УДК 534.1+519.6
DOI: 10.26102/2310-6018/2026.61.10.022

Математическое моделирование процесса изгибных колебаний стержня с промежуточной абсолютно жесткой массивной вставкой

Л.Р. Нуратуллина✉, В.П. Павлов

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Российская Федерация

Резюме. В работе рассматривается составной стержень с промежуточной абсолютно жесткой вставкой массой m и длины s, который может рассматриваться как упрощенная модель лопатки газотурбинного двигателя с бандажной полкой. Для расчета частот изгибных колебаний стержень разбивается на три сопряженных участка – два гибких и промежуточную абсолютно жесткую вставку. В отличие от традиционных моделей, рассматривающих стержни с точечными сосредоточенными массами, в данной работе учитывается длина жесткой вставки и ее момент инерции. Это позволяет более корректно учесть влияние поступательного и вращательного движения жесткой вставки на частоты собственных колебаний стержня, что обусловливает научную новизну исследования. При построении математической модели на концах вставки учитываются условия непрерывности перемещений и углов поворота поперечных сечений стержня, а также условия равновесия приложенных к вставке сил и моментов. С использованием условий сопряжения и краевых условий на концах гибких участков стержня получено трансцендентное частотное уравнение, корни которого определяют спектр собственных частот свободных колебаний стержня. Численный анализ показал, что увеличение массы вставки приводит к монотонному снижению собственных частот, причем влияние массы наиболее существенно для низших частот колебаний. Верификация модели выполнена путем анализа предельных переходов ($m \to 0$ и $s \to 0$) и сопоставления результатов расчетов с известными решениями для однородного стержня постоянного сечения. Погрешность расчета частот собственных колебаний не превышает $1 \cdot 10^{-4}$ %. Разработанная модель представляет практическую ценность для предварительной оценки частот собственных колебаний лопаток газотурбинных двигателей с бандажными полками на этапе проектирования, обеспечивая предотвращение резонансных режимов работы лопаток, что обусловливает актуальность исследования.

Ключевые слова: частоты изгибных колебаний, абсолютно жесткая вставка, частотное уравнение, краевые условия, условия сопряжения.

Для цитирования: Нуратуллина Л.Р., Павлов В.П. Математическое моделирование процесса изгибных колебаний стержня с промежуточной абсолютно жесткой массивной вставкой. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии.* 2026;14(10). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/article?id=2553 DOI: 10.26102/2310-6018/2026.61.10.022

Mathematical modeling of flexural vibrations of a rod with an intermediate perfectly rigid massive insert

L.R. Nusratullina✉, V.P. Pavlov

Ufa University of Science and Technology, Ufa, the Russian Federation

Abstract. The paper considers a compound rod with an intermediate perfectly rigid insert of mass m and length s, which can be viewed as a simplified model of a gas turbine engine blade with a tip shroud. To calculate the bending vibration frequencies, the rod is divided into three coupled segments: two flexible segments and an intermediate perfectly rigid insert. Unlike traditional models that consider rods with point masses, this study takes into account the length of the rigid insert and its moment of inertia. This

© Нуратуллина Л.Р., Павлов В.П., 2026

allows for a more accurate consideration of the influence of the translational and rotational motion of the rigid insert on the natural frequencies of the rod, which constitutes the scientific novelty of the study. In constructing the mathematical model, the continuity conditions for displacements and rotation angles of the rod's cross-sections are applied at the ends of the insert, along with the equilibrium conditions for the forces and moments acting on the insert. By applying the matching conditions and the boundary conditions at the ends of the flexible rod segments, a transcendental frequency equation is derived, the roots of which determine the natural frequency spectrum of the rod's free vibrations. Numerical analysis demonstrates that increasing the mass of the insert leads to a monotonic decrease in the natural frequencies, with the mass having the most significant effect on the lower natural frequencies. The model was verified by analyzing limiting cases ($m \to 0$ and $s \to 0$) and comparing the calculated results with known solutions for a homogeneous rod of constant cross-section. The calculation error for the natural frequencies does not exceed $1 \cdot 10^{-4}$ %. The developed model is of practical value for the preliminary estimation of the natural frequencies of gas turbine engine blades with tip shrouds at the design stage, helping to prevent resonant operating conditions, which highlights the relevance of this study.

Keywords: bending vibration frequencies, perfectly rigid insert, frequency equation, boundary conditions, matching conditions.

For citation: Nusratullina L.R., Pavlov V.P. Mathematical modeling of flexural vibrations of a rod with an intermediate perfectly rigid massive insert. *Modeling, Optimization and Information Technology.* 2026;14(10). (In Russ.). URL: https://moitvivt.ru/ru/journal/article?id=2553 DOI: 10.26102/2310-6018/2026.61.10.022

Введение

Лопатки с бандажными полками широко применяются в газотурбинных двигателях и газовых турбинах. Бандажная полка вносит дополнительную массу, обеспечивая демпфирование колебаний, повышение жесткости пера лопатки и снижение собственных частот колебаний лопатки[1]. Расчет частот изгибных колебаний лопаток необходим для прогнозирования резонансных режимов работы двигателя и принятия мер по их предотвращению.

В современной инженерной практике для расчета частот собственных колебаний лопатки широко используются конечно-элементные модели, где рассматривают полку как упруго-инерционный элемент [1, 2]. Однако такой подход требует значительных вычислительных ресурсов и построения индивидуальной модели для каждой конструкции, что усложняет возможность гибкого анализа ее процесса колебаний для различных упруго-геометрических характеристик сечений стержневых систем [3, 4].

