

УДК 681.5.01

С.В. Ипполитов, О.Н. Чопоров, Д.В. Лопаткин, А.В. Сизов
МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ
ВУНЦ ВВС «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и
Ю.А. Гагарина» (г. Воронеж)
Воронежский государственный технический университет

*Работа посвящена решению актуальной научно-технической задачи, связанной с обеспечением требуемой точности управления в группе в автоматическом режиме. Представлена методика синтеза алгоритма автоматического управления быстро движущимися динамическими объектами при их совместном движении, основанная на теории ковариационного управления. Суть теории заключается в обеспечении заданного установившегося значения ковариационной матрицы состояния линейной системы с помощью обратной связи. Обоснован подход и разработан численный алгоритм определения достижимой ковариационной матрицы системы, формализующей заданные требования к точности управления в режиме группового полета в терминах СКО ошибок регулируемых параметров. Численный алгоритм решения задачи синтеза достижимой ковариационной матрицы основывается на методе решения линейных матричных неравенств (LMI), с использованием пакета *svx* системы *Matlab*. Разработана общая линеаризованная модель относительного движения в группе с учетом внешних возмущений турбулентности атмосферы и случайного ветра и внутренних возмущений, связанных с влиянием динамики приводов системы управления. Для учета влияния случайного ветра используется модель Драйдена, описывающая турбулентность атмосферы. На основе описанной математической модели и разработанного алгоритма проведено численное моделирование по оценке точности управления при влиянии возмущений.*

Ключевые слова: динамические объекты, синтез, алгоритм, управление, матрица, моделирование.

Одной из наиболее сложной и на сегодняшний день не решенной технической задачей, является автоматическое управление группой быстро движущихся объектов. К таким задачам можно отнести групповое самолетовождение, как пилотируемых, так и беспилотных летательных аппаратов.

Системы автоматического управления, применяемые в существующих образцах авиационной техники, созданы на основе линейных динамических систем. Данное обстоятельство объясняется тем, что погрешности датчиков и приводов воздушного судна сравнительно больше погрешностей, которые вызваны неучетом нелинейностей при использовании линейных динамических систем.

В настоящее время для синтеза линейных систем управления с учетом возмущений используется два основных подхода:

- классический, базирующийся на использовании частотных характеристик и практически неприменимый к многосвязным системам;
- современный, базирующийся на использовании оптимизационных методов, в основе которых лежат обобщенные критерии качества управления.

Недостатком этих методов является отсутствие формализованной взаимосвязи с инженерными показателями точности управления, назначаемыми в практических задачах для каждого регулируемого параметра объекта управления индивидуально. При этом количество регулируемых параметров, как правило, меньше размерности вектора состояния объекта.

Одним из возможных путей решения задачи автоматического управления динамическим объектом при совместном движении является синтез стабилизирующего регулятора заданной структуры, основанный на теории ковариационного управления [1]. Теория ковариационного управления основана на положениях технологии вложения систем, а также лежащие в основе данной теории метод канонизации матриц, методы преобразования матричных частных и аналитические методы решения матричных алгебраических уравнений различной структуры [1]. Суть теории заключается в обеспечении заданного установившегося значения ковариационной матрицы состояния линейной системы с помощью обратной связи. Соответствующий регулятор в обратной связи принято называть регулятором заданной точности.

Для синтеза алгоритма управления динамическим объектом при совместном движении в группе используется линейная математическая модель (ММ) относительного продольного движения динамического объекта в группе, представленная в пространстве состояний линейной стационарной стохастической многомерной системой, которая описывается векторно-матричным уравнением вида:

$$\dot{x}_{\text{пр}} = A_{\text{пр}}x_{\text{пр}} + B_{\text{пр}}u_{\text{пр}} + G_{\text{пр}}\xi_{\text{пр}}, \quad (1)$$

где $x_{\text{пр}}$ – вектор состояния модели («пр» – продольное движение), имеет следующую структуру

$$x_{\text{пр}} = [\delta W_x \quad \delta W_y \quad \Delta \omega_z \quad \Delta \vartheta \quad \Delta X \quad \Delta Y \quad \Delta \delta_b \quad \Delta \varphi_{\text{ош}} \quad \Delta U_x \quad \Delta U_y \quad \Delta \tilde{U}_y \quad \Delta U_1 \quad \Delta U_2]^T,$$

$u_{\text{пр}}(t)$ – вектор управления и имеют следующую структуру:

$$u = [\Delta \delta_b \quad \Delta \varphi_{\text{ош}}]^T,$$

где $\Delta\delta_B$, $\Delta\varphi_{\text{ош}}$ – амплитуда изменения положения органов управления динамического объекта движения;

$\xi_{\text{пр}}$ – вектор возмущений, имеет следующий вид $\xi_{\text{пр}} = [\xi_x \quad \xi_y]^T$.

