

УДК 681.5.013

DOI: [10.26102/2310-6018/2026.61.10.012](https://doi.org/10.26102/2310-6018/2026.61.10.012)

Метод синтеза непрерывных локально-оптимальных управлений в маховичных системах стабилизации вращения

А.А. Хрусталеv✉

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Санкт-Петербург, Российская Федерация*

Резюме. Статья посвящена моделированию системы автоматического управления вращательным движением, применяющей двигатели-маховики для формирования управляющего вращательного момента. Сформулирован метод дискретизации уравнений динамики объекта управления, учитывающих производные управляющих воздействий, при задании как кусочно-постоянных, так и кусочно-линейных входных воздействий. Предложен метод вычисления оптимальных на каждом шаге стабилизирующих управлений, учитывающий ограничение на непрерывность кусочно-линейных управлений. Глобальная непрерывность угловых скоростей маховиков обеспечивается учетом в коэффициентах их линейных функций приращений управлений на предыдущих шагах (в предположении влияния на динамику системы только угловых скоростей маховиков). Вычисление локально-оптимальных управлений осуществлено с применением метода множителей Лагранжа. В результате синтеза установлено, что рассматриваемая дискретная система является нестационарной, как и матрицы суммарного функционала качества управлений. Сформулированный метод вычисления суммарного функционала качества учитывает ограничение на непрерывность кусочно-линейных управлений. Вычислен оператор локально-оптимальных управлений, доставляющий минимум дискретному функционалу качества на каждом шаге моделирования системы. Результаты моделирования показывают, что оператор управлений позволяет решить задачу стабилизации углов отклонения объекта управления около положения равновесия за установленное конечное время. Продемонстрированы отличия в характере переходных процессов в зависимости от способа задания матриц суммарного функционала качества процессов. Результаты работы представляют теоретическую значимость для решения задач синтеза дискретных систем с кусочно-линейными глобально-непрерывными управлениями.

Ключевые слова: теория автоматического управления, системы стабилизации, нестационарные дискретные системы, маховичная система ориентации, локально-оптимальные управления.

Для цитирования: Хрусталеv А.А. Метод синтеза непрерывных локально-оптимальных управлений в маховичных системах стабилизации вращения. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2026;14(10). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=2590> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.61.10.012

The method of synthesis of continuous locally optimal controls in reaction wheel attitude stabilization systems

A.A. Khrustalev✉

*Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg,
the Russian Federation*

Abstract. The article is devoted to modeling a system of automatic control of rotational motion that employs reaction wheels to generate control torque. A method is formulated for discretizing the dynamics equations of the control object, which take into account the derivatives of control actions, for both piecewise-constant and piecewise-linear input actions. A method is proposed for calculating stabilizing controls that are optimal at each step and that accounts for the continuity constraint on

piecewise-linear controls. The global continuity of the flywheels' angular velocities is ensured by taking into account, in the coefficients of their linear functions, the control increments at previous steps (assuming that only the flywheels' angular velocities affect the system dynamics). The locally optimal controls are calculated using the Lagrange multiplier method. As a result of the synthesis, it is established that the discrete system under consideration is nonstationary, as are the matrices of the total control quality functional. The formulated method for calculating the total quality functional accounts for the continuity constraint on piecewise-linear controls. A locally optimal control operator is calculated that delivers the minimum to the discrete quality functional at each step of the system simulation. The simulation results show that the control operator makes it possible to solve the problem of stabilizing the deflection angles of the control object in the vicinity of the equilibrium position within a specified finite time. Differences in the nature of the transient processes are demonstrated depending on how the matrices of the total process quality functional are defined. The results of the work are of theoretical significance for solving synthesis problems of discrete systems with globally continuous piecewise-linear controls.

Keywords: automatic control theory, stabilization systems, nonstationary discrete systems, reaction wheel attitude control system, locally optimal controls.

For citation: Khrustalev A.A. The method of synthesis of continuous locally optimal controls in reaction wheel attitude stabilization systems. *Modeling, Optimization and Information Technology*. 2026;14(10). (In Russ.). URL: <https://moitvvt.ru/ru/journal/article?id=2590> DOI: 10.26102/2310-6018/2026.61.10.012

Введение

В настоящее время двигатели-маховики нашли широкое применение в таких задачах управления вращением, как ориентация космических аппаратов, то есть стабилизация их осей относительно определенных направлений [1]. К основным достоинствам маховичных систем относят высокую точность ориентации и отсутствие необходимости в расходе рабочего тела за счет использования электродвигателей-маховиков в качестве управляющих устройств [2]. Недостатком маховичных систем является необходимость их разгрузки вследствие накопления маховиками «избыточного кинетического момента» [3].

Современные маховичные системы зачастую применяют для формирования управляющего момента заранее заданные пропорционально-дифференциальные регуляторы. Так, в работе [3] в качестве закона управления предлагается использовать пропорционально-дифференциальный регулятор, вычисляемый на основе результатов интерполяции угловых скоростей космического аппарата. В работе [4] предлагается способ импульсного разгона и торможения маховиков до достижения некоторого максимального управляющего момента, при этом не производится вычисление оптимальных с точки зрения энергозатрат максимальных значений управляющего момента.

В данной работе предлагается рассматривать модель системы ориентации в пространстве состояний, в которой управления определяются угловыми скоростями вращения маховиков, что позволит учесть в операторе управления требования к скорости стабилизации и величине энергозатрат. Требуется сформировать дискретную модель маховичной системы ориентации в пространстве состояний, учитывающую влияние производных управляющих воздействий на динамику объекта управления, и вычислить оператор непрерывных кусочно-линейных локально-оптимальных управлений, обеспечивающий стабилизацию состояний объекта управления около положения равновесия. Рассмотрение системы в дискретном времени позволяет исключить необходимость интерполяции состояний объекта, которая необходима для вычисления гладких управляющих моментов в [3]. Непрерывность управлений

позволяет избежать необходимости их разгрузки между итерациями формирования управляющих моментов. Благодаря оптимизации управлений на каждом шаге их вычисления возможно изменение требований к качеству стабилизации и величине энергозатрат в процессе ориентации.

