

УДК 621.372:519.622

А.М. Пилипенко

## ГИБРИДНЫЕ МЕТОДЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ ЖЕСТКИХ И КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

Южный федеральный университет,  
Таганрог, Россия,

*В статье рассмотрены проблемы численного анализа электронных цепей во временной области, возникающие при использовании современных пакетов схемотехнического моделирования, основанных на симуляторе SPICE. Для анализа электронных цепей во временной области в современных пакетах схемотехнического моделирования применяют методы Гира и метод трапеций. Важное свойство моделей реальных электронных цепей и особенно, радиотехнических цепей, состоит в том, что эти модели часто являются колебательными и жесткими одновременно. В свою очередь, методы Гира могут терять устойчивость при анализе колебательных цепей, так как эти методы не являются R-устойчивыми, а метод трапеций имеет достаточно высокую погрешность при анализе жестких цепей, так как он не является L-устойчивым. Целью данной статьи является разработка гибридных L- и R-устойчивых методов, основанных на комбинации различных численных методов решения дифференциальных уравнений, которые позволяют обеспечить высокую точность моделирования во временной области как жестких, так и колебательных цепей. Гибридные методы построены на основе известных методов Радо ПА и Лобатто ПА, которые являются подклассами неявных методов Рунге-Кутты. Сравнительный анализ точности известных методов и предлагаемых гибридных методов подтверждает высокую точность и устойчивость последних для моделирования во временной области жестких и колебательных цепей и систем. Гибридные методы также эффективны для решения дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих произвольные электрические цепи.*

**Ключевые слова:** анализ переходных процессов, жесткие системы, колебательные цепи, неявные методы Рунге-Кутты, точность, устойчивость.

**Введение.** Численный анализ электронных цепей во временной области, как правило, сводится к численному решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые, в свою очередь, являются математическими моделями анализируемых электронных цепей. Важное свойство моделей реальных электронных цепей и особенно, радиотехнических цепей, состоит в том, что эти модели часто являются колебательными и жесткими одновременно [1]. Колебательная цепь описывается системой ОДУ с осциллирующим решением. Жесткая цепь описывается жесткой системой ОДУ, решение которой содержит, как быстрые, так и медленные компоненты, скорости изменения которых (постоянные времени) отличаются на порядок и более. Можно выделить следующие примеры цепей, которые являются колебательными и жесткими одновременно: широкополосные усилители с узкополосными обратными связями; генераторы гармонических

колебаний, работающие в режиме малых углов отсечки; генераторы релаксационных колебаний; многозвенные модели линий передачи, резонансные частоты которых отличаются на несколько порядков.

В подавляющем большинстве современных пакетов схемотехнического моделирования, созданных на базе симулятора SPICE, для анализа цепей во временной области используются методы Гира, основанные на формулах дифференцирования назад, а также метод трапеций. Основное достоинство указанных методов – минимальная вычислительная сложность. Методы Гира высокого порядка точности хорошо подходят для решения жестких задач, однако с ростом порядка точности методов Гира область их устойчивости уменьшается, что приводит к росту погрешности численного решения при анализе колебательных систем [2]. Метод трапеций достаточно эффективен для анализа колебательных цепей, так как он является *P*-устойчивым (область устойчивости метода трапеций совпадает с левой полуплоскостью комплексной плоскости) [3]. В свою очередь, при анализе жестких систем метод трапеций полностью теряет свою эффективность, так как он не является *L*-устойчивым (локальная погрешность метода трапеций с ростом шага численного решения стремится к единице) [4]. Указанное свойство приводит к резкому росту погрешности метода трапеций в тех случаях, когда начальный шаг интегрирования превышает наименьшую постоянную времени цепи.