В данной работе рассматривается составной стержень с промежуточной абсолютной жесткой массивной вставкой. Составные стержни с безынерционными элементами и точечными массами ранее рассматривались в научных трудах [5, 6]. В настоящей работе предлагается математическая модель, позволяющая более гибко описать массово-инерционные характеристики стержня [7], сохраняя при этом высокую вычислительную эффективность. На границах вставки формулируются кинематические условия непрерывности прогиба и угла поворота, а динамические условия сопряжения учитывают инерционные эффекты поступательного и вращательного движения полки[2]. Полученное трансцендентное частотное уравнение позволяет определить полный спектр собственных частот с учетом реальных геометрических параметров полки [8].

[1] Скубачевский Г.С. *Авиационные газотурбинные двигатели. Конструкция и расчет деталей.* Москва: Машиностроение; 1969. 544 с.

[2] Яблонский А.А., Никифорова В.М. *Курс теоретической механики. Часть 1. Статика. Кинематика.* Москва: Высшая школа; 1966. 439 с.

Результаты исследования могут быть использованы для оптимизации массово-геометрических характеристик бандажных полок и отстройки от резонансных частот на этапе проектирования лопаток [9, 10].

Материалы и методы

Математическая модель и общее решение. Рассмотрим консольный стержень длиной l из трех участков (Рисунок 1*а*,*б*):

– участок *AB*: Гибкий участок слева от вставки длиной l_1 $(0 \le z \le l_1)$;

– участок *BC*: Абсолютно жесткая вставка, длиной $l_2 = \text{s}$ и массой m $l_1 \le z \le l_1 + l_2$;

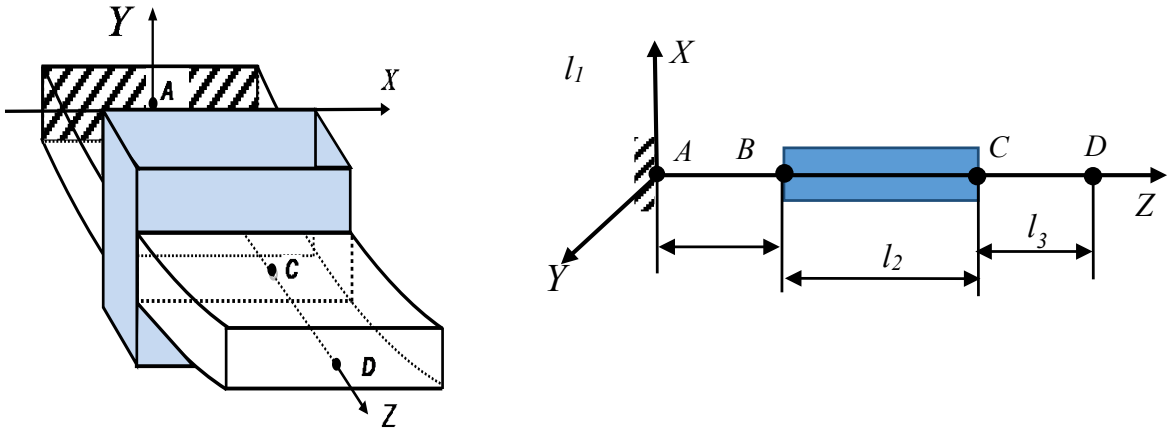
– участок *CD*: Гибкий участок справа от вставки длиной l_3 $(l_1 + l_2 \le z \le l)$.

Общая длина стержня: $l_1 + l_2 + l_3 = l$.

Левый конец стержня $(z = 0)$ жестко закреплен, правый конец $(z = l)$ свободен.

Ставится задача нахождения частот собственных колебаний данного стержня.

В деформируемых участках стержня $(0 \le z \le l_1$ и $l_1 + l_2 \le z \le l)$ рассматриваются внутренний изгибающий момент M_y и поперечная сила Q_x (Рисунок 2).



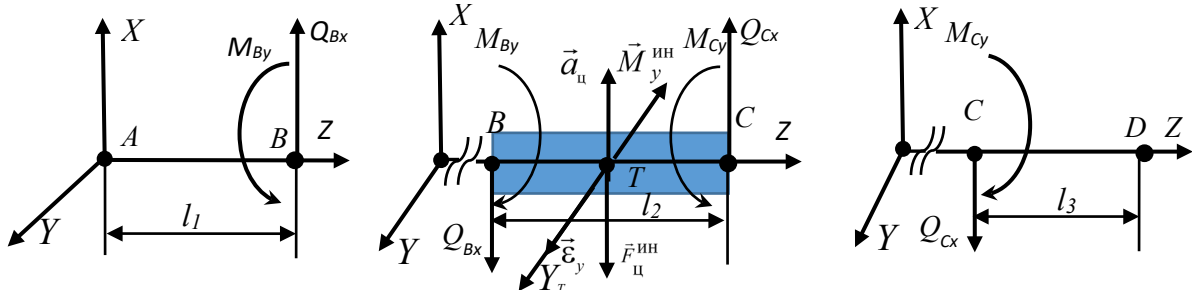
а) *б*)

Рисунок 1 – Стержень с промежуточной массивной вставкой: *а* – стержень со вставкой; *б* – участки стержня

Figure 1 – Rod with a intermediate massive insert: *a* – rod with an insert; *b* – rod sections

Участок стержня на отрезке $[l_1,\ l_1 + l_3]$ моделируется как абсолютно жесткое тело, обладающее массой m и массовым моментом инерции J_{ym} относительно поперечной оси Y_T проходящей через центр масс вставки *T*, параллельно оси *Y*.

При поперечных колебаниях стержня вставка массой m движется как абсолютно твердое тело. Его центр масс приобретает линейное ускорение $a_{\text{ц}}$, а сама вставка – угловое ускорение ε_y. Этим ускорениям соответствуют приложенные к центру масс вставки сила инерции $F_{\text{ц}}^{\text{ин}} = ma_{\text{ц}}$ и момент сил инерции $M_y^{\text{ин}} = J_{ym}\varepsilon_y$.



