

УДК 621.372:519.622

А.М. Пилипенко, А.Б. Фадеева

**ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОЗВЕННОЙ МОДЕЛИ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ
ДЛЯ ТЕСТИРОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА
ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В САПР ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

Южный федеральный университет

*Институт радиотехнических систем и управления,
Таганрог, Россия*

В статье рассмотрены проблемы тестирования алгоритмов численного моделирования во временной области для различных классов электронных цепей. В связи с постоянным совершенствованием алгоритмов численного моделирования электронных цепей во временной области особую актуальность приобретает проблема разработки тестовых задач для оценки эффективности указанных алгоритмов. Целью статьи является разработка и верификация модели тестовой цепи, позволяющей оценить эффективность современных алгоритмов численного анализа переходных процессов для различных классов радиотехнических цепей и устройств. В качестве тестовой цепи предлагается многозвенная модель цепи с распределенными параметрами (многозвенная LC-цепь). Для данной цепи предложена оригинальная методика определения аналитического выражения отклика при воздействии на цепь скачка напряжения. С помощью предложенной тестовой цепи проведена оценка точности алгоритмов Гира и трапеций, используемых в современных пакетах схемотехнического проектирования для численного анализа переходных процессов. Показано, что модель тестовой цепи является колебательной и может иметь высокую жесткость, которая прямо пропорциональна размерности модели. Таким образом, предложенная в данной работе модель линии передачи представляет собой масштабируемую тестовую задачу, позволяющую оценивать эффективность различных алгоритмов численного анализа переходных процессов.

Ключевые слова: анализ переходных процессов, длинная линия, колебательная цепь, жесткая система, точность моделирования.

Введение. В настоящее время продолжается разработка и совершенствование систем автоматизированного проектирования (САПР) электронных цепей. Одним из важных направлений развития указанных систем является модификация известных и разработка новых алгоритмов моделирования электронных цепей во временной области [1]. В частности, перспективными являются алгоритмы моделирования электронных цепей, основанные на гибридных методах численного анализа переходных процессов, которые позволяют исследовать электронные цепи с различной динамикой, обеспечивая при этом минимальную погрешность решения и максимальную скорость анализа [2]. В связи с появлением новых алгоритмов численного моделирования электронных цепей особую актуальность приобретает проблема разработки тестовых задач для оценки эффективности указанных алгоритмов. В работах [3 – 5] представлены математические модели тестов для численных методов. В работе [6]

описаны тестовые задачи в виде математических и схемных моделей различных электронных цепей, а также приведена методика построения схемных моделей по заданным математическим моделям.

Целью данной работы является разработка и верификация тестовой задачи, позволяющей оценить эффективность современных алгоритмов численного анализа переходных процессов для различных типов моделей радиотехнических устройств. Для достижения указанной цели в данной работе были решены следующие задачи: описание модели тестовой цепи, обладающей рядом свойств, характерных для различных классов радиотехнических цепей и устройств; определение аналитического решения задачи анализа переходных процессов в тестовой цепи; проведение численного анализа переходных процессов в тестовой цепи с помощью современных алгоритмов моделирования; оценка погрешностей полученных численных решений.

В качестве тестовой цепи была выбрана многозвенная LC-цепь без потерь, которая является моделью линии передачи, и для которой можно определить аналитическое выражение для мгновенного значения отклика. Выбор данной модели объясняется следующими причинами: во-первых, переходные процессы в многозвенной LC-цепи без потерь имеют колебательный характер, что характерно для различных радиотехнических устройств, например, для генераторов и резонансных систем; во-вторых, при увеличении сложности (размерности) модели будет расти ее жесткость, которая обусловлена наличием быстрых и медленных компонент в переходном процессе. Таким образом, предлагаемая модель будет колебательной и, одновременно, может иметь высокую жесткость, что с одной стороны характерно для многих радиотехнических устройств, а с другой стороны вызывает наибольшие трудности для программ численного анализа переходных процессов, применяющихся в пакетах схемотехнического проектирования [7, 8].