Материалы и методы

Рассматривается объект управления, модель которого в пространстве состояний представима в виде:

$$\dot{x} = Ax + M, \quad (1)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n(C_{[t_0;T]}^1)$ – вектор координат состояний, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица системы, $M = M(t) \in \mathbb{R}^n(C_{[t_0;T]}^1)$ – вектор управляющего вращательного момента. Модель (1) может описывать динамику вращательного движения таких объектов, как космический аппарат-гиростат, где в качестве управляющего момента используется кинетический момент двигателей-маховиков [5]. Управляющий момент M_{wi} , создаваемый маховиком относительно оси i , имеет¹ вид:

$$M_{wi} = J_{wi}\dot{\xi}_{wi}, \quad (2)$$

где $J_{wi} \in \mathbb{R}$ – момент инерции маховика, $\xi_{wi} = \xi_{wi}(t) \in C_{[t_0;T]}^1$ – угловая скорость вращения маховика. Рассматривается случай, когда угловые скорости ξ_{wi} являются компонентами вектора управлений $u = u(t) \in \mathbb{R}^m(C_{[t_0;T]}^1)$, а модель системы автоматического управления в пространстве состояний задана системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = Ax + S\dot{u} + Bu, \quad (3)$$

где $S \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрица передач производных управлений, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ – матрица передач управлений. Внедрение в модель производных управлений по времени $\dot{u}$ обусловлено необходимостью учета в системе законов выражения управлений наподобие (2).

Далее осуществляется дискретизация системы (3) для кусочно-постоянных и кусочно-линейных управлений. Задача Коши для системы (3) имеет вид:

$$\dot{x} = Ax + S\dot{u} + Bu, \quad (4)$$

$$x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

$$t \in [t_0; T]. \quad (6)$$

В соответствии с интегральной формулой Коши решение задачи (4) с учетом (5), (6), имеет вид:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}(S\dot{u}(\tau) + Bu(\tau))d\tau. \quad (7)$$

В силу линейности интегрального оператора решение (7) может быть представлено в виде:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}S\dot{u}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (8)$$

Рассмотрим первый интеграл в (8). Введение множителей

$$f = e^{-A\tau}, v = e^{At}Su(\tau), df = -Ae^{-A\tau}d\tau, dv = e^{At}S\dot{u}(\tau)d\tau \quad (9)$$

¹ Боднер В.А. Системы управления летательными аппаратами. Москва: Машиностроение; 1973. 506 с.

позволяет привести первый интеграл в (8) к виду:

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} S \dot{u}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} e^{At} S \dot{u}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f dv. \quad (10)$$

При интегрировании по частям (10) примет вид:

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} S \dot{u}(\tau) d\tau = e^{-A\tau} e^{At} S u(\tau) \Big|_{t_0}^t + A \int_{t_0}^t e^{-A\tau} e^{At} S u(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Таким образом,

$$\int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} S \dot{u}(\tau) d\tau = S u(t) - e^{A(t-t_0)} S u(t_0) + A \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} S u(\tau) d\tau. \quad (12)$$

В силу (12) решение (7) примет вид:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x^0 + S u(t) - e^{A(t-t_0)} S u(t_0) + \int_{t_0}^t (A e^{A(t-\tau)} S + e^{A(t-\tau)} B) u(\tau) d\tau. \quad (13)$$

Если в (8) вынести множитель e^{At} за знак интеграла, и в (9) определить $f = e^{-A\tau}$, $v = S u(\tau)$, то аналогично получим:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x^0 + S u(t) - e^{A(t-t_0)} S u(t_0) + \int_{t_0}^t (e^{At} A e^{-\tau} S + e^{A(t-\tau)} B) u(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Рассмотрим решение (14) для кусочно-постоянных управлений:

$$u(\tau) = b_k \in \mathbb{R}^m, \tau \in [kh; (k+1)h], k \in \{0, 1, 2, \dots\}, h \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

В работе [6] приведены ограничения на время изменения скорости вращения маховика ξ_{wi} при переходе от шага (k) к шагу $(k+1)$, которые необходимо учитывать для обеспечения устойчивости системы управления. Далее в данной работе накладывается ограничение непрерывности на кусочно-линейные управления для дискретной системы. При управлениях вида (15) на отрезке $t_0 = kh$, $t = (k+1)h$ с учетом

$$x_k = x(t_0) = x(kh) \in \mathbb{R}^n, x_{k+1} = x(t) = x((k+1)h) \in \mathbb{R}^n \quad (16)$$

соотношение (14) примет вид:

$$x_{k+1} = e^{Ah} x_k + S b_k - e^{Ah} S b_k + \int_{kh}^{(k+1)h} (e^{A(k+1)h} A e^{-A\tau} S + e^{-A\tau} e^{A(k+1)h} B) b_k d\tau. \quad (17)$$