а) *б*) *в*)

Рисунок 2 – Схема сил и моментов, действующих на вставку при поперечных колебаниях стержня: *а* – участок *AB*; *б* – участок *BC*; *в* – участок *CD*

Figure 2 – Force and moment diagram for the insert during lateral vibrations of the rod: *a* – segment *AB*; *b* – segment *BC*; *c* – segment *CD*

Колебания гибких участков *AB* и *CD* описываются следующими дифференциальными уравнениями[3]:

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\left(E_1 I_{y1}\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2}\right)+\mu_1\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}=0,\ 0\le z\le l_1,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial^2 z}\left(E_3 I_{y3}\frac{\partial^2 V_3}{\partial z^2}\right)+\mu_3\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2}=0,\ l_1+l_2\le z\le l, \quad (1)$$

где $V_1=V_1(z,t)$, $V_3=V_3(z,t)$ – функции, описывающие поперечные перемещения точек оси стержня в зависимости от координаты z и времени tна участках *AB* и *CD* соответственно; E_1, E_3 – модули упругости материала стержня на участках *AB* и *CD*; μ_1, μ_3 – погонные массы участков стержня *AB* и *CD*; I_{y1}, I_{y3} – осевые моменты инерции поперечных сечений участков стержня *AB* и *CD*.

Общее решение первого уравнения системы (1) на участке *AB* имеет вид:

$$V_1(z,t)=(C_1\sin k_1 z+C_2\cos k_1 z+C_3\,e^{k_1 z}+C_4 e^{-k_1 z})\sin\omega t, \quad (2)$$

где $k_1^4=\omega^2\frac{\mu_1}{E_1 I_1}$; постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 – определяемые из краевых условий левого конца $z_A=0$ стержня и условий сопряжения участков в точке *B*.

Введем обозначение $\Phi_1(z)=C_1\sin k_1 z+C_2\cos k_1 z+C_3\,e^{k_2 z}+C_4 e^{-k_2 z}$ и запишем:

$$V_1(z,t)=\Phi_1(z)\sin\omega t. \quad (3)$$

Общее решение второго уравнения системы (1) имеет вид:

$$V_3(z,t)=(D_1\sin k_3 z+D_2\cos k_3 z+D_3\,e^{k_3 z}+D_4 e^{-k_3 z})\sin\omega t,$$

где $k_3^4=\omega^2\frac{\mu_3}{E_3 I_3}$; D_1, D_2, D_3, D_4 – постоянные, определяемые из краевых условий для правого конца $z_D=l$ стержня и условий сопряжения участков в точке *C*.

Введем обозначение $\Phi_3(z)=D_1\sin k_3 z+D_2\cos k_3 z+D_3\,e^{k_3 z}+D_4 e^{-k_3 z}$ и запишем:

$$V_3(z,t)=\Phi_3(z)\sin\omega t. \quad (4)$$

Для компактности записи введем следующие обозначения:

для узла $z_A=0$:

[3] Бабаков И.М. *Теория колебаний*. Москва: Наука; 1965. 560 с.

$$\Phi_{1,A} = \Phi_1(z_A), \qquad \Phi'_{1,A} = \frac{d\Phi_1(z_A)}{dz}, \qquad \Phi''_{1,A} = \frac{d^2\Phi_1(z_A)}{dz^2}, \qquad \Phi'''_{1,A} = \frac{d^3\Phi_1(z_A)}{dz^3}; \quad (5)$$

для узла $z_B = l_1$:

$$\Phi_{1,B} = \Phi_1(z_B), \qquad \Phi'_{1,B} = \frac{d\Phi_1(z_B)}{dz}, \qquad \Phi''_{1,B} = \frac{d^2\Phi_1(z_B)}{dz^2}, \qquad \Phi'''_{1,B} = \frac{d^3\Phi_1(z_B)}{dz^3}; \quad (6)$$

для узла $z_C = l_1 + l_2$:

$$\Phi_{3,C} = \Phi_3(z_C), \qquad \Phi'_{3,C} = \frac{d\Phi_3(z_C)}{dz}, \qquad \Phi''_{3,C} = \frac{d^2\Phi_3(z_C)}{dz^2}, \qquad \Phi'''_{3,B} = \frac{d^3\Phi_3(z_C)}{dz^3}; \quad (7)$$

для узла $z_D = l$:

$$\Phi_{3,D} = \Phi_3(z_D), \qquad \Phi'_{3,D} = \frac{d\Phi_3(z_D)}{dz}, \qquad \Phi''_{3,D} = \frac{d^2\Phi_3(z_D)}{dz^2}, \qquad \Phi'''_{3,D} = \frac{d^3\Phi_3(z_D)}{dz^3}. \quad (8)$$

Краевые условия. Краевое условие жесткого закрепления стержня на левом конце в точке *A*:

$$\Phi_{1,A} = 0, \qquad \Phi'_{1,A} = 0. \quad (9)$$

Краевые условия на правом свободном конце в точке *D*:

$$\Phi''_{3,D} = 0, \qquad \Phi'''_{3,D} = 0. \quad (10)$$

Условия сопряжения участков. Пусть $V(z,t) -$ это функция, описывающая поперечное перемещение оси стержня в точке с координатой *z* в момент времени *t*. Для рассматриваемого составного стержня перемещение на каждом участке будет выражаться по-разному. Для участков *AB* и *CD*:

$$V(z,t) = \begin{cases} V_1(z,t), & 0 \le z \le l_1, \\ V_3(z,t), & l_1 + l_2 \le z \le l. \end{cases} \quad (11)$$

Рассмотрим движение жесткой массивной вставки стержня.

