Моделирование, оптимизация и информационные технологии.
Научный журнал №4(19) http://moit.vivt.ru/
2017

УДК 519.7

Л.А. Лютикова

ОПТИМИЗАЦИЯ БАЗ ЗНАНИЙ МЕТОДАМИ БУЛЕВОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Институт прикладной математики и автоматизации - филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», Нальчик, КБР

Объектом исследования данной работы является предметная область, представляющая собой прецедентную зависимость между объектами и их характеристиками используемую при решении задач распознавания образов.

Интеллектуальный анализ данных является одним из необходимых этапов решения плохо формализованных задач, поэтому во многих случаях от метода построения баз знаний, их анализа и минимизации зависит точность решения поставленной задачи. Разработка общих формальных методов для выявления логических закономерностей в любой заданной предметной области представляется весьма актуальной проблемой, так как предоставляет возможность формирования оптимальных баз знаний, что существенно упрощает решение и улучшает его качество.

В данной работе для анализа и минимизации баз знаний используется аппарат дифференцирования булевых функций, который являются направлениями современной дискретной математики и находят свое применение в задачах динамического анализа и синтеза дискретных цифровых структур.

Основными результатами проведенного исследования являются построенная логическая функция, анализирующая зависимость между объектами и характеризующими их признаками, представляющая возможность выявить все закономерности данной предметной области; а также метод минимизации баз знаний, полученных на основе логического анализа данных, выявляющий минимальный набор решающих правил, достаточным для решения поставленной задачи.

Ключевые слова: Булева функция, логические операции, база знаний, дифференцирование, минимизация, логические аксиомы.

Введение

Интеллектуальный анализ данных это уже целый раздел теоретической информатики, выявляющий скрытые неявные закономерности в данных, разрабатывающий принципы и методы классификации, процессов, сигналов, ситуаций - всех тех объектов, которые могут быть описаны конечным набором некоторых признаков или свойств. Существует ряд методов для решения подобных задач, каждый из которых обладает как своими преимуществами, так и своими недостатками. В данной работе для анализа данных и построения на их основе баз знаний используется аппарат математической логики. Строиться логическая функция классификатор, а также проводиться минимизации результатов работы данной функции на основе дифференциального исчисления булевых функций. Дифференциальное и интегральное исчисления булевых функций являются направлениями современной дискретной математики и находят свое применение в задачах динамического анализа и синтеза дискретных цифровых структур.

Постановка задачи

Пусть $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ $x_i\in\{0,1,...,k_i-1\}$, где $k_i\in[2,...,N]$, $N\in\mathbb{N}$ –множество признаков. $Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}$– множество объектов, каждый объект y_i характеризуется соответствующим набором признаков $x_1(y_i),...,x_n(y_i): y_i=f(x_1(y_i),...,x_n(y_i))$. Или $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, где $x_i\in\{0,1,...,k_r-1\}$, $k_r\in[2,...,N], N\in Z$ – обрабатываемые входные данные $X_i=\{x_1(y_i),x_2(y_i),...,x_n(y_i)\}$, $i=1,...,n$, $y_i\in Y, Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ – выходные данные:

$$\begin{pmatrix} x_1(y_1) & x_2(y_1) & ... & x_n(y_1) \\ x_1(y_2) & x_2(y_2) & ... & x_n(y_2) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_1(y_m) & x_2(y_m) & ... & x_n(y_m) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_m \end{pmatrix}$$

Вид функции $Y=f(X)$ не задан. Требуется восстановить данную функцию по наблюдениям. А также найти $B=\{p_1,...,p_r\}$, где $r\to\min$, B-минимальное множество правил, задающих анализируемую предметною область. Для объяснения логической связи между понятиями предметной области будем использовать правило продукции, предложенное Э. Постом [2]. В нашем случае правило продукции представляет собой подстановку следующего вида:

$$x_1(y_i)\,\&\,x_2(y_i)\,\&...\&\,x_n(y_i)\to P(y_i)\text{, где } P(y)=\begin{cases}1, & y=y_i\\ 0, & иначе\end{cases},$$

$x_1(y_i),x_2(y_i),...,x_n(y_i)$ конечное число признаков, характеризующих элемент y_i.