Интеграл матричной экспоненты вычисляется по определению:

$$\begin{aligned} \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-A\tau} d\tau &= \int_{kh}^{(k+1)h} \left(E_n - A\tau + \frac{A^2 \tau^2}{2!} - \frac{A^3 \tau^3}{3!} + \dots \right) d\tau = \\ &= \left(\tau - \frac{A\tau^2}{2!} + \frac{A^2 \tau^3}{3!} - \frac{A^3 \tau^4}{4!} + \dots \right) \Big|_{kh}^{(k+1)h} = -A^{-1} (e^{-A\tau} - E_n) \Big|_{kh}^{(k+1)h} = \\ &= A^{-1} (e^{-Akh} - e^{-A(k+1)h}). \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (18) решение (17) примет вид:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= e^{Ah} x_k + S b_k - e^{Ah} S b_k + e^{A(k+1)h} (e^{-Akh} - e^{-A(k+1)h}) S b_k + \\ &+ A^{-1} (e^{-Akh} - e^{-A(k+1)h}) e^{A(k+1)h} B b_k, \end{aligned} \quad (19)$$

тогда

$$x_{k+1} = e^{Ah} x_k + A^{-1} (e^{Ah} - E_n) B b_k. \quad (20)$$

Таким образом, при кусочно-постоянных управлениях (15) динамика системы (3) в дискретном времени определяется стационарной системой линейных разностных уравнений:

$$x_{k+1} = Hx_k + Fb_k. \quad (21)$$

где $H = e^{Ah} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F = A^{-1}(e^{Ah} - E_n)B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. При этом погружение в данную модель управляющих моментов вида (2) приведет к отсутствию влияния управляющего момента маховиков на состояние объекта управления, так как производная по времени постоянных управлений (15) на отрезке $\tau \in [kh; (k+1)h]$ равна нулю. По этой причине предлагается рассмотреть решение (7) для кусочно-линейных управлений:

$$u(\tau) = a_k\tau + b_k, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}^m, \quad \tau \in [kh; (k+1)h], \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\}, \quad h \in \mathbb{R}. \quad (22)$$

На концах отрезка $\tau \in [kh; (k+1)h]$ управления (22) принимают вид:

$$u(t_0) = a_k kh + b_k, \quad u(t) = a_k(k+1)h + b_k. \quad (23)$$

С учетом (16), (23) соотношение (13) для кусочно-линейных управлений (22) примет вид:

$$x_{k+1} = e^{Ah}x_k + (k+1)hSa_k + Sb_k - khe^{Ah}Sa_k - e^{Ah}Sb_k + \\ + A \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-A\tau} e^{A(k+1)h} S(a_k\tau + b_k) d\tau + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-A\tau} e^{A(k+1)h} B(a_k\tau + b_k) d\tau. \quad (24)$$

Интеграл произведения матричной экспоненты на переменную с учетом

$$f = \tau, \quad v = -A^{-1}(e^{-A\tau} - E_n), \quad df = d\tau, \quad dv = e^{-A\tau} d\tau \quad (25)$$

вычисляется интегрированием по частям:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} e^{-A\tau} \tau d\tau = \int_{kh}^{(k+1)h} f dv = -A^{-1}(e^{-A\tau} - E_n)\tau|_{kh}^{(k+1)h} + \\ + A^{-1} \int_{kh}^{(k+1)h} e^{-A\tau} d\tau - A^{-1} \int_{kh}^{(k+1)h} E_n d\tau. \quad (26)$$

С учетом (18) соотношение (26) примет вид:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} e^{-A\tau} \tau d\tau = hA^{-1}(ke^{-Akh} - (k+1)e^{-A(k+1)h} + E_n) + \\ + A^{-2}(e^{-Akh} - e^{-A(k+1)h}) - hA^{-1}. \quad (27)$$

Приведя подобные, получим:

$$\int_{kh}^{(k+1)h} e^{-A\tau} \tau d\tau = A^{-1}(khE_n - (k+1)he^{-Ah} + A^{-1} - A^{-1}e^{-Ah})e^{-Akh}. \quad (28)$$

Тогда с учетом (18), (28) решение (24) примет вид:

$$x_{k+1} = e^{Ah}x_k + (k+1)hSa_k + Sb_k - khe^{Ah}Sa_k - e^{Ah}Sb_k + \\ + (khe^{Ah} - (k+1)hE_n + A^{-1}e^{Ah} - A^{-1})Sa_k + (e^{Ah} - E_n)Sb_k + \\ + A^{-1}(khe^{Ah} - (k+1)hE_n + A^{-1}e^{Ah} - A^{-1})Ba_k + A^{-1}(e^{Ah} - E_n)Bb_k. \quad (29)$$

Приведя подобные, получим:

$$x_{k+1} = e^{Ah}x_k + A^{-1}(e^{Ah} - E_n)Sa_k + A^{-1}(e^{Ah} - E_n)Bb_k + \\ + (khA^{-1}(e^{Ah} - E_n) + A^{-1}(A^{-1}(e^{Ah} - E_n) - hE_n))Ba_k. \quad (30)$$

Таким образом, при кусочно-линейных управлениях (22) динамика системы (3) в дискретном времени определяется нестационарной системой линейных разностных уравнений:

$$x_{k+1} = Hx_k + \Omega_k a_k + Fb_k, \quad (31)$$

где $H = e^{Ah} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F = A^{-1}(e^{Ah} - E_n)B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а матрица передач коэффициентов a_k управлений $\Omega_k = RS + khRB + A^{-1}(R - hE_n)B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, где $R = A^{-1}(e^{Ah} - E_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Матрица Ω_k не является постоянной и должна вычисляться повторно на каждом шаге решения системы (31).