Отрезок *BC* $(l_1 \le z \le l_1 + l_2)$ рассматривается как абсолютно жесткий и недеформируемый участок. Его перемещение определяется отрезком прямой линии *BC*, у которого углы наклона в точках *B* и *C* равны:

$$\Phi'_{1,B} = \Phi'_{3,C}. \quad (12)$$

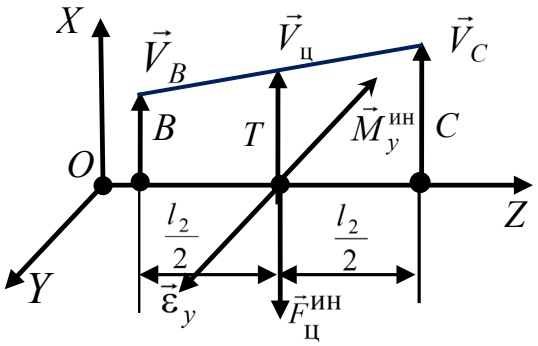


Рисунок 3 – Перемещения жесткой вставки
Figure 3 – Motion of the rigid insert

На участке *BC* (Рисунок 3) справедливо соотношение:

$$V_C = V_B + \Phi'_{1,B} l_2. \quad (13)$$

В итоге с учетом (3) и (4):

$$\Phi_{3,C} = \Phi_{1,B} + \Phi'_{1,B} l_2. \tag{14}$$

Центр масс жесткой вставки расположен в точке *T*. Перемещение центра масс определяется выражением (Рисунок 3):

$$V_{\text{ц}} = \frac{V_{\text{B}} + V_C}{2}. \tag{15}$$

Дважды продифференцировав (15), получим проекцию ускорения точки *T* на ось *X*:

$$a_x^{\text{ц}} = \frac{\partial^2 V_{\text{ц}}}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V_B}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V_C}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{2}(a_x^B + a_x^C) - \frac{\omega^2}{2}\left(\Phi_{1,\text{B}} + \Phi_{3,\text{C}}\right)\sin \omega t. \tag{16}$$

Центр масс движется в плоскости *XZ* и поэтому справедливо равенство $a_{\text{ц}} = a_x^{\text{ц}}$.

Угловое ускорение ε_y твердой вставки при вращении относительно оси *Y*:

$$\varepsilon_y = \frac{a_x^C - a_x^B}{l_2} = -\frac{\omega^2}{l_2}\left(\Phi_{3,\text{C}} - \Phi_{1,B}\right)\sin \omega t. \tag{17}$$

Запишем выражения для вычисления сил, действующих на твердую вставку, со стороны взаимодействующих с ней гибких частей стержня.

Рассмотрим силу инерции $F_{\text{ц}}^{\text{ин}}$ и момент сил инерции $M_y^{\text{ин}}$ (Рисунок 2):

$$\begin{gathered} F_{\text{ц}}^{\text{ин}} = m a_x^{\text{ц}}, \\ M_y^{\text{ин}} = J_{ym}\varepsilon_y. \end{gathered} \tag{18}$$

Учитывая (16) и (17):

$$\begin{gathered} F_{\text{ц}}^{\text{ин}} = -\frac{m\omega^2}{2}\left(\Phi_{1.B} + \Phi_{3,C}\right)\sin \omega t, \\ M_y^{\text{ин}} = \frac{J_{ym}\omega^2}{l_2}\left(\Phi_{1,B} - \Phi_{3.C}\right)\sin \omega t. \end{gathered} \tag{19}$$

Движение стержня с абсолютно жесткой вставкой описывается уравнениями, согласно которым сумма всех действующих на него внешних сил и моментов инерции в любой момент времени равняется нулю.

Запишем выражения для вычисления внутренних силовых факторов в стержне:

$$\begin{gathered} M_x^B = EI_{y1}\,\frac{\partial^2 V_B}{\partial z^2} = EI_{y1}\,\Phi''_{1,B}\,\sin \omega t, \\ Q_x^B = -\frac{\partial M_y^B}{\partial z} = -EI_{y1}\Phi'''_{1,B}\sin \omega t, \\ M_y^C = EI_{y3}\,\frac{\partial^2 V_C}{\partial z^2} = EI_{y3}\,\Phi''_{3,C}\,\sin \omega t, \\ Q_y^C = -\frac{\partial M_y^C}{\partial z} = -EI_{y3}\,\Phi'''_{3,C}\,\sin \omega t. \end{gathered} \tag{20}$$

На основе принципа Даламбера запишем уравнения равновесия для жесткой вставки:

$$\begin{gathered} -Q_x^B + Q_x^C - F_{\text{ц}}^{\text{ин}} = 0, \\ -M_y^B - M_y^C + \frac{l_2}{2}Q_x^B + \frac{l_2}{2}Q_x^C - M_y^{\text{ин}} = 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Подставив выражения (20) в (21) получим:

$$\begin{gathered} E_1 I_{y1} \Phi'''_{1,B} - E_3 I_{y3} \Phi'''_{3,C} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\Phi_{1,B} + \Phi_{3,C}\right) = 0, \\ -E_1 I_{y1} \Phi''_{1,B} + E_3 I_{y3} \Phi''_{3,C} + \frac{E_1 I_{y1} l_2}{2} \Phi'''_{1,B} + \frac{E_3 I_{y3} l_2}{2} \Phi'''_{3,C} - \frac{J_{ym}\omega^2}{l_2}\left(\Phi_{1,B} - \Phi_{3,C}\right) = 0. \end{gathered} \quad (22)$$

