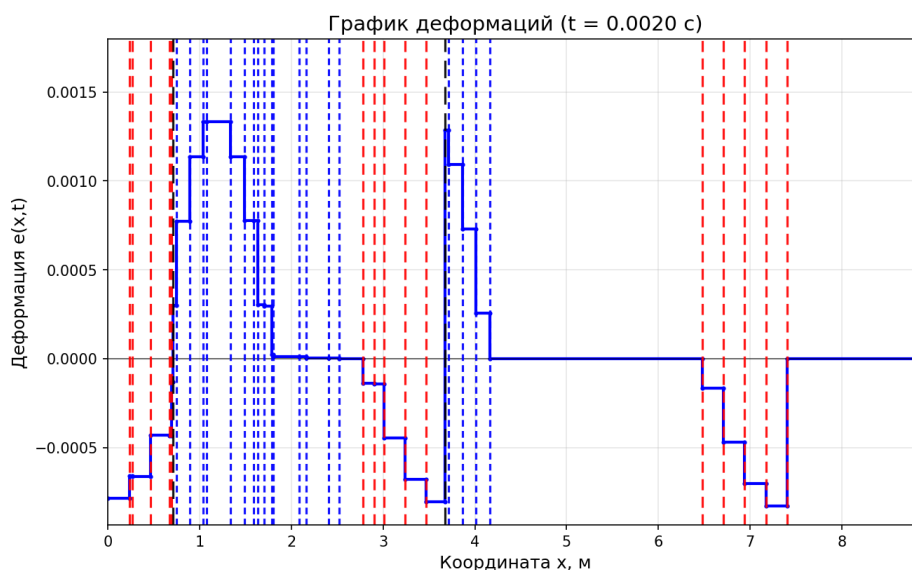


Рисунок 9 – График деформаций для циклического знакопеременного нагружения
Figure 9 – Deformation graph for the cyclic alternating load mode

Обсуждение

Результаты вычислительных экспериментов подтверждают корректность работы программного средства. Полученные приближенные решения воспроизводят ожидаемые физические эффекты: различие скоростей волн сжатия и растяжения ($a > b$), формирование ударных волн и жестких слоев, устойчивость моделирования сложной волновой картины с множеством взаимодействующих фронтов. Сравнение с аналитическими решениями [14] для режимов 1 и 2 показывает, что при более 800 узлах граничного условия относительная ошибка приближенного решения не превышает 0,0001 % для перемещений и 3,6 % для деформаций. Решение с циклическим режимом нагружения сравнивалось с результатами [15], где в подобной задаче пришлось ограничиться тремя тактами цикла с минимальным количеством узлов пилообразной функции граничного перемещения из-за наличия ручных этапов в базовой версии алгоритма [12]. Рисунки 8 и 9 демонстрируют, что разработанная вычислительная система позволяет значительно повысить степень детализации и скорость построения решения за счет увеличения количества узлов кусочно-линейного граничного условия. Механизм автоматического контроля эволюционности с введением жестких слоев обеспечивает физическую корректность решения при сложных режимах нагружения без ручного вмешательства.

Разработанное средство эффективно автоматизирует процесс решения краевых задач одномерной динамики разномодульных сред и может использоваться для исследования волновых процессов при произвольных кусочно-линейных граничных воздействиях. К основным преимуществам средства можно отнести точное отслеживание разрывов и автоматическую классификацию волновых событий. Перспективы развития программного средства включают расширение на двумерные задачи и учет жесткой границы полупространства.

Заключение

В настоящей работе представлено программное средство для численного решения краевых задач динамики деформирования одномерных разномодульных упругих сред. Разработанное средство реализует итерационный алгоритм, основанный на кусочно-линейной аппроксимации модельных соотношений и граничных условий, что позволяет автоматизировать процесс построения волновой картины с учетом множественных взаимодействий волновых фронтов.

Реализованный в программном средстве алгоритм показал хорошую сходимость приближенных результатов к известным аналитическим решениям при достаточном количестве узлов кусочно-линейного условия.

Выполнена серия вычислительных экспериментов, демонстрирующих способность средства моделировать различные физические явления: формирование ударных волн и автоматическое введение жестких слоев при нарушении эволюционности волновых фронтов.