Структура блочных матриц $A_{\text{пр}}$, $B_{\text{пр}}$, $G_{\text{пр}}$ следующая:

$$A_{\text{пр}} = \begin{bmatrix} A & A_{U1} \\ A_{\delta} & 0_{5 \times 5} \\ 0_{5 \times 8} & A_U \end{bmatrix}, B_{\text{пр}} = \begin{bmatrix} B \\ B_{\delta} \\ 0_{5 \times 2} \end{bmatrix}, G_{\text{пр,р}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0_{2 \times 6} & & & & & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Элементы матрицы A , A_d , B , B_d учитывают в модели относительное движение ведомого объекта в группе и содержат уравнения для ошибок заданного положения в группе.

При выводе уравнений относительного движения объекта в группе использован подход, предложенный в [3]. Для описания модели относительного движения в группе принимается следующая гипотеза. Ведомый объект движется в группе с вполне определенной скоростью на заданных расстояниях от головного, поэтому можно исключить из рассмотрения уравнения последнего.

Схема совместного движения двух объектов в группе в продольной плоскости представлена на Рисунке 1.

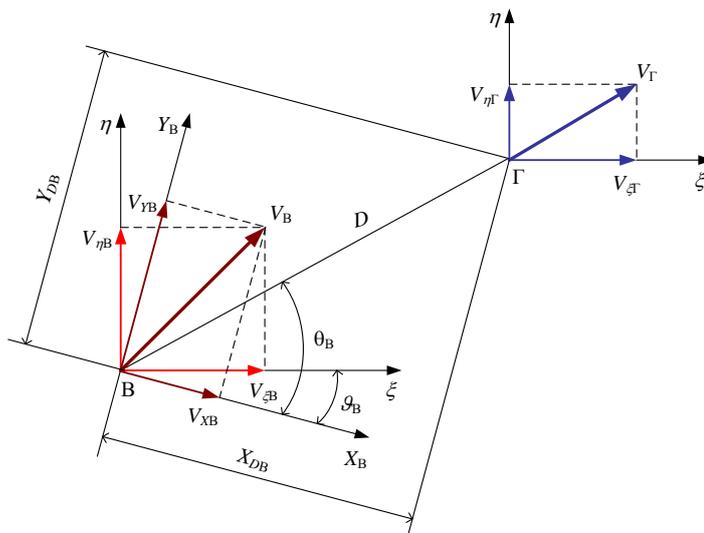


Рисунок 1 – Схема совместного продольного движения динамических объектов

Введем в рассмотрение разность скоростей объектов в проекциях на оси связанной с ведомым системы координат δV_{x_B} и δV_{y_B} . Из схемы на Рисунке 1 можно получить следующие соотношения:

$$\delta V_{x_B} = V_{x_B} - V_{\xi_G} \cos \vartheta_B + V_{\eta_G} \sin \vartheta_B, \quad (2)$$

$$\delta V_{y_B} = V_{y_B} - V_{\xi_G} \sin \vartheta_B - V_{\eta_G} \cos \vartheta_B, \quad (3)$$

$$V_{x_B} = V_{x_{B0}} + \Delta V_{x_B}, V_{y_B} = V_{y_{B0}} + \Delta V_{y_B}. \quad (4)$$

Подставив (2), (3) в (4), получим выражения для данных приращений:

$$\Delta V_{x_B} = \delta V_{x_B} - V_{x_{B0}} + V_{\xi_G} \cos \vartheta_B - V_{\eta_G} \sin \vartheta_B, \quad (5)$$

$$\Delta V_{y_B} = \delta V_{y_B} - V_{y_{B0}} + V_{\xi_G} \sin \vartheta_B + V_{\eta_G} \cos \vartheta_B. \quad (6)$$

Линеаризуем выражения (5), (6), принимая в качестве опорного движения прямолинейное движение с постоянной скоростью, для которого

$$V_{\xi_G} = V_{\xi_G}^0, V_{\eta_G} = V_{\eta_G}^0;$$

$$V_{\xi_B} = V_{\xi_B}^0, V_{\eta_B} = V_{\eta_B}^0, \vartheta_B = \vartheta_B^0, \omega_{x_B} = 0.$$