Формирование системы расчетных уравнений. В итоге мы имеем 8 уравнений, включающих 4 краевых условия и 4 условия сопряжения:

$$\begin{gathered} \Phi_{1,A} = 0, \qquad \Phi'_{1,A} = 0, \\ \Phi''_{3,D} = 0, \qquad \Phi'''_{3,D} = 0, \\ \Phi'_{1,B} = \Phi'_{3,C} \qquad \Phi_{3,C} = \Phi_{1,B} + \Phi'_{1,B} l_2, \\ E_1 I_{y1} \Phi'''_{1,B} - E_3 I_{y3} \Phi'''_{3,C} + \frac{m\omega^2}{2}\left(\Phi_{1,B} + \Phi_{3,\mathrm{C}}\right) = 0, \\ -E_1 I_{y1} \Phi''_{1,B} + E_3 I_{y3} \Phi''_{3,C} + \frac{E_1 I_{y1} l_2}{2} \Phi'''_{1,B} + \frac{E_3 I_{y3} l_2}{2} \Phi'''_{3,C} - \frac{J_{ym}\omega^2}{l_2}\left(\Phi_{1,B} - \Phi_{3,\mathrm{C}}\right) = 0. \end{gathered} \quad (23)$$

Запишем (23) в матричной форме:

$$A(\omega)X = 0, \quad (24)$$

где $X = (C_1\ C_2\ C_3\ C_4\ D_1\ D_2\ D_3\ D_4)^T$ – вектор неизвестных коэффициентов, определяющих формы собственных колебаний гибких участков, а A – квадратная матрица коэффициентов размером 8×8, элементы которой являются функциями от круговой частоты ω.

Условие существования нетривиального решения однородной системы (24) требует обращения в нуль определителя матрицы коэффициентов:

$$\det A(\omega) = 0. \quad (25)$$

Таким образом, задача нахождения собственных частот колебаний стержня со вставкой сводится к задаче нахождения собственных значений матрицы A.

Для решения уравнения (25) воспользуемся методом перебора[4]. В зависимости от необходимого количества собственных частот определяется отрезок $[c, d]$. На данном отрезке строится равномерная сетка $c = \widetilde{\omega}_1 < \widetilde{\omega}_2 < \ldots < \widetilde{\omega}_m = d$. На соседних узлах сетки проверяется выполнение следующего условия:

$$\det A(\widetilde{\omega}_i) = \det A(\widetilde{\omega}_{i+1}) < 0, \ \ i = \overline{1, m-1}. \quad (26)$$

При выполнении условия (26) на отрезке $[\omega_i, \omega_{i+1}]$ производится уточнение искомого значения ω методом половинного деления[5] до достижения необходимой точности расчетов. В итоге определяется необходимое количество частот.

Результаты

Для оценки точности предлагаемой математической модели рассмотрим расчет частот изгибных колебаний консольного стержня с абсолютно жесткой массивной вставкой, имеющий длину $l = 1$ м, $l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}15$ м, $l_3 = 0{,}35$ м, постоянное прямоугольное поперечное сечение шириной $b = 0{,}03$ м и высотой $h = 0{,}02$ м. Рассматривается стержень из титанового сплава с модулем упругости и $E_1 = E_2 = E = 1{,}1 \cdot 10^{11}$ Па плотностью $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 4{,}54 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. При этих данных рассчитана площадь поперечного сечения $A = bh = 6 \cdot 10^{-4}$ м^2, осевой момент инерции $I_{y1} = I_{y3} = \frac{bh^3}{12} = 2 \cdot 10^{-8}$ м^4 и погонная масса стержня $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 2{,}724 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$.

[4] Калиткин Н.Н., Альшина Е.А. *Численные методы. Книга 1. Численный анализ.* Москва: Академия; 2013. 304 с.

[5] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. Москва: Лаборатория знаний; 2024. 639 с.

Момент инерции вставки рассчитывается по формуле $J_{ym} = \frac{ml_2^2}{12} = \frac{ms^2}{12}$. Погрешность $\varepsilon = \left|\frac{\tilde{\omega}_{i+1} - \tilde{\omega}_i}{\tilde{\omega}_{i+1}}\right|, i = 1, 2, \ldots$ при методе перебора, взята равной $1 \cdot 10^{-6}$.

Для проверки корректности предложенной модели рассмотрен предельный переход при стремлении $m \to 0$ и $s \to 0$. В этом случае модель должна точно воспроизводить спектр частот собственных колебаний однородной консольной балки, определяемый по формуле:

$$\omega_n = \frac{\theta_n^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, n = 1,2 \ldots, \quad (27)$$

где $\theta_n -$ обезразмеренная собственная частота, являющейся корнем трансцендентного уравнения $\cos\theta\, ch\,\theta + 1 = 0$.

Обозначим через $\omega_n^T,\ n = 1, 2, \ldots$ собственные значения, вычисленные по формуле (27), а через $\omega_n^P,\ n = 1, 2, \ldots$ – собственные значения, полученные при предельном переходе $m \to 0$ и $s \to 0$.

Точность расчетов оценим относительной погрешностью:

$$\delta_n = \left|\frac{\omega_n^T - \omega_n^P}{\omega_n^P}\right|, n = \overline{1,5}. \quad (28)$$

Результаты расчета собственных частот колебаний стержня со вставкой при предельном переходе $m \to 0$ и $s \to 0$ приведены в Таблице 1.

Таблица 1 – Расчетные и точные значения частот колебаний стержня с полкой
Table 1 – Calculated and exact frequencies of a rod with an insert