Построение модели линии передачи. Схемная модель линии передачи без потерь представляет собой многозвенную LC-цепь (см. Рисунок 1). В случае однородной линии передачи можно полагать, что параметры элементов многозвенной LC-цепи имеют следующие значения: $L_1 = L_2 = \dots = L_N = L_{\text{ЭК}}/N$, $C_1 = C_2 = \dots = C_{N-1} = C_{\text{ЭК}}/N$, $C_0 = C_N = C_{\text{ЭК}}/2N$, где N – число элементарных звеньев в модели линии передачи, $L_{\text{ЭК}}$ – общая индуктивность линии, $C_{\text{ЭК}}$ – общая емкость линии.

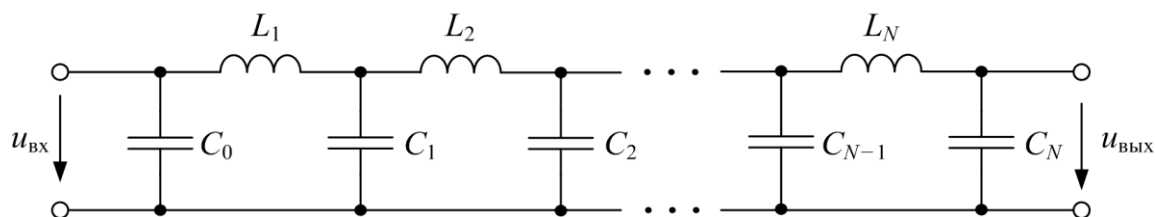


Рисунок 1 – Многозвенная модель линии передачи

Уравнения электрического равновесия многозвенной LC-цепи представляют собой линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), порядок которой равен $2N$. В случае большого значения N получить аналитическое решение системы ОДУ многозвенной линии классическим методом достаточно сложно. В данной работе для определения аналитического выражения для мгновенного значения напряжения на выходе линии $u_{\text{вых}}$ при заданном напряжении на входе линии $u_{\text{вх}}$ предлагается использовать операторный метод анализа переходных процессов, в соответствии с которым

$$U_{\text{вых}}(p) = K_{21}(p)U_{\text{вх}}(p), \quad (1)$$

где $K_{21}(p)$ – операторный коэффициент передачи по напряжению многозвенной линии; $U_{\text{вх}}(p) \doteq u_{\text{вх}}$ и $U_{\text{вых}}(p) \doteq u_{\text{вых}}$ – операторные изображения напряжений на входе и выходе линии соответственно; знак \doteq обозначает преобразование Лапласа; p – оператор Лапласа.

В общем случае коэффициент передачи $K_{21}(p)$ можно определить из уравнений электрического равновесия цепи, составленных методом узловых напряжений. Размерность системы узловых уравнений будет равна числу звеньев N , поэтому с ростом значения N определение $K_{21}(p)$ методом узловых напряжений оказывается весьма трудоемким.

Следует отметить, что многозвенную модель линии передачи можно представить в виде каскадного соединения N элементарных звеньев. На Рисунке 2 показана схема k -го элементарного звена линии передачи, где $k = 1, 2, \dots, N$ – номер звена. Параметры элементов k -го звена $L_k = L_{\text{эк}}/N$, $C_k = C_{\text{эк}}/N$.