В результате линеаризации получим выражения

$$\Delta V_{x_B} = \delta V_{x_B} - V_{\xi_G}^0 \sin \vartheta_B^0 \Delta \vartheta_B - V_{\eta_G}^0 \cos \vartheta_B^0 \Delta \vartheta_B, \quad (7)$$

$$\Delta V_{y_B} = \delta V_{y_B} + V_{\xi_G}^0 \cos \vartheta_B^0 \Delta \vartheta_B - V_{\eta_G}^0 \sin \vartheta_B^0 \Delta \vartheta_B. \quad (8)$$

Элементы матрицы A_U и A_{U1} определяют модель внешних возмущений. Для учета влияния турбулентной атмосферы, применяется метод непрерывных случайных процессов для описания неспокойной атмосферы. Спектральные плотности составляющих случайного ветра описываются одномерной спектральной моделью Драйдена. Случайный процесс ветровых возмущений с такими спектральными плотностями, заданный моделью «белого шума» с определенными интенсивностями, пропускается через формирующие фильтры, представленные следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{U}_x &= -\mu_x \Delta U_x + \xi_x, \Delta \dot{\tilde{U}}_y = \Delta U_y - \sqrt{3} \mu_y \Delta \tilde{U}_y, \\ \Delta \dot{U}_y &= (\sqrt{3} - 2) \mu_y \Delta U_y + 2(\sqrt{3} - 2) \mu_y^2 \Delta \tilde{U}_y + \xi_y, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Delta U_x, \Delta U_y$ – продольная и нормальная составляющие случайного ветра; μ_x, μ_y – собственные частоты турбулентных порывов; $\Delta \tilde{U}_y$ – вспомогательная переменная; ξ_x, ξ_y – белые шумы.

Элементы матрицы $A_{\delta_{np}}$ и $B_{\delta_{np}}$ определяются коэффициентами уравнений, учитывающих динамику системы управления динамического объекта, связанные с запаздыванием сигнала управления, и принимают значения

$$A_{\delta_{np}} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 9} & \vdots & -T_x^{-1} & 0 \\ & & 0 & -T_d^{-1} \end{bmatrix}, B_{\delta_{np}} = \begin{bmatrix} -T_x^{-1} & 0 \\ 0 & -T_d^{-1} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где T_d и T_x – постоянные времени системы управления.

Принимается, что система управляется линейным статическим регулятором в обратной связи вида

$$u = -Kx, \quad (11)$$

где K – матрица коэффициентов усиления регулятора в контуре обратной связи по состоянию.

Ставится задача синтезировать регуляторы, называемые далее ковариационными регуляторами [6] вида (11), стабилизирующие систему (1) в замкнутом состоянии и обеспечивающие заданное значение ковариационной матрицы P замкнутой системы в установившемся режиме.

Объединяя уравнения (1) и (11), замкнутую систему можно записать в следующем виде:

$$\dot{x} = (A - BK)x + G\xi. \quad (12)$$

Методика синтеза алгоритма управления с использованием ковариационного регулятора заданной точности проводится в четыре этапа.

На начальном этапе проводится анализ принципиальной возможности решения поставленной задачи. При использовании статического регулятора по состоянию необходимыми условиями являются стабилизируемость пары матриц (A, B) и полная управляемость пары (A, G) .

Стабилизируемость пары (A, B) означает, что среди неуправляемых мод системы отсутствуют неустойчивые [2]. Проверка стабилизируемости заключается в приведении матрицы A к верхней (нижней) блочно-

треугольной форме с помощью невырожденных преобразований. Блочная структура матриц A и B в уравнении (1) позволяет без осуществления преобразований к новому базису выделить неуправляемую часть вектора состояния расширенной модели. Она имеет состав

$$x^{\text{неупр}} = [\Delta U_x \quad \Delta U_y \quad \Delta \tilde{U}_y \quad \Delta U_1 \quad \Delta U_2]^T, \quad (13)$$

так как пара матриц $A, B: B_\delta^T$ является полностью управляемой. Вычисление собственных значений матрицы A_U , соответствующей вектору $x^{\text{неупр}}$, с помощью процедуры eig пакета MATLAB показывает, что все неуправляемые моды являются устойчивыми

$$\lambda(A_U)_i = -0,2762, i = \overline{1,5}.$$

Отсюда следует, что пара (A, B) является стабилизируемой.