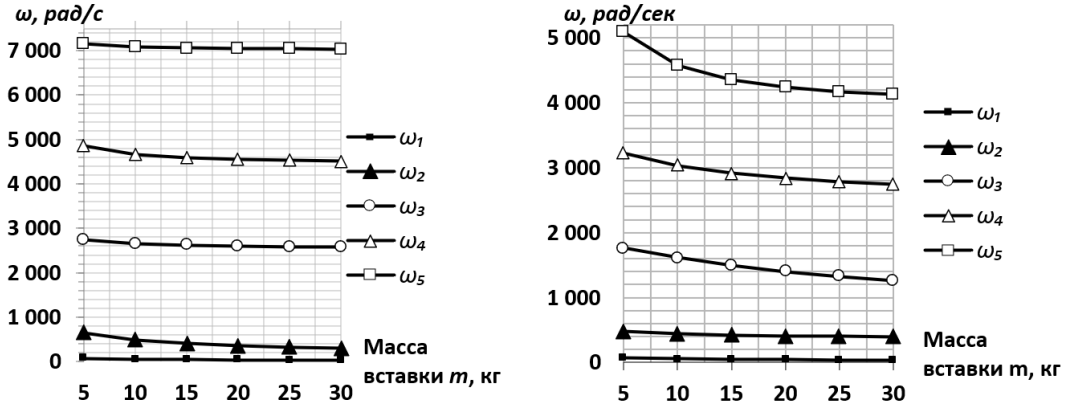
Форма колебаний n	**ω_n^P, рад/с**	**ω_n^T, рад/с**	**Относительная погрешность δ_n**
1	99,92143921674	99,92143260986	$6{,}612074 \cdot 10^{-8}$
2	626,1967835262	626,19688275964	$1{,}584701 \cdot 10^{-7}$
3	1753,369198666	1753,36925188666	$3{,}035331 \cdot 10^{-8}$
4	3435,903638123	3435,90413876292	$1{,}457083 \cdot 10^{-7}$
5	5679,795016972	5679,79449588821	$9{,}174354 \cdot 10^{-8}$

Из Таблицы 1 видно, что абсолютное значение относительной погрешности расчетов не превышает $3{,}035331 \cdot 10^{-8}$, что подтверждает корректность разработанного метода и его компьютерной реализации.

Обсуждение

В данном разделе исследуем влияние массы вставки m, длины вставки l_2 и ее положения на собственные частоты колебаний стержня.

Графики изменения частот $\omega_n,\ n = \overline{1,5}$ в зависимости $l_1 = 0{,}5$ м от массы m для двух конфигураций: 1) $l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}35$ м, $l_3 = 0{,}15$ м; 2) $l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}1$ м, $l_3 = 0{,}4$ м приведены на Рисунке 4*а*,*б*. Для остальных конфигураций частоты ведут себя аналогично.



а) *б*)

Рисунок 4 – Зависимость частот $\omega_n,\ n=\overline{1,5}$ от массы m: *а* – конфигурация $l_1=0{,}5$ м, $l_2=0{,}35$ м, $l_3=0{,}15$ м; *б* – конфигурация $l_1=0{,}5$ м, $l_2=0{,}1$ м, $l_3=0{,}4$ м

Figure 4 – Dependence of frequencies $\omega_n,\ n=\overline{1,5}$ on mass m: *а* – configuration $l_1=0.5$ m, $l_2=0.35$ m, $l_3=0.15$ m; *б* – configuration $l_1=0.5$ m, $l_2=0.1$ m, $l_3=0.4$ m

В Таблице 2 приведены результаты расчета первых пяти собственных частот $\omega_n,\ n=\overline{1,5}$ для четырех конфигураций стержня: 1) $l_1=0{,}5$ м, $l_2=0{,}35$ м, $l_3=0{,}15$ м; 2) $l_1=0{,}5$ м, $l_2=0{,}2$ м, $l_3=0{,}3$ м; 3) $l_1=0{,}5$ м, $l_2=0{,}3$ м, $l_3=0{,}2$ м; 4) $l_1=0{,}5$ м, $l_2=0{,}1$ м, $l_3=0{,}4$ м и массы вставки $m=5$, 10, 15, 20, 25, 30 кг.

Таблица 2 – Частоты $\omega_n,\ n=\overline{1,5}$ в рад/с для четырех конфигураций стержня
Table 2 – Frequencies $\omega_n,\ n=\overline{1,5}$ in rad/s for four rod configurations

Конфигурация	***m*, кг**	**ω_1, рад/с**	**ω_2, рад/с**	**ω_3, рад/с**	**ω_4, рад/с**	**ω_5, рад/с**
l_1 = 0,5 м l_2 = 0,35 м l_3 = 0,15 м	5	74,0520	641,2680	2750,3011	4861,8731	7162,6211
	10	54,5068	487,8692	2654,2161	4658,3962	7087,2071
	15	45,1377	409,0095	2618,9861	4587,4442	7061,8394
	20	39,3734	359,0716	2600,7291	4551,3896	7049,1073
	25	35,3712	323,8436	2589,5647	4529,5734	7041,4519
	30	32,3844	297,2870	2582,0333	4514,9533	7036,3415
l_1 = 0,5 м l_2 = 0,2 м l_3 = 0,3 м	5	133,9385	929,6360	2595,8415	4718,9872	8832,1872
	10	74,3380	621,1647	1803,6489	3047,4079	7136,8957
	15	57,0758	545,7989	1577,4833	2794,4525	7066,7167
	20	48,0523	496,2773	1456,7499	2707,6119	7040,9969
	25	42,2869	458,6382	1383,7210	2664,9038	7026,9202
	30	38,1973	428,4398	1335,3629	2639,6879	7017,6035
l_1 = 0,5 м l_2 = 0,3 м l_3 = 0,2 м	5	74,3150	665,2040	2647,5769	3128,4722	7182,1647
	10	55,4285	523,5934	2591,6685	2843,1863	7097,2013
	15	46,1307	445,4478	2571,0823	2738,6593	7068,5311
	20	40,3453	394,2465	2560,0570	2684,8661	7054,1340
	25	36,3029	357,3989	2552,9671	2652,3330	7045,4763
	30	33,2739	329,2548	2547,8710	2630,7082	7039,6965
l_1 = 0,5 м l_2 = 0,1 м l_3 = 0,4 м	5	73,7551	478,5862	1762,0908	3223,3662	5090,0781
	10	58,4390	440,8622	1618,2480	3032,4095	4577,1626
	15	49,8654	423,7506	1500,1309	2915,6753	4355,4436
	20	44,2098	412,7817	1403,4240	2839,6781	4239,9316
	25	40,1230	404,4762	1323,9641	2787,6922	4170,8136
	30	36,9929	397,5788	1258,0205	2750,4407	4125,3071

Результаты расчета частот собственных колебаний, приведенные в Таблице 2 и на Рисунке 4*а*,*б* демонстрируют монотонное снижение для всех пяти частот с ростом массы вставки m. Также на снижение частот влияет и уменьшение длины l_2 жесткой вставки, так как это равносильно уменьшению изгибной жесткости стержня, что и обусловливает снижение собственных частот (Рисунок 4*а*,*б*).