В настоящее время в программы компьютерной математики внедряются различные виды неявных методов Рунге-Кутты, которые могут обеспечить более высокую точность и устойчивость анализа жестких и колебательных цепей, чем методы Гира и трапеций [2]. Однако для численного моделирования жестких и колебательных цепей необходимо использовать разные классы методов Рунге-Кутты, кроме того неявные методы Рунге-Кутты высокого порядка точности требуют значительно больших вычислительных ресурсов, чем методы Гира и трапеций. Указанные недостатки неявных методов Рунге-Кутты препятствуют их применению в пакетах схемотехнического моделирования.

В работе [5] были предложены гибридные методы, разностные схемы которых представляют собой комбинацию полностью неявных разностных схем методов Рунге-Кутты. Гибридные методы, предложенные в [5], позволяют обеспечить высокую точность численного решения жестких и осциллирующих систем ОДУ. Следует отметить, что произвольная электрическая цепь в общем случае описывается системой дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), при решении которой с помощью неявных методов Рунге-Кутты (НРК-методы), использованных в [5], наблюдается эффект уменьшения порядка точности [6]. В настоящее время известны всего два подкласса НРК-методов – методы Радо ПА и

Лобатто ША, для которых эффект уменьшения порядка точности отсутствует [7].

Целью данной статьи является разработка гибридных методов, обеспечивающих высокий порядок точности численного моделирования во временной области как жестких, так и колебательных цепей. В соответствии с поставленной целью в работе решаются следующие задачи: синтез гибридных методов на основе методов Радо ПА и Лобатто ША; оценка точности полученных гибридных методов.

**Построение гибридных методов.** Будем полагать, что математическая модель радиотехнической цепи имеет вид системы ОДУ

$$dx/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор переменных состояния цепи;  $t$  – время;  $T$  – интервал наблюдения.

Принцип синтеза гибридного метода удобнее всего рассматривать для простейшего случая – объединения неявных методов Эйлера и трапеций. Приближенные решения системы (1), полученные с помощью неявного метода Эйлера и метода трапеций соответственно, описываются следующими формулами

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1}); \quad (2)$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n)], \quad (3)$$

где  $h$  – шаг интегрирования;  $n$  – целое неотрицательное число;  $\mathbf{x}_{n+1}$  и  $\mathbf{x}_n$  – приближенные решения системы ОДУ в моменты времени  $t_{n+1} = t_n + h$  и  $t_n$  соответственно.

Гибридный метод, основанный на комбинации методов (1) и (2) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+\alpha} = \mathbf{x}_n + \alpha h \mathbf{f}_{n+\alpha}; \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+\alpha} + \frac{(1-\alpha)h}{2} [\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+\alpha}, t_{n+\alpha})], \end{cases} \quad (4)$$

где  $\mathbf{x}_{n+\alpha}$  – приближенное решение системы ОДУ в момент времени  $t_{n+\alpha} = t_n + \alpha h$ ;  $0 \leq \alpha \leq 1$  – весовой коэффициент.

Схема гибридного метода (4) включает в себя два частичных шага. Первый частичный шаг решения величиной  $\alpha h$  осуществляется неявным методом Эйлера, который имеет первый (минимальный) порядок точности,

но при этом обладает  $L$ -устойчивостью. Второй частичный шаг решения величиной  $(1-\alpha)h$  осуществляется методом трапеций, который имеет второй порядок точности, обладает  $P$ -устойчивостью, но не является  $L$ -устойчивым. Порядок точности численного метода определяет скорость уменьшения глобальной погрешности метода  $\Delta$  при уменьшении шага решения  $h$  (для метода первого порядка  $\Delta \sim h$ , для метода второго порядка  $\Delta \sim h^2$  и т.д.). Гибридный метод (4) будет иметь второй порядок точности, а также будет одновременно обладать  $L$ - и  $P$ -устойчивостью, если его схема при малых значениях шага интегрирования близка к схеме метода трапеций ( $\alpha \rightarrow 0$ ), а при больших значениях шага интегрирования – к схеме неявного метода Эйлера ( $\alpha \rightarrow 1$ ). Данные требования выполняются, если весовой коэффициент  $\alpha$  имеет вид возрастающей от 0 до 1 функции шага интегрирования  $\alpha = \alpha^*(h)$ , в качестве которой рекомендуется использовать рациональную функцию [8]

$$\alpha = \alpha_m^*(h) = 1 - [1 - (h/h_{\max})]^m, \quad (5)$$

где  $h_{\max}$  – максимальный шаг интегрирования ( $h_{\max} \leq T$ );  $m = 1, 2, \dots$