Проверка управляемости пары (A, G) осуществлялась с помощью процедур пакета MATLAB ctrb (формирование матрицы управляемости) и sprank (вычисление структурного ранга разреженной матрицы). Установлено, что пара (A, G) является полностью управляемой.

Таким образом, разработка алгоритма автоматического управления групповым движением динамических объектов можно представить в виде совокупности следующих этапов.

Этап 1. Формализуются требования к точности управления из условия выполнения безопасности движения в группе на опорном режиме при действии внешних возмущений с заданными параметрами через элементы ковариационной матрицы P состояния замкнутой системы (12).

Регулируемыми параметрами являются ошибки заданного положения ведомого объекта по превышению δY и дистанции δX относительно головного. С учетом размера ведомого динамического объекта и параметров его относительного движения для предотвращения столкновений и опасных сближений СКО каждой из указанных ошибок не должно превышать заданного значения:

$$\sigma_x \leq 5 \text{ м}, \sigma_y \leq 2 \text{ м}. \quad (14)$$

Выполнение данных точностных требований позволяет осуществлять безопасное движение ведомого объекта в группе. Таким образом, соответствующие элементы ковариационной матрицы $p_{55} \leq 5, p_{66} \leq 2$.

Этап 2. Определяется достижимая ковариационная матрица P замкнутой системы, удовлетворяющая условию

$$\bar{B}^L (AP + PA^T + GQG^T)(\bar{B}^L) = 0, P > 0 \quad (15)$$

и заданным ограничениям.

Решение тождества (15) осуществлялось с использованием аппарата линейных матричных неравенств (LMI). При этом решение матричного уравнения заменяется решением LMI при заданных из требований точности ограничениях на диагональные элементы искомой симметричной невырожденной матрицы. Для составления матричных неравенств и преобразования квадратичной формы в линейную использовалась лемма Шура. С учетом последнего уравнению (15) соответствуют следующие LMI:

$$F(P) := \begin{bmatrix} \bar{B}^L & AP + PA^T & \bar{B}^L{}^T & \bar{B}^L G \\ & G^T \bar{B}^L{}^T & & -Q^{-1} \end{bmatrix} > 0, P > \varepsilon I, \quad (16)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый скаляр, который используется в численном алгоритме для получения нетривиального решения задачи достижимости; I – единичная матрица.

Для учета ограничений на диагональные элементы достижимой ковариационной матрицы (15), формализующих требования к точности управления, вводится дополнительная система матричных неравенств вида

$$[DPD]_{ii} \leq \gamma_i, i = \overline{1, n_z} \quad (17)$$

где γ_i – действительные числа, характеризующие заданную точность управления.

Тогда множество достижимости, соответствующее условию (15), имеет вид

$$\Phi(P) := \{P: F_1(P) > 0, P = P^T > \varepsilon I, [DPD]_{ii} \leq \gamma_i, i = \overline{1, n_z}\} \quad (18)$$

Численное решение данного уравнения на основе метода синтеза LMI с использованием пакета svx, реализованной в среде Matlab, дает следующее значение достижимой КМ, диагональные элементы которой удовлетворяют заданным ограничениям:

$$\text{diag}(P)^{\frac{1}{2}} = \begin{matrix} 0,8076 & 0,9949 & 0,041 & 0,036 & 4,9972 & 1,9915 & 0,5092 & 3,3614 \\ & & & & & & & \end{matrix} \quad (19)$$

Этап 3. Выполняется синтез множества регуляторов, обеспечивающих заданное значение достижимой ковариационной матрицы (19).

Множество ковариационных регуляторов определяется по формуле:

$$K_{\eta} = \tilde{B}^L P (H + \eta), \quad (20)$$

где H – матрица, которая определяется выражением

$$H = P^{-1} \left(AP + \frac{1}{2} G Q G^T \right) P^{-1}, \quad (21)$$

η – любая из множества кососимметрических матриц

$$\eta_{\kappa} = (P^{-1} \bar{\bar{B}}^L P H)^T - P^{-1} \bar{\bar{B}}^L P H - P^{-1} \bar{\bar{B}}^L P H^T (\bar{\bar{B}}^L)^T P^{-1} + P^{-1} B \kappa. \quad (22)$$

Здесь $\bar{\bar{B}}^L = (\bar{B}^L)^R \bar{B}^L$ – приведенный левый делитель нуля для матрицы B , κ – произвольная кососимметрическая матрица подходящего размера.