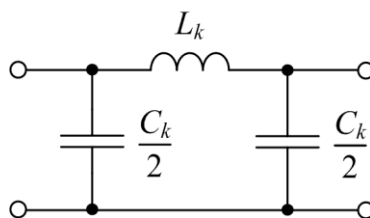


Рисунок 2 – Элементарное звено линии передачи

Элементарное звено линии передачи представляет собой П-образный симметричный четырехполюсник, матрица А-параметров которого имеет вид [9]:

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \frac{p^2 L_k C_k + 1}{2} & p L_k \\ p C_k \left(\frac{p^2 L_k C_k + 1}{4} + 1 \right) & \frac{p^2 L_k C_k + 1}{2} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Многозвенная модель LC-линии представляет собой каскадное соединение одинаковых П-образных элементарных звеньев, поэтому матрица A-параметров LC-линии имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_N = \mathbf{A}_k^N = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Из теории четырехполюсников известно, что коэффициент передачи $K_{21}(p)$ и параметр A_{11} связаны с помощью следующего соотношения [9]

$$K_{21}(p) = 1 / A_{11}. \quad (4)$$

Таким образом, предлагаемая в данной работе методика определения $K_{21}(p)$ не требует составления и решения систем уравнений высокой размерности, а сводится к перемножению матриц размером 2×2 .

Будем полагать, что воздействие на входе LC-линии представляет собой скачок напряжения высотой E :

$$u_{\text{вх}} = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ E, & t \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

В соответствии с таблицами оригиналов и изображений по Лапласу $U_{\text{вх}}(p) = E/p$ [9], тогда исходя из выражения (1) мгновенное значение напряжения на выходе LC-линии можно определить с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$u_{\text{вых}} \doteq \frac{EK_{21}(p)}{p}. \quad (6)$$

Для определения обратного преобразования Лапласа рекомендуется использовать программы компьютерной математики, позволяющие выполнять символьные вычисления. В частности, в данной работе аналитическое выражение для напряжения на выходе LC-линии было получено с помощью программы Mathcad:

$$u_{\text{вых}} = U_0 + \sum_{k=1}^N U_k \cos(\omega_k t), \quad (7)$$

где $U_0 = E$ – вынужденная составляющая напряжения на выходе LC-линии; U_k и ω_k – постоянные величины, которые определяются в программе Mathcad с точностью не менее 15-ти значащих цифр.

Результаты моделирования. Как было указано выше, наибольшие трудности для программ численного анализа переходных процессов возникают при моделировании цепей, которые являются колебательными и жесткими одновременно. В соответствии с определением жесткости, приведенным в [10], жесткость модели можно оценить с помощью следующего выражения

$$\eta_1 = \frac{\max |p_k|}{\min |p_k|}, \quad (8)$$

где p_k – корни характеристического уравнения системы ОДУ, описывающей исследуемую цепь.

Таким образом, для оценки жесткости модели многозвенной линии необходимо определить корни характеристического уравнения соответствующей системы ОДУ, которые совпадают с полюсами коэффициента передачи $K_{21}(p)$. При этом модель является жесткой, если значение $\eta_1 \gg 1$ [10]. В том случае, когда корни характеристического уравнения не удастся определить, можно использовать описанные ниже способы оценки жесткости [11].

Как известно, жесткость модели определяется отношением скоростей изменения наиболее быстрой и наиболее медленной составляющих переходного процесса [8]. Данное отношение можно оценить следующим образом

$$\eta_2 = \frac{f_{\max}}{f_{\min}}, \quad (9)$$

где f_{\min} и f_{\max} – минимальное и максимальное значения резонансных частот цепи.

Значение f_{\min} и f_{\max} можно определить по графику амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) коэффициента передачи по напряжению рассматриваемой цепи. В качестве примера на Рисунке 3 показана АЧХ коэффициента передачи исследуемой модели LC-линии, полученная с помощью пакета схемотехнического моделирования NI Multisim (здесь и

далее были выбраны следующие значения суммарной индуктивности и емкости линии $L_{\text{эк}} = 1$ мкГн и $C_{\text{эк}} = 1$ пФ). На Рисунке 3 значения f_{min} и f_{max} соответствуют наименьшей и наибольшей частотам, при которых АЧХ LC-линии принимает максимальное значение.