В общем случае значение  $m$  определяется жесткостью решаемой задачи. Оптимальное значение  $m$  приближенно равно порядку отношения максимальной и минимальной постоянных времени цепи:  $m \approx \lg(\tau_{\max} / \tau_{\min})$ . Для практических задач можно полагать  $m \leq 5$  [8].

Для системы (1)  $s$ -стадийный метод Рунге-Кутты описывается следующей формулой

$$\begin{cases} \mathbf{X}_i = \mathbf{x}_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} \mathbf{f}(\mathbf{X}_j, t_n + c_j h), & 1 \leq i \leq s; \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h \sum_{i=1}^s b_i \mathbf{f}(\mathbf{X}_i, t_n + c_i h), \end{cases} \quad (6)$$

где  $\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{X}_i$  – приближенные решения системы (1) в моменты времени  $t_n, t_{n+1} = t_n + h, t_n + c_i h$  соответственно;  $0 \leq c_i \leq 1, a_{ij}, b_i$  – вещественные коэффициенты определяющие класс метода.

Коэффициенты методов Рунге-Кутты обычно записывают в виде таблицы Бутчера:

$$\begin{array}{c|cccc}
 c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\
 c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\
 \hline
 & b_1 & b_2 & \cdots & b_s
 \end{array}$$

Таблица Бутчера содержит векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , состоящие из коэффициентов  $b_i$  и  $c_i$  соответственно и матрицу  $\mathbf{A}$  размерностью  $s \times s$ , включающую коэффициенты  $a_{ij}$ . Если  $a_{ij} = 0$  при  $i \leq j$  имеем явный метод Рунге-Кутты (ЯРК-метод). Если  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$  и хотя бы одно  $a_{ii} \neq 0$  имеем диагонально неявный метод Рунге-Кутты (ДНРК-метод). Если, кроме того, все диагональные коэффициенты одинаковы,  $a_{ii} = \gamma$  ( $0 \leq i \leq s$ ) метод является однократно диагонально-неявным (ОДНРК-метод). Во всех остальных случаях будем иметь НРК-метод.

Следует отметить, что неявный метод Эйлера и метод трапеций также являются НРК-методами, причем неявный метод Эйлера – это метод Радо ПА первого порядка точности, а метод трапеций – это метод Лобатто ША второго порядка точности [2]. Таблицы Бутчера для этих методов приведены ниже.

Метод Радо ПА первого порядка (Radau 1):

$$\begin{array}{c|c}
 1 & 1 \\
 \hline
 & 1
 \end{array}$$

Метод Лобатто ША второго порядка (Lobatto 2):

$$\begin{array}{c|cc}
 0 & 0 & 0 \\
 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Таким образом, обобщенная схема гибридного метода, использующего комбинацию методов Радо ПА и Лобатто ША, формулируется на основе выражения для простейшего гибридного метода (4). Обобщенная схема гибридного метода, также как и схема метода (4), будет состоять из двух частичных шагов (метод Радо ПА используется на первом частичном шаге, а метод Лобатто ША – на втором):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{XR}_i = \mathbf{x}_n + \alpha h \sum_{j=1}^{sr} ar_{ij} \mathbf{f}(\mathbf{XR}_j, t_n + cr_j \alpha h), 1 \leq i \leq sr; \\ \mathbf{x}_{n+\alpha} = \mathbf{x}_n + \alpha h \sum_{i=1}^{sr} br_i \mathbf{f}(\mathbf{XR}_i, t_n + cr_i \alpha h); \\ \mathbf{XL}_i = \mathbf{x}_{n+\alpha} + (1-\alpha)h \sum_{j=1}^{sl} al_{ij} \mathbf{f}[\mathbf{XL}_j, t_n + cl_j(1-\alpha)h], 1 \leq i \leq sl; \\ \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{n+\alpha} + (1-\alpha)h \sum_{i=1}^{sl} bl_i \mathbf{f}[\mathbf{XL}_i, t_n + cl_i(1-\alpha)h], \end{array} \right. \quad (7)$$