Далее рассматривается модель вращения космического аппарата вокруг своего центра масс, динамика которого в дискретном времени описывается разностной схемой (31). В соответствии с [7] уравнения движения абсолютно твердого тела вокруг своего центра масс при малых угловых отклонениях и малых угловых скоростях, при учете влияния на объект гравитационного вращательного момента [8] имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_1 &= J_1^{-1}\omega_0(J_3 - J_1 - J_2)\dot{\varepsilon}_2 + 4J_1^{-1}\omega_0^2(J_2 - J_3)\varepsilon_1 + J_1^{-1}M_1, \\ \ddot{\varepsilon}_2 &= -J_2^{-1}\omega_0(J_3 - J_1 - J_2)\dot{\varepsilon}_1 + J_2^{-1}\omega_0^2(J_1 - J_3)\varepsilon_2 + J_2^{-1}M_2, \\ \ddot{\varepsilon}_3 &= 3J_3^{-1}\omega_0^2(J_2 - J_1)\varepsilon_3 + J_3^{-1}M_3, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in C_{[t_0; T]}^2$ – углы отклонения осей связанной с объектом системы координат от осей базовой (целевой) системы координат, $J_1, J_2, J_3 \in \mathbb{R}$ – главные моменты инерции аппарата, $\omega_0 \in \mathbb{R}$ – угловая скорость вращения аппарата по круговой орбите, $M_1, M_2, M_3 \in C_{[t_0; T]}$ – компоненты вектора управляющего момента (1). Ограничения модели (32) следующие: объект представляет собой абсолютно твердое тело, объект движется по круговой орбите, а также на объект действуют только гравитационный и управляющий вращательные моменты.

Пусть управляющий момент задан как (1). Пусть вектор координат состояний имеет вид:

$$x = (\dot{\varepsilon}_1 \quad \dot{\varepsilon}_2 \quad \dot{\varepsilon}_3 \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3) \in \mathbb{R}^n(C_{[t_0; T]}^1), n = 6, \quad (33)$$

матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\omega_0(J_3 - J_1 - J_2)}{J_1} & 0 & \frac{4\omega_0^2(J_2 - J_3)}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{-\omega_0(J_3 - J_1 - J_2)}{J_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_0^2(J_1 - J_3)}{J_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3\omega_0^2(J_2 - J_1)}{J_3} \\ E_{3 \times 3} & & & 0_{3 \times 3} & & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (34)$$

вектор управлений u и матрица передач производных управлений S и управлений B имеют вид:

$$u = \begin{pmatrix} \xi_{w1} \\ \xi_{w2} \\ \xi_{w3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m(C_{[t_0; T]}^1), S = \begin{pmatrix} \text{diag} \left\{ \frac{J_{wi}}{J_i} \right\}_{i=1}^m \\ 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, B = 0_{n \times m}, m = 3, \quad (35)$$

тогда система (32) представима в виде:

$$\dot{x} = Ax + Su. \quad (36)$$

Как показано выше, в дискретном времени система (36) при кусочно-линейных управлениях (22) имеет вид (31). Введем ограничение непрерывности кусочно-линейных управлений (22):

$$u((k+1)h) = (k+1)ha_k + b_k = (k+1)ha_{k+1} + b_{k+1}, k \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (37)$$

Так как матрица F передач коэффициентов b_k нулевая в силу (35), учет ограничения (37) возможен при задании b_{k+1} вида:

$$b_{k+1} = b_k + (k+1)h(a_k - a_{k+1}). \quad (38)$$

Тогда b_k представим в виде:

$$b_k = kh(a_{k-1} - a_k) + (k-1)h(a_{k-2} - a_{k-1}) + (k-2)h(a_{k-3} - a_{k-2}) + \dots + b_0, \\ b_k = -kha_k + h \sum_{i=0}^{k-1} a_i + b_0. \quad (39)$$

Так как вектор b_0 не влияет на динамику системы при (35), пусть $b_0 = 0_m$.

Далее осуществляется постановка задачи синтеза локально-оптимальных управлений стабилизации системы (31). Рассмотрим функционал качества управлений:

$$J_u(u) = \int_{t_0}^T u(\tau)^T D u(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^K \int_{kh}^{(k+1)h} (a_k \tau + b_k)^T D (a_k \tau + b_k) d\tau, \quad (40)$$

где $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $D = D^T$ – положительно определенная матрица, $K \in \mathbb{N}$ – количество итераций моделирования системы (31). При вычислении интегралов в (40) на каждом шаге решения функционал $J_u(u)$ примет вид:

$$J_u(u) = \sum_{k=0}^K \int_{kh}^{(k+1)h} (a_k^T D a_k \tau^2 + 2a_k^T D b_k \tau + b_k^T D b_k) d\tau = \\ = \sum_{k=0}^K \left(h^3 \left(k^2 + k + \frac{1}{3} \right) a_k^T D a_k + h^2 (2k+1) a_k^T D b_k + h b_k^T D b_k \right) = \sum_{k=0}^K J_{uk}. \quad (41)$$

Слагаемые $J_{uk} \in \mathbb{R}$ суммы (41) в силу (39) имеют вид:

$$J_{uk} = h^3 \left(k^2 + k + \frac{1}{3} \right) a_k^T D a_k + h^2 (2k+1) a_k^T D (h\bar{a}_k - kha_k) + \\ + h(h\bar{a}_k - kha_k)^T D (h\bar{a}_k - kha_k), \quad (42)$$

где $\bar{a}_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i \in \mathbb{R}^m$, $\bar{a}_0 = 0_m$. Таким образом, значения слагаемых функционала $J_u(u)$ учитывают все вычисленные ранее коэффициенты управлений при задании коэффициентов b_k в виде (38). Приведа подобные, получим:

$$J_{uk} = h^3 \left(\frac{1}{3} a_k^T D a_k + \bar{a}_k^T D a_k + \bar{a}_k^T D \bar{a}_k \right). \quad (43)$$