Жесткость рассматриваемой модели также можно оценить с помощью результатов анализа переходных процессов. На Рисунке 4 приведены полученные в NI Multisim временные диаграммы напряжения на выходе LC-линии ($N = 8$) при подаче на ее вход скачка напряжения высотой E (здесь и далее будем полагать $E = 1$ В). Из Рисунка 4 можно определить жесткость модели LC-линии с помощью следующего выражения:

$$\eta_3 = \frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{min}}}, \quad (10)$$

где T_{max} – период колебаний, вызванных задержками и отражениями сигнала от конца и начала линии; T_{min} – период высокочастотных осцилляций, вызванных переходными процессами в отдельных звеньях линии.

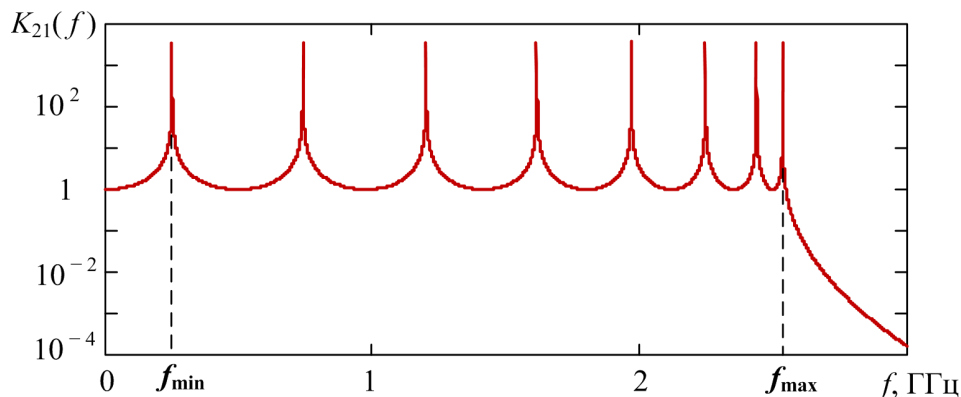


Рисунок 3 – АЧХ коэффициента передачи LC-линии при $N = 8$

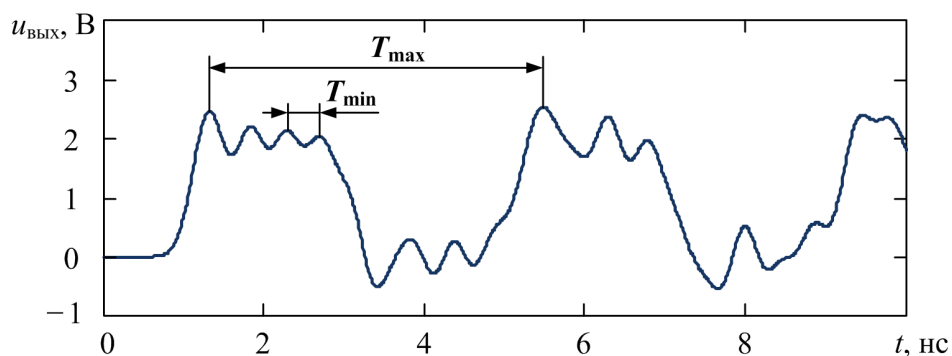


Рисунок 4 – Переходные процессы в LC-линии при $N = 8$

Численные эксперименты, проведенные в данной работе, показали, что значения жесткости модели LC-линии η_1 , η_2 и η_3 , полученные с помощью выражений (8), (9) и (10) при одинаковом числе звеньев N отличаются не более чем на 2 %. Приближенное выражение для жесткости модели LC-линии в зависимости от числа звеньев ($N \geq 2$) можно представить в виде