где  $ar_{ij}$ ,  $br_i$ ,  $cr_i$  и  $al_{ij}$ ,  $bl_i$ ,  $cl_i$  – коэффициенты таблицы Бутчера для методов Радо ПА и Лобатто ША соответственно;  $sr$  и  $sl$  – число стадий в методах Радо ПА и Лобатто ША соответственно.

Обобщенная схема (7) позволяет синтезировать гибридные методы высокого порядка точности на основе методов Радо ПА и Лобатто ША, таблицы Бутчера для которых приведены ниже.

Метод Радо-ПА третьего порядка (Radau 3):

$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Метод Лобатто-ША четвертого порядка (Lobatto 4):

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Метод Радо-ПА пятого порядка (Radau 5):

$\frac{4-\sqrt{6}}{10}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296-169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2+3\sqrt{6}}{225}$
$\frac{4+\sqrt{6}}{10}$	$\frac{296+169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2-3\sqrt{6}}{225}$
1	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

Метод Лобатто-ША шестого порядка точности (Lobatto 6):

0	0	0	0	0
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{11+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{25-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{25-13\sqrt{5}}{10}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{10}$
10	120	120	120	120
$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{11-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{25+13\sqrt{5}}{10}$	$\frac{25+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{10}$
10	120	120	120	120
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

**Результаты оценки точности гибридных методов.** Тестовые задачи для оценки точности различных численных методов решения систем ОДУ представлены в работе [9]. Точность численного анализа жестких и колебательных цепей удобно оценивать с помощью системы ОДУ второго порядка

$$dx/dt = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

где  $x = (x_1, x_2)^T$ ;  $x_0 = (1, 0)^T$ .

Система (8) является жесткой, если матрица  $A$  имеет вид:

$$A = As = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix}.$$

**Аналитическое решение системы (8) при  $A = As$ :**

$$x_1(t) = x(t) = C_1 e^{-t/\tau_1} + C_2 e^{-t/\tau_2}, \quad (9)$$

где  $\tau_1 = \tau_{\max} = 1$  с и  $\tau_2 = \tau_{\min} = 10^{-3}$  с – постоянные времени системы;  $C_1 = 2$  и  $C_2 = -1$  – постоянные интегрирования.

Система (8) является колебательной, если матрица  $A$  имеет вид:

$$A = Ao = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Аналитическое решение системы (8) при  $A = Ao$ :**

$$x_1(t) = x(t) = A_m \cos(2\pi t / T_0), \quad (10)$$

где  $A_m = 1$  В и  $T_0 = 2\pi$  с – амплитуда и период колебаний на выходе системы.

Структура схемной модели системы (8) будет зависеть от выражения для матрицы  $\mathbf{A}$ . Нетрудно показать, что схемная модель системы (8) при  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_s$  представляет собой двухзвенную  $RC$ -цепь, а при  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_o$  – одиночный  $LC$ -контур без потерь.