Рассмотрим сумму:

$$\sum_{k=0}^K (\bar{a}_k^T D a_k + \bar{a}_k^T D \bar{a}_k) = (a_0^T D a_1 + a_0^T D a_0) + (a_0^T D a_2 + a_1^T D a_2 + \\ + a_0^T D a_0 + 2a_0^T D a_1 + a_1^T D a_1) + \dots + \sum_{i=0}^{K-1} a_i^T D a_K + \sum_{i=0}^{K-1} a_i^T D \sum_{i=0}^{K-1} a_i = \\ = \sum_{k=0}^K \left((K-k) a_k^T D a_k + (2(K-k)+1) \bar{a}_k^T D a_k \right). \quad (44)$$

В силу (43), (44) функционал (41) примет вид:

$$J_u(u) = \int_{t_0}^T u(\tau)^T D u(\tau) d\tau = h^3 \sum_{k=0}^K (a_k^T D_k a_k + \bar{w}_k^T a_k), \quad (45)$$

где $D_k = \left(K - k + \frac{1}{3} \right) D \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $D_k = D_k^T$, D_k – положительно определенная матрица, $\bar{w}_k = (2(K-k)+1) D \bar{a}_k \in \mathbb{R}^m$.

Таким образом, слагаемые (45) могут быть использованы в целевом функционале $\varphi(u_k) = \varphi(a_k): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ следующей задачи локально-оптимальной стабилизации. Требуется вычислить:

$$a_k^* = \arg \min \{ \varphi(a_k) = x_{k+1}^T Q_k x_{k+1} + a_k^T D_k a_k + \bar{w}_k^T a_k | x_{k+1} = Hx_k + \Omega_k a_k \}, \quad (46)$$

где $Q_k = Q_k^T \in \mathbb{R}^n$ – положительно определенная матрица, D_k и $\bar{w}_k$ определены в (45).

В работе [9] предлагается использование метода множителей Лагранжа для решения задач смежных классов. В рамках предложенного в работе [9] подхода управления вычисляются на основе проекционных операторов из конечномерного пространства «составных» векторов состояний-управлений $\mathbb{R}^{n+m}$ в линейное многообразие, определяемое системой (31). При решении данной задачи с учетом ограничений на компоненты вектора состояний и вектора управлений оператор управления представляет собой параметризованный множителями Лагранжа проектор. В данной работе рассматривается задача без ограничений на величины векторов x_{k+1} и a_k . Пусть «составной» вектор координат имеет вид:

$$z_k = U_k^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, U_k = \begin{pmatrix} Q_k & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & D_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, N = n + m, \quad (47)$$

где $U_k = U_k^T$ – положительно определенная матрица. Уравнения динамики системы в (46) представимы в виде линейного многообразия:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = Hx_k + \Omega_k a_k &\Leftrightarrow (E_{n \times n} \quad -\Omega_k) U_k^{-\frac{1}{2}} U_k^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = Hx_k \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V_k z_k = p_k, V_k = (E_{n \times n} \quad -\Omega_k) U_k^{-\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}^{n \times N}, p_k = Hx_k \in \mathbb{R}^n, \text{rank}(V_k) = m. \end{aligned} \quad (48)$$

Пусть

$$w_k = U_k^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0_n \\ \bar{w}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N \Leftrightarrow \bar{w}_k^T a_k = (0_{1 \times n} \quad \bar{w}_k^T) U_k^{-\frac{1}{2}} U_k^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = w_k^T z_k. \quad (49)$$

Тогда с учетом (47), (48), (49) задача (46) представима в виде: вычислить

$$z_k^* = \arg \min \left\{ \varphi(z_k) = z_k^T z_k + w_k^T z_k \mid \begin{matrix} V_k z_k = p_k, \\ V_k \in \mathbb{R}^{n \times N}, p_k \in \mathbb{R}^n \end{matrix} \right\} \in \mathbb{R}^N. \quad (50)$$

Функция Лагранжа для задачи (50) имеет вид:

$$\mathcal{L}(z_k, \lambda) = z_k^T z_k + w_k^T z_k + \lambda^T (V_k z_k - p_k), \lambda \in \mathbb{R}^n. \quad (51)$$

Равенство частных производных функции Лагранжа (51) нулю определяет систему необходимых условий решения задачи (50):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(z_k, \lambda)}{\partial z_k} &= 2z_k + w_k + V_k^T \lambda = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(z_k, \lambda)}{\partial \lambda} &= V_k z_k - p_k = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Умножение первого уравнения в (52) на V_k слева с учетом второго уравнения в (52) позволяет получить выражение для вектора множителей Лагранжа:

$$\lambda = -(V_k V_k^T)^{-1} (V_k w_k + 2p_k). \quad (53)$$

С учётом соотношения (53) и второго уравнения (52):

$$2z_k + (E_N - V_k^T (V_k V_k^T)^{-1} V_k) w_k - 2V_k^T (V_k V_k^T)^{-1} p_k = 0. \quad (54)$$

С учетом обозначений:

$$P_k^+ = V_k^T (V_k V_k^T)^{-1} \in \mathbb{R}^{N \times n}, P_k^0 = E_N - V_k^T (V_k V_k^T)^{-1} V_k \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad (55)$$

в силу (54) решение задачи (50) имеет вид:

$$z_k^* = P_k^+ p_k - \frac{1}{2} P_k^0 w_k. \quad (56)$$

Таким образом, в соответствии с (47), (48), (49), (56) оператор локально-оптимальных стабилизирующих управлений с обратной связью для системы (31) имеет вид:

$$a_k^* = a_k^*(x_k) = T_a P_k^+ H x_k - \frac{1}{2} T_a P_k^0 U_k^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0_n \\ \bar{w}_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad (57)$$

где $T_a = (0_{m \times n} \ E_m) \in \mathbb{R}^{m \times N}$ – «фильтрующая» матрица, операторы P_k^+ , P_k^0 определены в (55), компоненты матрицы функционала качества U_k определены в (45), (46), (47), вектор $\bar{w}_k$ определяется суммой компонент вектора управлений предыдущих итераций в (42), (45).