Таким образом, разработанное программное средство является эффективным инструментом для автоматизации исследований динамики деформирования разномодульных материалов, особенно в случаях, когда аналитические решения отсутствуют или слишком сложны.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Баклашов И.В., Картозия Б.А. *Механика горных пород*. Москва: Недра; 1975. 271 с.
2. Заалишвили В.Б. Нелинейные свойства грунтов. *Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений*. 2015;(4):22–37.
Zaalishvili V.B. Nonlinear Properties of Soils. *Earthquake engineering. Constructions safety*. 2015;(4):22–37. (In Russ.).
3. Бессонов Д.Е., Зезин Ю.П., Ломакин Е.В. Разносопротивляемость зернистых композитов на основе ненасыщенных полиэфиров. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. 2009;9(4):9–13. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-9-13>
Bessonov D.E., Zezin Y.P., Lomakin E.V. Multimodulus Behavior of the Grained Composites on the Base of Unsaturated Polyethers. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2009;9(4):9–13. (In Russ.).
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2009-9-4-2-9-13>
4. Lomakin E.V., Fedulov B.N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites. *Meccanica*. 2015;50(6):1527–1535. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0104-5>
5. Fourmeau M., Borvik T., Benallal A., Hopperstad O.S. Anisotropic failure modes of high-strength aluminium alloy under various stress states. *International Journal of Plasticity*. 2013;(48):34–53. <https://doi.org/10.1016/j.iijplas.2013.02.004>
6. Амбарцумян С.А. *Разномодульная теория упругости*. Москва: Наука; 1982. 320 с.
7. Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н. Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела. *Известия Академии Наук СССР. Механика твёрдого тела*. 1978;(6):29–34.
8. Мясников В.П., Олейников А.И. *Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред*. Владивосток: Дальнаука; 2007. 172 с.
9. Садовская О.В., Садовский В.М. *Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред*. Москва: Физматлит; 2008. 368 с.
10. Маслов В.П., Мосолов П.П. Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды. *Прикладная математика и механика*. 1985;49(3):419–437.
11. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. *Нелинейные волны в упругих средах*. Москва: Московский лицей; 1998. 412 с.
12. Дудко О.В., Лаптева А.А., Рагозина В.Е. Эволюция волновой картины кусочно-линейного одноосного растяжения и сжатия разномодульного упругого стержня. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2022;25(4):54–70.
Dudko O.V., Lapteva A.A., Ragozina V.E. Evolution of the wave pattern for piecewise linear uniaxial tension and compression of a heteromodulus elastic bar. *Siberian journal of industrial mathematics*. 2022;25(4):54–70. (In Russ.).
13. Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V. Wave propagation in continuous bimodular media. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022;29(21):3147–3162. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1889725>
14. Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. *Дальневосточный математический журнал*. 2005;6(1):94–105.
Dudko O.V., Lapteva A.A., Semyonov K.T. About distribution of flat one-dimensional waves and their interaction with barrier in the media differently reacting to a stretching and compression. *Far Eastern Mathematical Journal*. 2005;6(1):94–105. (In Russ.).
15. Дудко О.В., Лаптева А.А. Циклическое одноосное растяжение-сжатие разномодульного упругого полупространства. *Вестник Чувашского*

государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2025;2(64):105–117. <https://doi.org/10.37972/chgpu.2025.64.2.002>

Dudko O.V., Lapteva A.A. Cyclic uniaxial tension-compression of a bimodular elastic half-space. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2025;2(64):105–117. (In Russ.). <https://doi.org/10.37972/chgpu.2025.64.2.002>

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Полеся Виталий Александрович, аспирант, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Российская Федерация.

e-mail: polesia.va@dvfu.ru

ORCID: [0009-0005-6368-0597](https://orcid.org/0009-0005-6368-0597)

Vitaly A. Polesia, Postgraduate, Far Eastern Federal University, Vladivostok, the Russian Federation.

Дудко Ольга Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент департамента программной инженерии и искусственного интеллекта, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Российская Федерация.

e-mail: dudko.ov@dvfu.ru

ORCID: [0000-0001-7493-6360](https://orcid.org/0000-0001-7493-6360)

Olga V. Dudko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Software Engineering and Artificial Intelligence, Far Eastern Federal University, Vladivostok, the Russian Federation.

Лаптева Анастасия Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент департамента программной инженерии и искусственного интеллекта, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Российская Федерация.

e-mail: lapteva.aal@dvfu.ru

ORCID: [0000-0002-1703-0471](https://orcid.org/0000-0002-1703-0471)

Anastasia A. Lapteva, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor at the Department of Software Engineering and Artificial Intelligence, Far Eastern Federal University, Vladivostok, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 30.04.2026; одобрена после рецензирования 26.06.2026; принята к публикации 17.07.2026.

The article was submitted 30.04.2026; approved after reviewing 26.06.2026; accepted for publication 17.07.2026.