$$\eta(N) \approx 1,25N. \quad (11)$$

Для верификации предлагаемой тестовой задачи было проведено исследование точности алгоритмов Гира и трапеций, использующихся для численного анализа переходных процессов в большинстве пакетов схемотехнического моделирования. Тестирование алгоритмов Гира и трапеций проводилось в пакете NI Multisim. Для оценки точности алгоритмов численного анализа переходных процессов в тех случаях, когда известно аналитическое решение тестовой задачи, как правило, рассчитывают текущую относительную погрешность численного решения, которая имеет следующий вид [12]

$$\varepsilon_k = |u(t_k) - u_k| / u_{\max}, \quad (12)$$

где u_k – значение отклика цепи (выходного напряжения), полученное с помощью численного алгоритма; $u(t_k)$ – точное значение отклика; u_{\max} – максимальное значение отклика.

На Рисунке 5 приведены текущие погрешности анализа переходных процессов в LC-линиях с различным числом звеньев ($N = 1$ и $N = 8$). Результаты на Рисунке 5 получены при использовании алгоритма Гира (кривые 1 и 3) и алгоритма трапеций (кривые 2 и 4). Для расчета кривых 1 и 2 опции численного анализа выбирались программой NI Multisim по умолчанию: предельно допустимая относительная ошибка моделирования $REL TOL = 10^{-3}$; максимальный временной шаг $h_{\max} = 0,2$ нс. Для расчета кривых 3 и 4 опции численного анализа устанавливались «вручную»: $REL TOL = 10^{-9}$; $h_{\max} = 0,002$ нс.

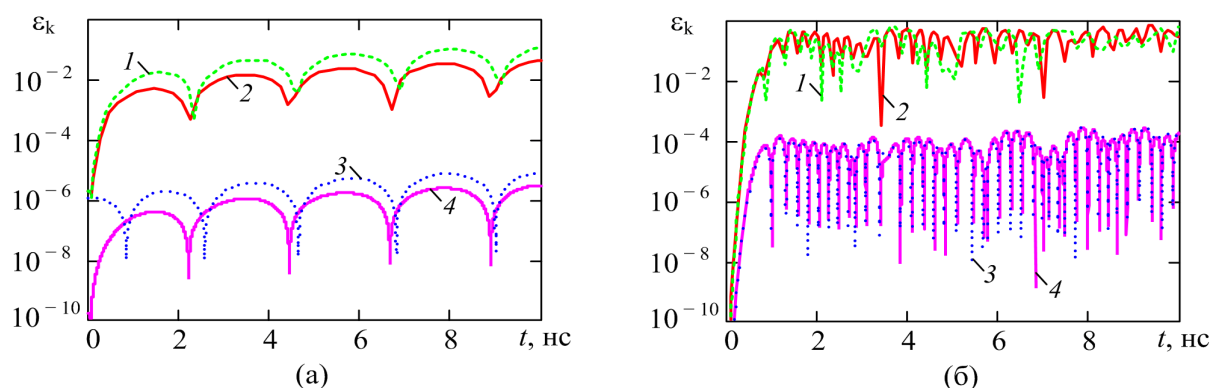


Рисунок 5 – Текущие погрешности моделирования LC-линии при $N = 1$ (а) и $N = 8$ (б)

Обсуждение результатов. Результаты численного анализа, представленные на Рисунке 5, показывают, что в случае моделирования LC-линии, состоящей из одного элементарного звена ($N = 1$) максимальная текущая погрешность алгоритма трапеций оказывается в 2 – 3 раза меньше аналогичной погрешности алгоритма Гира при одинаковых значениях $RELTOL$ и h_{max} . Высокая точность алгоритма трапеций при $N = 1$ объясняется тем, что модель LC-линии в этом случае не является жесткой.

При увеличении числа звеньев в модели LC-линии до $N = 8$ жесткость модели достигает значения $\eta(N) \approx 10$. В итоге при $N = 8$ максимальная текущая погрешность алгоритма Гира увеличивается почти на порядок, а алгоритма трапеций – более чем в 20 раз по сравнению с аналогичными погрешностями, полученными для случая однозвенной линии. Данный факт подтверждает корректную работу предлагаемого теста, поскольку известно, что глобальная погрешность метода трапеций возрастает при увеличении жесткости задачи, кроме того в случаях когда задача оказывается жесткой и колебательной одновременно алгоритм Гира теряет свою эффективность [7].