Результаты

Осуществлено моделирование переходных процессов маховичной системы ориентации (36) с локально-оптимальными управлениями (57). Пусть главные моменты инерции аппарата [4] в кг·м² равны:

$$J_1 = 7,08, J_2 = 10,83, J_3 = 9,75. \quad (58)$$

Пусть угловая скорость вращения аппарата по круговой орбите $\omega_0 = 1,18 \cdot 10^{-3}$ рад/с, что соответствует земной орбите высотой 200 км, а моменты инерции маховиков [10] в кг·м²:

$$I_1 = I_2 = I_3 = 0,3. \quad (59)$$

Пусть время моделирования $t \in [0; T]$, $T = 500$ с, период дискретизации $h = 1$ с, тогда количество итераций моделирования $K = 500$. Пусть начальные условия $x^0 = 10^{-2} \cdot (-0,8 \ -1 \ 1,2 \ -1 \ -1 \ 1,2)^T$, где первые 3 компоненты в соответствии с (33) отражают начальные угловые ускорения в рад/с², а вторые 3 компоненты – начальные угловые скорости в рад/с. Пусть матрицы функционала качества (46):

$$Q_k = 10kE_n, D = 500^{-1}E_m, D_k = \left(K - k + \frac{1}{3}\right)D. \quad (60)$$

На первой итерации моделирования матрица качества управлений $D_0 \approx E_m$, при приближении к конечному времени моделирования $T = 500$ секунд ее коэффициенты уменьшаются до $D_{K-1} = 375^{-1}E_m$, при этом коэффициенты матрицы качества состояния системы увеличиваются от $Q_1 = 10E_n$ до $Q_K = 5 \cdot 10^3 E_n$. Таким образом, с течением времени моделирования требования к затратам энергии маховиков ослабляются, а требования к скорости стабилизации угловых скоростей и отклонений увеличиваются. При указанных параметрах система (36) с локально-оптимальными управлениями (57) асимптотически устойчива, углы отклонения по трем осям стабилизируются в окрестности положения равновесия (Рисунок 1).

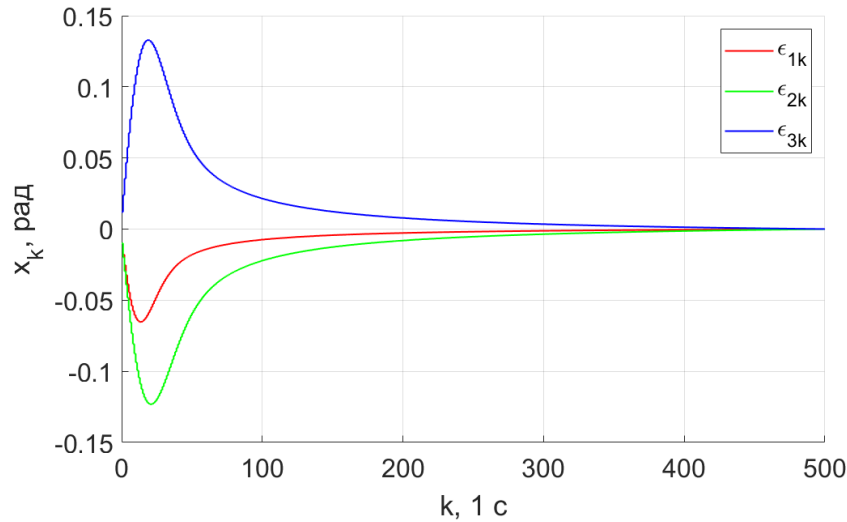


Рисунок 1 – Переходный процесс системы ориентации с локально-оптимальными управлениями

Figure 1 – Transient response of locally optimal attitude control system

При этом непрерывные кусочно-линейные управления, определяемые угловой скоростью вращения маховиков, достигают стационарных значений (Рисунок 2). Таким образом, дальнейшее управление ориентацией требует разгрузки маховиков.

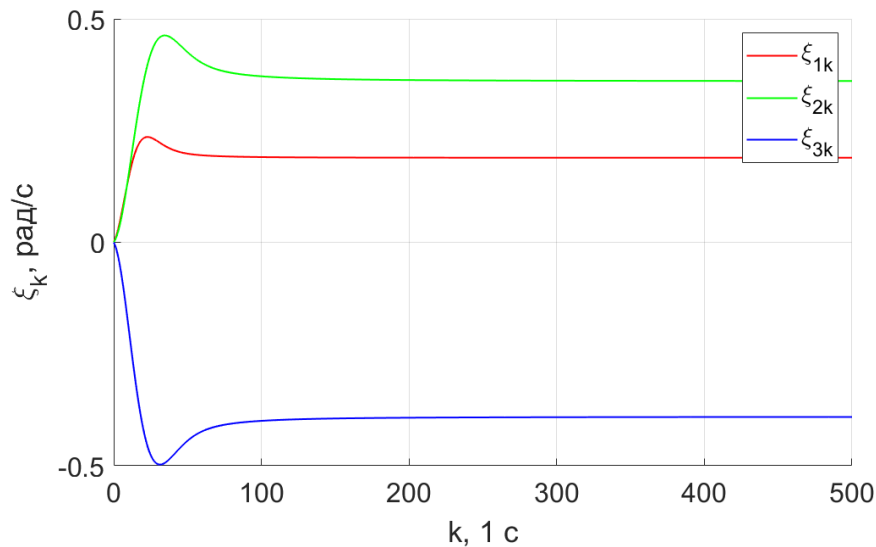


Рисунок 2 – Динамика угловой скорости вращения маховиков при стабилизации

Figure 2 – Flywheel angular velocity during stabilization process

Ослабление требований к скорости стабилизации вместе с увеличением коэффициентов качества управлений, как при

$$Q_k = kE_n, D = 300^{-1}E_m, D_k = \left(K - k + \frac{1}{3}\right)D, \quad (61)$$

приводит к увеличению времени установления углов отклонения примерно в 2 раза, а также к увеличению амплитуды их колебаний примерно в 3 раза (Рисунок 3). При этом наблюдается более длительное угловое ускорение двигателей-маховиков до стационарных значений угловой скорости (Рисунок 4).