Изменение значений частот в зависимости от массы m и длины вставки l_2 приведено в Таблицах 3, 4.

Таблица 3 – Частоты ω_n, $n = \overline{1,5}$ в рад/с для $l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}35$ м, $l_3 = 0{,}15$ м при $m = 5$ кг и $m = 30$ кг
Table 3 – Frequencies ω_n, $n = \overline{1,5}$ in rad/s for $l_1 = 0.5$ m, $l_2 = 0.35$ m, $l_3 = 0.15$ m at $m = 5$ kg and $m = 30$ kg

Частоты, рад/с	***m* = 5 кг**	***m* = 30 кг**	**Снижение, %**
ω_1	74,05200564	32,38440271	−56,27
ω_2	641,2679616	297,2870106	−53,64
ω_3	2750,301106	2582,033313	−6,12
ω_4	4861,873122	4514,95333	−7,14
ω_5	7162,621113	7036,341457	−1,76

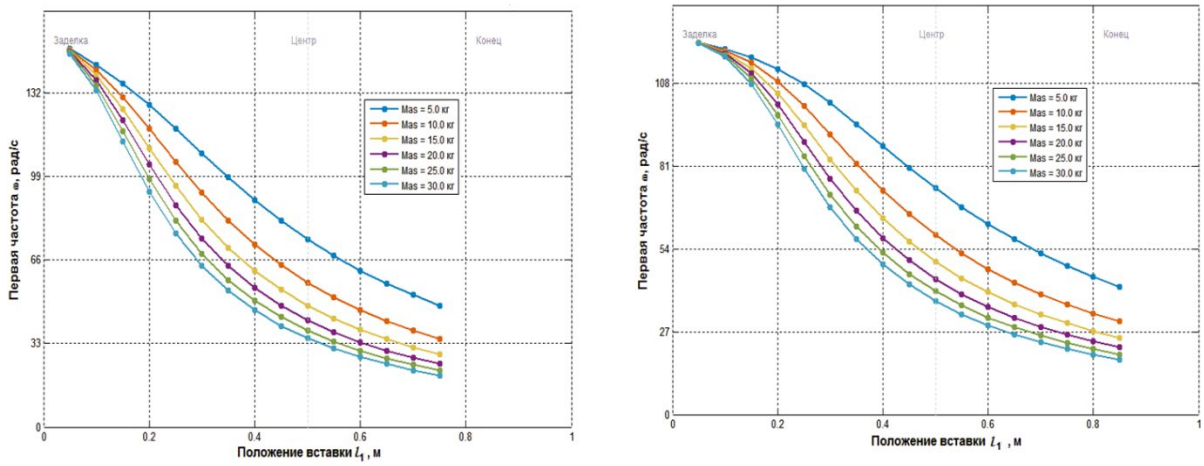
Таблица 4 – Частоты ω_n, $n = \overline{1,5}$ в рад/с для $l_1 = 0{,}5$ м, $l_2 = 0{,}1$ м, $l_3 = 0{,}4$ м при $m = 5$ кг и $m = 30$ кг
Table 4 – Frequencies ω_n, $n = \overline{1,5}$ in rad/s for $l_1 = 0.5$ m, $l_2 = 0.1$ m, $l_2 = 0.4$ m at $m = 5$ kg and $m = 30$ kg

Номер частоты	***m* = 5 кг**		***m* = 30 кг**	**Снижение, %**
ω_1	73,75512		36,99287	−49,84%
ω_2	478,5862		397,5788	−16,93%
ω_3	1762,091		1258,02	−28,61%
ω_4	3223,366		2750,441	−14,67%
ω_5	5090,078		4125,307	−18,95%

Таблицы 3, 4 показывают, что масса существенно влияет на частоты, особенно на низшие: ω_1 снижается на 50–56 %, ω_2 снижается на 17–54 %, а высшие частоты $\omega_3 - \omega_5$ снижаются на 2–29 %.

На Рисунке 5*а*,*б* представлены графики зависимости первой собственной частоты ω_1 от расстояния l_1 до начала жесткой вставки для значений массы вставки m в диапазоне от 5 до 30 кг для вставок с длинами $l_2 = 0{,}2$ м и $l_2 = 0{,}1$ м.

Максимальные значения частоты ω_1 для различных m достигается при расположении вставки рядом с заделкой. При смещении вставки к свободному концу частота ω_1 уменьшается.



а) *б*)

Рисунок 5 – Зависимость ω_1 консольной балки от расположения жесткой вставки: *а* – длина вставки $l_2 = s = 0{,}2$ м; *б* – длина вставки $l_2 = s = 0{,}1$ м

Figure 5 – Dependence of the first natural frequency ω_1 of a cantilever beam on the position of the rigid insert: *a* – insert length $l_2 = s = 0.2$ m; *b* – insert length $l_2 = s = 0.1$ m

Заключение

В работе построена математическая модель, описывающая свободные изгибные колебания балки, имеющей абсолютно жесткую массивную вставку. На основе построенной модели проведено исследование влияния параметров жесткой вставки (массы m, длины вставки s и расстояния l_1 от заделки до вставки) на спектр собственных частот консольной балки со свободным правым концом. Выяснено, что влиянию массы m, длины s и расстояния l_1 низшие частоты (ω_1, ω_2) более сильно подвержены, чем высшие частоты колебаний $(\omega_3, \omega_4, \omega_5)$.