Заключение. Предложенная в данной работе модель представляет собой универсальный тест для широкого класса алгоритмов анализа переходных процессов, использующихся в пакетах современных схемотехнического моделирования электронных цепей. При малом числе звеньев предлагаемая модель является достаточно простой колебательной цепью. С ростом числа звеньев модель линии передачи становится колебательной и жесткой одновременно, поэтому задача численного анализа такой модели во временной области является достаточно трудной для электронных симуляторов. Таким образом, модель линии передачи представляет собой масштабируемую тестовую задачу, позволяющую оценивать эффективность различных алгоритмов численного анализа переходных процессов.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-00631а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maffezzoni P. Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods / P. Maffezzoni, L. Codecasa, D. D'Amore // IEEE Transactions. Circuits and Systems. 2007. Vol. 54. No. 2. Pp. 391-400.
2. Пилипенко А.М. Гибридные методы высокого порядка точности для численного анализа во временной области жестких и колебательных цепей / А.М. Пилипенко // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. 2017. № 3 (18). URL: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2017/08/Pilipenko_3_1_17.pdf
3. Petzold L.R. Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations / L.R. Petzold, L.O. Jay, J. Yen // Acta Numerica. 1997. P. 437-483.
4. Гужев Д.С. Уравнение Бюргерса – тест для численных методов / Д.С. Гужев, Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. 1995. Т. 7. № 4. С. 99-127.
5. Галанин М.П. Разработка и тестирование методов решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений / М.П. Галанин, С.Р. Ходжаева // Математическое моделирование и численные методы. 2014. Вып. 4. С. 95-119.
6. Маничев В.Б. Метод математического тестирования программ анализа переходных процессов в САПР электронных схем / В.Б. Маничев, Д.М. Жук, Ф.А. Витюков // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2014. № 1. С. 83-88.
7. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Пер. с англ. / Э. Хайрер, Г. Ваннер. М.: Мир, 1999. 685 с.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы решения жестких систем / Н.Н. Калиткин // Математическое моделирование. 1995. Т. 7, № 5. С. 8-11.
9. Попов В.П. Основы теории цепей. В 2 ч. Часть 1: учебник для академического бакалавриата / В.П. Попов. 7-е изд., перераб. и доп. М.: Издательство Юрайт, 2016. 378 с.
10. Ракитский Ю.В. Численные методы решения жестких систем / Ю.В. Ракитский, С.М. Устинов, И.Г. Черноруцкий. М.: Наука, 1979. 208 с.
11. Пилипенко А.М. Оценка жесткости многозвенной модели линии передачи / А.М. Пилипенко, А.Б. Фадеева // Проблемы современной системотехники. Сборник научных статей. Вып. X. Таганрог: Южный федеральный университет, 2016. С. 69-73.
12. Pilipenko A.M. Methods of testing time-domain simulators in EDA packages / A.M. Pilipenko, V.N. Biryukov, A.B. Fadeeva // Proceedings of 2016 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs. 2016. P. 172-175.