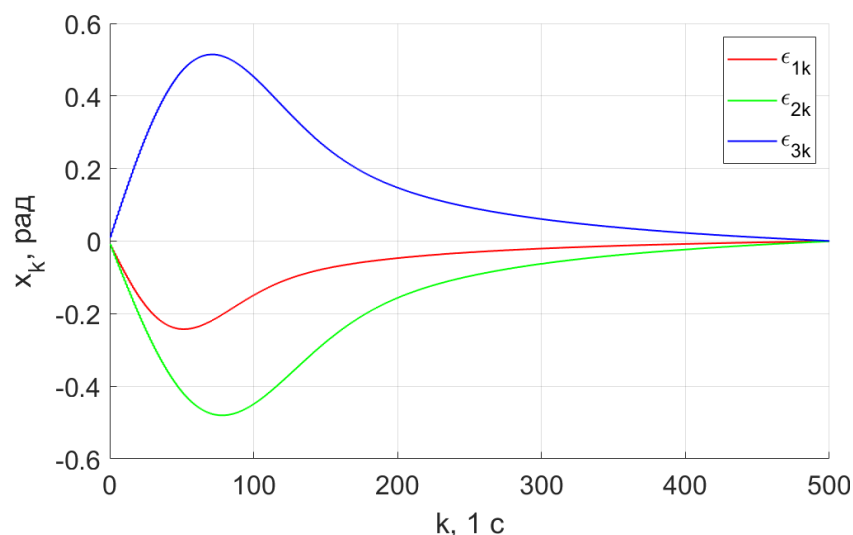


Рисунок 3 – Переходный процесс системы ориентации при смягчении требований к скорости стабилизации

Figure 3 – Transient response of attitude control system when the stabilization speed restrictions are loosened

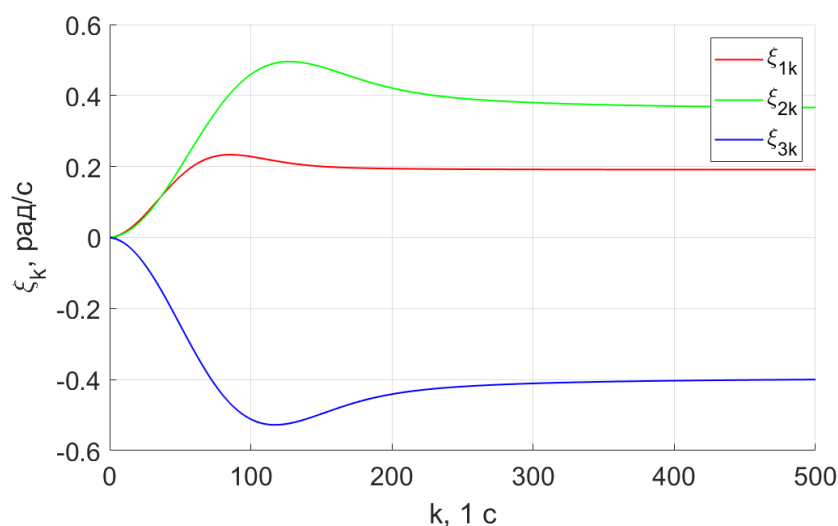


Рисунок 4 – Динамика угловой скорости вращения маховиков при смягчении требований к скорости стабилизации

Figure 4 – Flywheel angular velocity when the stabilization speed restrictions are loosened

Угловые скорости, которых достигают маховики при достижении системой состояния равновесия, совпадают с соответствующими величинами при задании параметров качества (60), но очевидно увеличение амплитуды угловых скоростей в процессе стабилизации.

Обсуждение и заключение

В статье разработана модель системы автоматической стабилизации вращательного движения, учитывающая влияние производных управляющих воздействий. На основе интегрирования соответствующей системы дифференциальных уравнений с применением кусочно-линейных управлений сформирована дискретная система управления в пространстве состояний, определяемая нестационарной системой линейных разностных уравнений. Кусочно-линейные управления вычисляются с учетом

ограничения на их глобальную непрерывность в предположении влияния на динамику объекта управления только их производных. Вычислен суммарный функционал качества управлений с учетом ограничения на их непрерывность. Итоговый функционал качества представляет собой сумму матричной квадратичной формы и линейной комбинации компонент вектора управлений, коэффициенты которой зависят от управлений предыдущих итераций. Сформирован оператор локально-оптимальных управлений в смысле минимума данного суммарного функционала качества.

В качестве объекта управления рассматривается маховичная система ориентации космического аппарата, в которой управляющий вращательный момент определяется угловыми ускорениями двигателей-маховиков. Непрерывность управлений позволяет не осуществлять разгрузку маховиков между итерациями изменения их угловых скоростей.