Подстановка числовых значений матриц в формулу (20) дает следующий результат:

$$K_{\eta} = \begin{bmatrix} -1307 - 2040 \cdot \eta & -41,96 - 65,25 \cdot \eta & 0,4371 \cdot 10^5 + 0,6824 \cdot 10^5 \cdot \eta & 0,5778 \cdot 10^5 + 0,9018 \cdot 10^5 \cdot \eta \\ 8370 + 0,1307 \cdot 10^5 \cdot \eta & 296,8 + 461,1 \cdot \eta & -0,2726 \cdot 10^6 - 0,4256 \cdot 10^6 \cdot \eta & -0,3688 \cdot 10^6 - 0,5758 \cdot 10^6 \cdot \eta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -138,6 - 216,3 \cdot \eta & 340,2 + 531,4 \cdot \eta & -1667 - 2604 \cdot \eta & -667,4 - 1042 \cdot \eta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 885,8 + 1383 \cdot \eta & -1955 - 3055 \cdot \eta & 0,1056 \cdot 10^5 \cdot \eta + 0,1648 \cdot 10^5 \cdot \eta & 4111 + 6419 \cdot \eta \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где η – произвольное действительное число.

Этап 4. Наличие множества эквивалентных по постановке задачи регуляторов позволяет предъявлять дополнительные требования при синтезе, в частности, обеспечение минимальных энергетических затрат на управление. Удовлетворение указанного требования дает следующее значение матрицы передачи ковариационного регулятора:

$$K_{\text{ков}} = \begin{bmatrix} -0,4857 & -0,1704 & 7,1277 & 22,7170 & -0,0465 & -0,122 & 0 & 0 \\ 0,1274 & 1,4504 & -3,7153 & -15,2807 & -0,0047 & 1,2187 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

На основе полученного регулятора было проведено численное моделирование системы (12) с регулятором $K_{\text{ков}}$ в системе моделирования Simulink.

Результаты моделирования отображены на Рисунке 2 в виде графика ошибок управления относительно положением для 1 реализации.

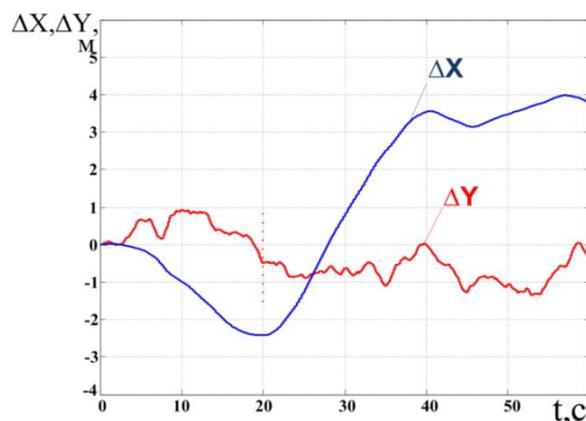


Рисунок 2 – График изменения ошибки δX и δY

Результаты статистического моделирования отображены на рисунке 3 в виде графика СКО ошибок управления относительно положением для 1000 реализаций.

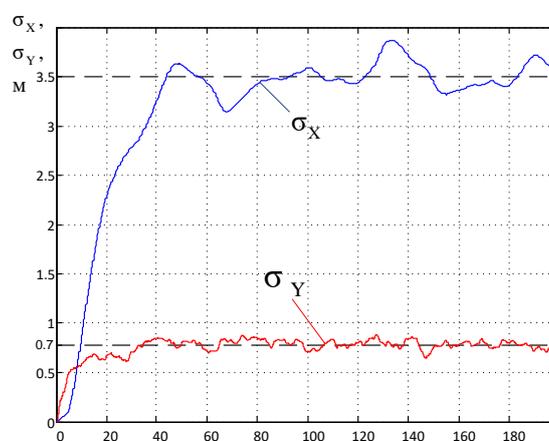


Рисунок 3 – График изменения СКО ошибки δX и δY

Анализ результатов моделирования показывает, что требования к точности относительно регулируемых параметров ΔX и ΔY выполняются, подтверждая работоспособность выбранного закона управления.

Кроме того, проведены исследования влияния на точность управления характера возмущений и режима полета. Каждый параметр изменяется в отдельности относительно исходного. Результаты исследования приведены в Таблице 1.