Полученные в статье результаты могут быть использованы при проектировании стержневых конструкций для отстройки от резонанса путем изменения массы m, длины вставки s и ее расстояния до заделки l_1.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Васильев Б.Е., Магеррамова Л.А. Анализ влияния конфигурации бандажных полок лопаток турбин перспективных двигателей на прочностные характеристики. *Вестник УГАТУ*. 2015;19(3):28–32.
Vasilyev B.E., Magerramova L.A. Investigation of the shroud configuration influence of advanced turbine blades engines on strength characteristics. *Vestnik USATU*. 2015;19(3):28–32. (In Russ.).
2. Ле Т.З., Нестеренко В.Г. Методика проектирования профильной части бандажированных лопаток ротора турбины высокого давления ГТД. *Научно-технический вестник Поволжья*. 2017;(4):54–57. https://doi.org/10.24153/2079-5920-2017-7-4-54-57
Le T.D., Nesterenko V.G. Design methodology of the profiled part of the shrouded blades of the high-pressure turbine rotor of a gas turbine engine. *Scientific and Technical Volga region Bulletin*. 2017;(4):54–57. (In Russ.). https://doi.org/10.24153/2079-5920-2017-7-4-54-57
3. Белоусов А.И., Наздрачев С.В. Дефекты бандажированных лопаток высокотемпературных газовых турбин. *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева*. 2013;(3-2):15–21.

Belousov A.I., Nazdrachyov S.V. Defects of shrouded blade platforms of high-temperature gas turbines. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika S.P. Koroleva.* 2013;(3-2):15–21. (In Russ.).

4. Магеррамова Л.А. Конструктивные мероприятия, направленные на увеличение расчетной долговечности лопаток высокотемпературных турбин. *Вестник УГАТУ.* 2015;19(2):79–86.
   Magerramova L.A. The structural variations of high-temperature turbine blades for increase of its design life. *Vestnik USATU*. 2015;19(2):79–86. (In Russ.).
5. Ступина Н.Н., Шорр Б.Ф. Расчет частот и форм колебаний диска с закрученными лопатками, связанными антивибрационными полками. *Проблемы прочности*. 1978;(12):102–106.
6. Фарафонов Д.П., Базылева О.А., Рогалев А.М. Сплавы для упрочнения бандажных полок рабочих лопаток ГТД. *Труды ВИАМ.* 2016;(9):07. https://doi.org/10.18577/2307-6046-2016-0-9-7-7
   Farafonov D.P., Bazyleva O.A., Rogalev A.M. Alloys for blade shroud hardening. *Proceedings of VIAM*. 2016;(9):07. (In Russ.). https://doi.org/10.18577/2307-6046-2016-0-9-7-7
7. Павлов В.П., Нуратуллин Э.М., Нуратуллина Л.Р. Исследование влияния массового момента инерции и продольной силы на спектр частот свободных поперечных колебаний стержня. *Вестник Башкирского университета*. 2024;29(2):62–68. https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2024.2.2
   Pavlov V.P., Nusratullin E.M., Nusratullina L.R. Investigation of the influence of the mass moment of inertia and the longitudinal force on the frequency spectrum of free transverse vibrations of the rod. *Vestnik Bashkirskogo universiteta*. 2024;29(2):62–68. (In Russ.). https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2024.2.2
8. Нуратуллин Э.М., Нуратуллина Л.Р. Методика численного расчета частот собственных изгибных колебаний стержня с абсолютно жесткой промежуточной вставкой. *Вестник Башкирского университета*. 2026;31(1):20–27. https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2026.1.3
   Nusratullin E.M., Nusratullina L.R. Numerical method for calculating eigenfrequencies of bending vibrations of a rod with an absolutely rigid intermediate insert. *Vestnik Bashkirskogo universiteta*. 2026;31(1):20–27. (In Russ.). https://doi.org/10.33184/bulletin-bsu-2026.1.3
9. Комаров О.А., Дмитриев С.Ю., Даутов Д.Р., Оссиала В.Б.А. Потери КПД в турбине высокого давления с бандажированной рабочей лопаткой. *Вестник УГАТУ*. 2017;21(2):70–75.
   Komarov O.A., Dmitriev S.Yu., Dautow D.R., Ossiala W.B.A. Efficiency losses in high pressure turbines with shrouding. *Vestnik USATU*. 2017;21(2):70–75. (In Russ.).
10. Белоусов А.И., Наздрачев С.В. Определение области существования бандажированных лопаток высокоскоростных газовых турбин. *Насосы. Турбины. Системы.* 2020;(2):5–10.
    Belousov A.I., Nazdrachev S.V. Defining the field of existence of shrouded blades in high-speed gas turbines. *Nasosy. Turbiny. Sistemy.* 2020;(2):5–10. (In Russ.).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ / INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Павлов Виктор Павлович, профессор кафедры сопротивления материалов, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Российская Федерация.
e-mail: victor.pavlov.51@yandex.ru

Viktor P. Pavlov, Professor at the Department of Strength of Materials, Ufa University of Science and Technology, Ufa, the Russian Federation.

Нусратуллина Лилия Ринатовна, старший преподаватель кафедры искусственного интеллекта и перспективных математических исследований, Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Российская Федерация.
e-mail: mardliliya@yandex.ru
ORCID: 0009-0007-2038-4805

Liliya R. Nusratullina, Senior Lecturer at the Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research, Ufa University of Science and Technology, Ufa, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 04.08.2026; одобрена после рецензирования 12.10.2026; принята к публикации 19.10.2026.

The article was submitted 04.08.2026; approved after reviewing 12.10.2026; accepted for publication 19.10.2026.