A.M. Pilipenko, A.B. Fadeeva
**APPLICATION OF MULTISECTION MODEL OF TRANSMISSION
LINE FOR TESTING ALGORITHMS OF TRANSIENT ANALYSIS IN
EDA PACKAGES**

*Southern Federal University
Institute of Radio Engineering Systems and Control,
Taganrog, Russia*

This paper considers the problems of testing time-domain simulation algorithms for various classes of electronic circuits. The problem of development test tasks for evaluating the effectiveness of algorithms for numerical simulation of electronic circuits in the time domain becomes particularly actual due to the continuous upgrading of these algorithms. The aim of this work is development and verification of the model of test circuit, which makes it possible to estimate the efficiency of modern algorithms for transient analysis of various classes of radio engineering devices. The multisection model of circuit with distributed parameters (the multisection LC-circuit) is proposed as the test circuit. The original technique is proposed for determining the analytical expression of the multisection LC-circuit step response. The accuracy estimation of the base algorithms for transient analysis in modern circuit simulators (Gear and trapezoidal algorithms) was conducted using the proposed test circuit. It is shown that the model of the test circuit can be oscillating and stiff simultaneously. The stiffness of the model is directly proportional to its dimension. Thus, the model of the transmission line is a scalable test problem that allows to evaluate the effectiveness of various numerical algorithms of transient analysis.

Keywords: transient analysis, transmission line, oscillating circuit, stiff system, simulation accuracy.

REFERENCES

1. Maffezzoni P. Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods / P. Maffezzoni, L. Codecasa, D. D'Amore // IEEE Transactions. Circuits and Systems. 2007. Vol. 54. No. 2. pp. 391-400.
2. Pilipenko A.M. Gibridnye metody vysokogo poryadka tochnosti dlya chislennogo analiza vo vremennoy oblasti zhestkikh i kolebatel'nykh tsepey / A.M. Pilipenko // Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii. 2017. No.3 (18). URL: https://moit.vivt.ru/wp-content/uploads/2017/08/Pilipenko_3_1_17.pdf
3. Petzold L.R. Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations / L.R. Petzold, L.O. Jay, J. Yen // Acta Numerica. 1997. pp. 437-483.
4. Guzhev D.S. Uravnenie Byurgersa – test dlya chislennykh metodov / D.S. Guzhev, N.N. Kalitkin // Matematicheskoe modelirovanie. 1995. Vol. 7. No. 4. pp. 99-127.
5. Galanin M.P. Razrabotka i testirovanie metodov resheniya zhestkikh obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy / M.P. Galanin, S.R. Khodzhaeva // Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody. 2014. Vyp. 4. pp. 95-119.

6. Manichev V.B. Metod matematicheskogo testirovaniya programm analiza perekhodnykh protsessov v SAPR elektronnykh skhem / V.B. Manichev, D.M. Zhuk, F.A. Vityukov // Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem (MES). 2014. No. 1. pp. 83-88.
7. Khayrer E. Reshenie obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. Zhestkie i differentsial'no-algebraicheskie zadachi. Per. s angl. / E. Khayrer, G. Vanner. M.: Mir, 1999. 685 p.
8. Kalitkin N.N. Chislennyye metody resheniya zhestkikh sistem / N.N. Kalitkin // Matematicheskoe modelirovanie. 1995. Vol. 7, No. 5. pp. 8-11.
9. Popov V.P. Osnovy teorii tsepey. V 2 ch. Chast' 1: uchebnik dlya akademicheskogo bakalavriata / V.P. Popov. 7-e izd., pererab. i dop. M.: Izdatel'stvo Yurayt, 2016. 378 p.
10. Rakitskiy Yu.V. Chislennyye metody resheniya zhestkikh sistem / Yu.V. Rakitskiy, S.M. Ustinov, I.G. Chernorutskiy. M.: Nauka, 1979. 208 p.
11. Pilipenko A.M. Otsenka zhestkosti mnogozvennoy modeli linii peredachi / A.M. Pilipenko, A.B. Fadeeva // Problemy sovremennoy sistemotekhniki. Sbornik nauchnykh statey. Vyp. X. Taganrog: Yuzhnyy federal'nyy universitet, 2016. pp. 69-73.
12. Pilipenko A.M. Methods of testing time-domain simulators in EDA packages / A.M. Pilipenko, V.N. Biryukov, A.B. Fadeeva // Proceedings of 2016 IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTs. 2016. pp. 172-175.