На Рисунке 1 показаны аналитические (точные) и численные (приближенные) решения системы (8), полученные при следующих условиях: а)  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_s$ ,  $h = \tau_{\max}$  (жесткая система); б)  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_o$ ,  $h = T_0 / 10$  (колебательная система). Численные решения, представленные на рис. 1, были рассчитаны следующими методами: методом Радо ПА первого порядка (Radau 1), методом Лобатто ПА второго порядка (Lobatto 2) и гибридным методом, основанным на комбинации методов Radau 1 и Lobatto 2 (Hybrid 1-2).

В Таблице 1 представлены максимальные по модулю значения текущих погрешностей  $\varepsilon_{\max} = \max |x_k - x(t_k)|$ , где  $k = 0, 1, \dots, N$ ;  $N = T / h$ , полученные различными численными методами при решении жесткой и осциллирующей задачи на интервале  $0 \leq t \leq T$ .

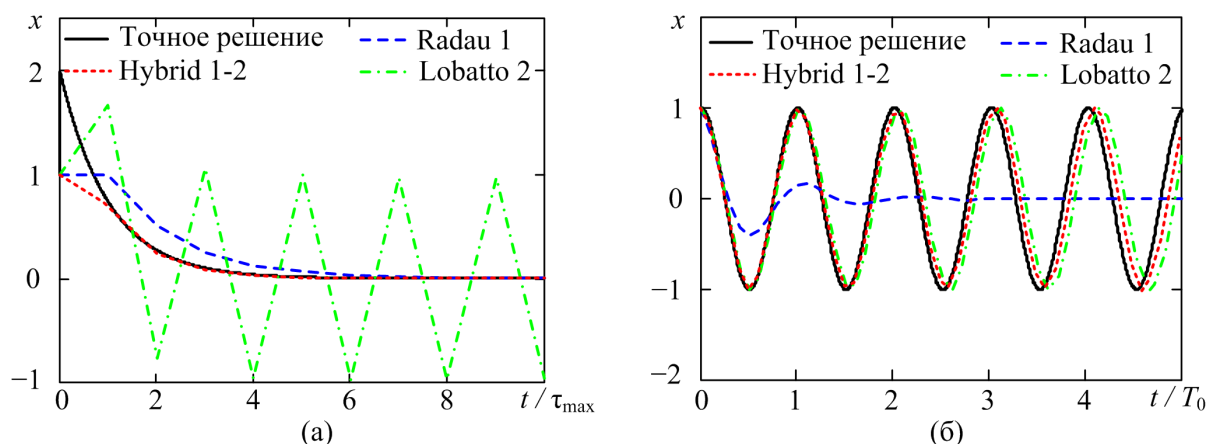


Рисунок 1 – Аналитические и численные решения системы (8):  
 (а) – жесткая система; (б) – колебательная система

Таблица 1 – Максимальные по модулю текущие погрешности численных методов

Метод		Radau 1	Lobatto 2	Hybrid 1-2	Radau 3	Lobatto 4	Hybrid 3-4
$\varepsilon_{\max}$	Жесткая задача, $h = \tau_{\max}$	0,26	1,0	0,063	0,0065	0,98	0,0032
	Осциллирующая задача, $h = T_0 / 10$	1,0	0,44	0,34	0,098	0,0061	0,0055

**Обсуждение результатов.** Результаты численного анализа, представленные на Рисунке 1, показывают, что гибридный метод обеспечивает большую точность численного решения, чем базовые методы Радо ПА и Лобатто ПА, как для жестких, так и для осциллирующих задач.



Существенное отличие численного решения, полученного гибридным методом Hybrid 1-2 для жесткой задачи на интервале  $0 \leq t/\tau_{\max} \leq 1$ , от точного решения объясняется тем, что внутри указанного интервала для приближенных решений, полученных численными методами, отсутствуют промежуточные точки (см. Рисунок 1, а). Промежуточные точки отсутствуют, так как шаг интегрирования  $h = \tau_{\max}$ , который устанавливался для получения приближенных решений жесткой задачи с помощью численных методов, значительно больше шага дискретизации  $h_d = \tau_{\max} / 100$ , который выбирался для расчета точного решения.