Таблица 1– СКО ошибок относительного положения

	$V_0=150$ км/ч	$V_0=250$ км/ч	$y_{Ux}, U_y=2,5$ м/с	$L_{x,y}=305$ м
$y_x, м$	1,7	1,4	2	1,5
$y_y, м$	0,47	0,37	0,53	0,4

Из данных таблицы и результатов исследования следует, что изменение параметров полета и действующих возмущений в целом незначительно влияет на точность управления (увеличение ошибок не превышает 30 %). Наибольшее влияние на точность управления оказывает изменение режима полета. Поэтому целесообразно корректировать передаточные числа регулятора по скорости полета.

Таким образом, предложенный алгоритм управления, синтез которого выполнен методике синтеза ковариационного управления, позволит обеспечить безопасное движение динамическими объектами при совместном движении в автоматическом режиме при влиянии внешних и внутренних возмущений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 14-08-00640-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем / Под ред. В.Н. Букова. Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. С. 320-390.
2. Вавилов Ю.А. Системы автоматического управления полетом: Учеб. пособие для курсантов и слушателей вузов ВВС / Под ред. Ю.А. Вавилова. М.: Изд-во ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 2009. С. 130-154.
3. Калдымов А.А. Математическая модель вертолета, движущегося в строю // Аналитические методы синтеза регуляторов: Сб. статей по материалам Межвузовской НПК (Саратов, 10-12 апреля 1976 г.). Саратов: СПИ, 1976. С. 81-92.
4. Доброленский Ю.П. Динамика полета в неспокойной атмосфере. М.: Машиностроение, 1969. С. 156-187.
5. Петросян Э.А. Аэродинамика соосного вертолета. М.: Полигон-пресс, 2004. С. 460-512.

6. Сельвесюк Н.И. Синтез ковариационных регуляторов на основе технологии вложения систем // Автоматика и телемеханика. 2005. № 6. С. 126-137.

S.V. Ippolitov, O.N. Choporov, D.V. Lopatkin, A.V. Sizov
MODEL FOR CONTROL DYNAMIC OBJECTS
*MESC AF «Air academy of the name professor N.E. Zukovsky and
Y.A.Gagarin»
Voronezh State Technical University*

The work is devoted to the solution of the actual scientific and technical problem related to ensuring the required accuracy of control in a group in the automatic mode. The technique for synthesizing an algorithm for automatic control of fast moving dynamic objects in their joint motion based on the theory of covariance control is presented. The essence of the theory is to provide a given steady-state value of the covariance matrix of the state of a linear system by means of feedback. The approach is substantiated and a numerical algorithm for determining the achievable covariance matrix of the system formalizing the specified requirements for the accuracy of control in the group flight mode in terms of the RMS errors of the controlled parameters is developed. The numerical algorithm for solving the synthesis problem of an achievable covariance matrix is based on the method of solving linear matrix inequalities (LMI), using the cvx package of the Matlab system. A general linearized model of the relative motion in the group is developed, taking into account external perturbations of the turbulence of the atmosphere and the random wind and internal disturbances associated with the dynamics of the control system drives. To take into account the influence of a random wind, the Dryden model, which describes the turbulence of the atmosphere, is used. On the basis of the described mathematical model and the developed algorithm, numerical modeling is carried out to evaluate the accuracy of control under the influence of perturbations.

Keywords: dynamic objects, synthesis, algorithm, control, matrix, modeling.

REFERENCE

1. Bukov V.N. Embedding systems. Analytical approach to the analysis and synthesis of matrix systems, Ed. V.N. Bukova. Kaluga: Publishing house of scientific literature NF Bochkareva, 2006. pp. 320-390.
2. Vavilov Yu.A. Automatic flight control systems: Proc. Manual for cadets and students of high schools of the Air Force / Ed. Yu.A. Vavilov. Moscow: Izd-vo VVIA im. NOT. Zhukovsky, 2009. pp. 130-154.
3. Kaldymov A.A. Mathematical model of the helicopter moving in the system // Analytical methods of synthesis of regulators: Sat. Articles on the materials of the Inter-University NPC (Saratov, April 10-12, 1976). Saratov: SPI, 1976. pp. 81-92.
4. Dobrolensky Yu.P. The dynamics of flight in a troubled atmosphere. Moscow: Mashinostroenie, 1969. pp. 156-187.

-
5. Petrosyan E.A. Aerodynamics of a coaxial helicopter. Moscow: Polygon-press, 2004. pp. 460-512.
 6. Selvesyuk N.I. Synthesis of covariance regulators on the basis of technology of embedding of systems // Automation and telemechanics. 2005. No 6. pp. 126-1