В результате моделирования переходных процессов системы было установлено, что разработанный закон управления обеспечивает стабилизацию углов отклонения объекта около положения равновесия за заданное конечное время. Продемонстрировано влияние правил формирования суммарных функционалов качества на скорость стабилизации и величины угловых ускорений маховиков. При ослаблении ограничений на угловые ускорения маховиков амплитуда колебаний углов ускорения кратно увеличивается, что необходимо учитывать при задании матриц функционала качества. Так как при достижении состояния равновесия угловые скорости двигателей-маховиков принимают стационарные значения, в качестве предмета дальнейших исследований предлагается учитывать в системе механизмы разгрузки маховиков и ограничение на их предельно допустимые угловые скорости.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Фатеев А.В., Вилков Ю.В., Чеботарев В.Е., Матыленко М.Г., Титов Г.П. Принципы построения прецизионной системы ориентации и стабилизации космического телескопа. *Космические аппараты и технологии*. 2023;7(4):288–295. <https://doi.org/10.26732/j.st.2023.4.07>
Fateev A.V., Vilkov Y.V., Chebotarev V.E., Matylenko M.G., Titov G.P. Precision space telescope attitude determination and control system design principles. *Spacecrafts & Technologies*. 2023;7(4):288–295. (In Russ.). <https://doi.org/10.26732/j.st.2023.4.07>
2. Богатырева С.М., Илюхин С.Н., Топорков А.Г. Разработка алгоритма работы системы ориентации и стабилизации орбитального космического телескопа при нештатной работе органов управления. *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2022;(9). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2022-9-2214>
Bogatyрева S.M., Ilukhin S.N., Toporkov A.G. Development of the algorithm of the orbital space telescope orientation and stabilization system operation with the malfunctioning controls. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2022;(9). (In Russ.). <https://doi.org/10.18698/2308-6033-2022-9-2214>
3. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Использование маховиков для управления вектором тяги при перелёте Земля-Луна. В сборнике: *Четвертая Всероссийская научно-техническая конференция «Современные проблемы ориентации и навигации космических аппаратов»*, 08–11 сентября 2014 года, Таруса, Россия. Москва: ИКИ РАН; 2015. С. 340–347.
Mashtakov Y.V., Tkachev S.S. Reaction wheel attitude control during Earth-Moon transfer. In: *The Fourth All-Russian Scientific and Technological Conference "Contemporary Problems of Spacecraft Attitude Determination and Control"*, 08–11 September 2014, Tarusa, Russia. Moscow: IKI RAS; 2015. P. 340–347. (In Russ.).

4. Соколов И.А., Степанов А.С. Алгоритм энергетически квазиоптимального двухимпульсного управления пространственной ориентацией космического аппарата с двигателями-маховиками. *Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского*. 2025;(697):362–375.
5. Беленький А.Д., Васильев В.Н., Семенов М.Е. Исследование динамики ориентации и стабилизации по курсу космического аппарата «Метеор-М» при использовании информации инфракрасной вертикали и датчиков угловой скорости. *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*. 2008;107:38–45.
Belenky A.D., Vasilyev V.N., Semyonov M.Y. Studying dynamics of the orientation and stabilization in accordance with the Meteor-M course using infrared vertical sensor and angular rate sensor data. *Electromechanical Matters. VNIEM Studies*. 2008;107:38–45. (In Russ.).
6. Якимовский Д.О., Бураков М.В., Коновалов А.С. *Управление ускорением двигателя-маховика космического аппарата*. Санкт-Петербург: ГУАП; 2018. 152 с.
7. Васильев В.Н. *Системы ориентации космических аппаратов*. Москва: ФГУП «НПП ВНИИЭМ»; 2009. 310 с.
8. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. *Управление космическими летательными аппаратами*. Москва: Машиностроение; 1974. 340 с.
9. Козлов В.Н., Ефремов А.А. Проекционный метод решения уравнения Р. Беллмана для синтеза систем с ограничениями на управления. В сборнике: *Системный анализ в проектировании и управлении: Сборник научных трудов XXVI Международной научно-практической конференции: Часть 1, 13–14 октября 2022 года, Санкт-Петербург, Россия*. Санкт-Петербург: Политех-пресс; 2023. С. 151–157. <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/id23-46>
Kozlov V.N., Efremov A.A. A projection method for solving the R. Bellman equation for the synthesis of systems with control constraints. In: *System Analysis in Engineering and Control: Proceedings of the XXVI International Scientific and Practical Conference: Part 1, 13–14 October 2022, Saint Petersburg, Russia*. Saint Petersburg: Polytech-press; 2023. P. 151–157. (In Russ.). <https://doi.org/10.18720/SPBPU/2/id23-46>
10. Телепнев П.П., Ефанов В.В., Кузнецов Д.А., Герасимчук В.В. Оценка уровней механических воздействий на КА двигателя-маховика в вязко-упругом подвесе виброизолятора, обусловленных прецессией и нутацией. *Вестник НПО им. С.А. Лавочкина*. 2024;(3):30–35. <https://doi.org/10.26162/LS.2024.58.33.004>
Telepnev P.P., Efanov V.V., Kuznetsov D.A., Gerasimchuk V.V. Estimation of the SC mechanical effects by flywheel engine in the viscoelastic suspension of the vibration isolator resulted from the precession and nutation. *Vestnik "NPO im. S.A. Lavochkina"*. 2024;(3):30–35. (In Russ.). <https://doi.org/10.26162/LS.2024.58.33.004>

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ / INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Хрусталеv Александр Алексеевич, аспирант Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, Санкт-Петербург, Российская Федерация.
e-mail: hkrustalev.aa@edu.spbstu.ru
ORCID: [0009-0005-1888-7572](https://orcid.org/0009-0005-1888-7572)

Aleksandr A. Khrustalev, Postgraduate of Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, the Russian Federation.

Статья поступила в редакцию 03.08.2026; одобрена после рецензирования 09.10.2026; принята к публикации 16.10.2026.

The article was submitted 03.08.2026; approved after reviewing 09.10.2026; accepted for publication 16.10.2026.