Следует отметить, что результаты, приведенные на Рисунке 1, позволяют провести качественную (визуальную) оценку точности численных методов. Для количественной оценки точности численных методов можно использовать максимальные по модулю текущие погрешности численного решения, приведенные в Таблице 1. Из Таблицы 1 следует, что предлагаемые в данной работе гибридные методы в 2 – 4 раза точнее  $L$ -устойчивых методов Радо ПА при решении жесткой задачи и одновременно на 10 – 20 % точнее  $P$ -устойчивых методов Лобатто ША при решении осциллирующей задачи. Повышение порядка точности численных методов Радо ПА и Лобатто ША, используемых для синтеза гибридного метода, обеспечивает повышение порядка точности полученного гибридного метода (метод Hybrid 3-4 на один – два порядка точнее, чем метод Hybrid 1-2).

**Заключение.** Гибридные методы численного анализа радиотехнических цепей, предложенные в данной работе, комбинируют свойства двух подклассов неявных методов Рунге-Кутты –  $L$ -устойчивых методов Радо ПА, которые являются наиболее эффективными для решения жестких задач, и  $P$ -устойчивых методов Лобатто ША, которые обеспечивают наибольшую точность при решении колебательных задач.

Порядок точности гибридного метода определяется максимальным порядком точности исходных численных методов, используемых для его построения. Для построения гибридных методов возможно применение методов Радо ПА и Лобатто ША пятого и шестого порядка точности. Дальнейшее увеличение порядка точности гибридного метода нецелесообразно из-за высокой вычислительной сложности исходных НРК-методов [10].

Полученные результаты доказывают высокую эффективность гибридных методов при решении как жестких, так и осциллирующих систем ОДУ, моделирующих радиотехнические цепи, поскольку гибридные методы позволяют получить одновременно  $L$ - и  $P$ -устойчивость. Кроме того, гибридные методы будут эффективны для решения систем ДАУ, описывающих произвольные электрические цепи, так как для методов Радо ПА и Лобатто ША, используемых для синтеза

гибридных методов, отсутствует эффект уменьшения порядка точности, характерный для других классов НРК-методов.

*Исследование выполнено при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-00631а.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бирюков В.Н. Численный анализ жестких узкополосных систем / В.Н. Бирюков, А.М. Пилипенко // Радиосистемы. 2002. № 2(62). С. 36-38.
2. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Пер. с англ. / Э. Хайрер, Г. Ваннер. М.: Мир, 1999. 685 с.
3. Жук Д.М. Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования динамики технических систем и объектов / Д.М. Жук, В.Б. Маничев, А.О. Ильницкий // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2008. № 1. С. 109-113.
4. Холл Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Д. Холл, Д. Уатт. М.: Мир, 1979. 312 с.
5. Пилипенко А.М. Гибридные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений жестких и/или колебательных цепей / А.М. Пилипенко, В.Н. Бирюков // Радиотехника. 2011. № 1. С. 11-15.
6. Ascher U.M. Computer Methods for Ordinary Equations and Differential-Algebraic Equations / U.M. Ascher, L.R. Petzold. Philadelphia, PA: SIAM, 1998. 314 p.
7. Maffezzoni P. Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods / P. Maffezzoni, L. Codecasa, D. D'Amore // IEEE Transactions. Circuits and Systems. 2007. Vol. 54. No. 2. Pp. 391-400.
8. Пилипенко А.М. Гибридные методы анализа электронных цепей во временной области / А.М. Пилипенко, В.Н. Бирюков // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2010. № 1. С. 92-95.
9. Pilipenko A.M. Methods of Testing Time-Domain Simulators in EDA Packages / A.M. Pilipenko, V.N. Biryukov, A.B. Fadeeva // Proceedings of 2016 IEEE East-West Design & Test Symposium, EWDTs. 2016. P. 172-175.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы решения жестких систем / Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. 1995. Т. 7. № 5. С. 8-11.

A.M. Pilipenko  
**HYBRID METHODS OF HIGH ACCURACY ORDER FOR  
NUMERICAL ANALYSIS IN THE TIME DOMAIN OF STIFF AND  
OSCILLATING CIRCUITS**

*Southern Federal University,  
Taganrog, Russia*

*This paper considers the problems of numerical analysis of electronic circuits in the time domain that arise when using modern circuit simulators based on SPICE. Time-domain analysis of circuits through modern electronic simulators is realized by means of Gear's methods and the trapezoidal method. An important property of models of real electronic circuits and especially of RF circuits is simultaneous stiffness and oscillability of these models. In turn, Gear's methods can lose stability for oscillating circuits' analysis, because these methods are not P-stable, and the trapezoidal method has a sufficiently high error for stiff circuits' analysis, because it is not L-stable. The aim of this paper is to develop hybrid L- and P-stable methods based on the combination of various numerical methods for solving ordinary differential equations which provide a high accuracy of numerical simulation in the time domain of stiff and oscillating circuits. Hybrid methods are built on the basis of the known Rado IIA and Lobatto IIIA methods, which are subclasses of implicit Runge-Kutta methods. Comparative analysis of the known methods and the proposed hybrid methods demonstrates high accuracy of the latter methods for time-domain simulation of stiff and oscillating circuits and systems. Hybrid methods are also effective for numerical solving differential-algebraic equations that describe arbitrary electrical circuits.*

**Keywords:** time-domain simulation, stiff systems, oscillating circuits, implicit Runge-Kutta methods, accuracy, stability.

## REFERENCES

1. Biryukov V.N. Chislennyy analiz zhestkikh uzkopolosnykh sistem / V.N. Biryukov, A.M. Pilipenko // Radiosistemy. 2002. No. 2(62). pp. 36-38.
2. Khayrer E. Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi. Per. s angl. / E. Khayrer, G. Vanner. M.: Mir, 1999. 685 p.
3. Zhuk D.M. Metody i algoritmy resheniya differentsial'no-algebraicheskikh uravneniy dlya modelirovaniya dinamiki tekhnicheskikh sistem i ob'ektov / D.M. Zhuk, V.B. Manichev, A.O. Il'nitskiy // Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem (MES). 2008. No. 1. pp. 109-113.
4. Khol D. Sovremennye chislennye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy / D. Khol, D. Uatt. M.: Mir, 1979. 312 p.
5. Pilipenko A.M. Gibridnye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy zhestkikh i/ili kolebatel'nykh tsepey / A.M. Pilipenko, V.N. Biryukov // Radiotekhnika. 2011. No. 1. pp. 11-15.

6. Ascher U.M. Computer Methods for Ordinary Equations and Differential-Algebraic Equations / U.M. Ascher, L.R. Petzold. Philadelphia, PA: SIAM, 1998. 314 p.
7. Maffezzoni P. Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods / P. Maffezzoni, L. Codecasa, D. D'Amore // IEEE Transactions. Circuits and Systems. 2007. Vol. 54. No. 2. pp. 391-400.
8. Pilipenko A.M. Gibridnye metody analiza elektronnykh tsepey vo vremennoy oblasti / A.M. Pilipenko, V.N. Biryukov // Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem (MES). 2010. No. 1. pp. 92-95.
9. Pilipenko A.M. Methods of Testing Time-Domain Simulators in EDA Packages / A.M. Pilipenko, V.N. Biryukov, A.B. Fadeeva // Proceedings of 2016 IEEE East-West Design & Test Symposium, EWDTs. 2016. pp. 172-175.
10. Kalitkin N.N. Chislennyye metody resheniya zhestkikh sistem / N.N. Kalitkin // Matematicheskoe modelirovaniye. 1995. Vol. 7. No. 5. pp. 8-11.