Это позволяет выразительно представить зависимости между объектом и его признаками.

$$\mathop{\&}_{j=1}^{m} x_j(y_i,)\to P(y_i), i=1,...,l; x_j(y_i)\in\{0,1,...,k-1\},$$

где предикат $P(y_i)$ принимает значение истина, т.е. $P(y_i)=1$ в случае если $y=y_i$ и $P(y_i)=0$, если $y\neq y_i$. Или в виде:

$$\mathop{\vee}_{i=1}^{n} \bar{x}(y_j)\vee P(y_j), j\in[1,\ldots,m]$$

Решающей функций назовем конъюнкцию всех решающих правил:

$$\mathop{\&}_{j=1}^{m} x_j(y_i,) \to P(y_i), i=1,...,l; x_j(y_i) \in \{0,1,...,k-1\}, \text{ или } \quad f(X) = \mathop{\&}_{j=1}^{m}\left(\mathop{\vee}_{i=1}^{n} \overline{x_i(y_j)} \vee P(y_j)\right) \quad (1)$$

Эту функцию можно проинтерпретировать следующим образом:

Если обучающую выборку, состоящую из k элементов описать булевой функцией

$$F\left(x_1(y_i),...,x_n(y_i),P^{\sigma}(y_1),...,P^{\sigma}(y_n)\right), \text{ где } P^{\sigma}(y_i) = \begin{cases} \overline{P(y_i)} & при \quad \sigma = 0 \\ P(y_i) & при \quad \sigma = 1 \end{cases},$$

то данная функция принимает значения «0» на наборах $\left(x_1(y_i),...,x_n(y_i),P^{\sigma}(y_1),...,\overline{P(y_i)},...,P^{\sigma}(y_n)\right)$ и «1» на всех остальных на наборах, т.е. она допускает любые отношения между признаками и объектами, кроме отрицания объекта на множестве характеризующих этот объект признаках в обучающей выборке.

Все свойства функции (1) подробно рассмотрены в работе [1,3].

Определение. Моделируемая система знаний является полной, если она обеспечивает вывод всех возможных решений данной области.

Определение. Моделируемая система знаний называется непротиворечивой, если на наборе признаков $X_j \in X$, где X – пространство признаков, невозможно получить выводы: $X_j \to y_j$ и $X_j \to \overline{y_j}$.

При раскрытии скобок сокращение соответствующих элементов по следующим правилам:

- если некоторая переменная входит в ДНФ с одним знаком во всех дизъюнктах, то удаляем все дизъюнкты, содержащие эту переменную; (данная переменная неинформативна).

- если в ДНФ имеется какой-то <u>однолитерный</u> дизъюнкт x_i^j, то выполняем следующие действие: удаляем все дизъюнкты вида $x_i^j \,\&...$(правило поглощения).

Получим тупиковою дизъюнктивную форму относительно начальной, которую можно характеризовать, как набор аксиом для рассматриваемых данных, из которых может быть получена любая взаимосвязь между объектами и их характеристиками на заданной области.

Определение. Логическим описанием класса K_j назовем дизъюнкту, содержащую некоторый набор предикатов элементов обучающей выборки и переменные характеризующие признаки этих элементов.

Утверждение. Функция

$$f(X) = \&_{i=1}^{n}(\mathop{\vee}_{j=1}^{m} \overline{x}(y_j) \vee y_j), \qquad x(y_j) \in [0,1,2], \quad y_j \in Y$$

полна на заданном множестве признаков.

Доказательство:

По определению система функций $\{f(X)\}$ называется полной на заданном множестве, если для каждого набора признаков $X_j \in X$ можно сделать хотя бы один вывод $f(X_j) = y_j$.

Функция при умножении:

$$\bar{x}_i(y_j) \,\&\, \bar{x}_i(y_l) = \begin{cases} \bar{x}_i(y_j) & при \quad \bar{x}_i(y_j) = \bar{x}_i(y_l) \\ 0 & в \quad противном \quad случае \end{cases}$$

Тогда

$$y_j \bar{x}_i(y_l) \vee \bar{x}_i(y_j) \,\&\, \bar{x}_i(y_l) = \begin{cases} \bar{x}_i(y_j) & при \quad \bar{x}_i(y_j) = \bar{x}_i(y_l) \\ y_j \,\&\, \bar{x}_i(y_l) & в\, противном \quad случае \end{cases}$$

если $\bar{x}_i(y_j) \neq \bar{x}_i(y_l)$, то $x_i(y_j) \in \bar{x}_i(y_l)$ дизъюнкт $y_j \,\&\, \bar{x}_i(y_l)$ идентифицирует объект y_j по признаку $x_i(y_l)$. Подобные рассуждения можно провести по каждому из признаков. В результате чего можно утверждать, что для каждого набора признаков $X_j \in X$ можно сделать хотя бы один вывод $f(X_j) = y_j$.

Утверждение доказано.

Поскольку функция - это дизъюнкция конъюнкций разной длины переменных она может быть подвергнута сокращению.

В результате функция (1) будет состоять из переменных, сочетание которых не является характеристикой каких-либо классов или отдельных объектов, и объектной части (дизъюнктов), которые содержат предикаты объектов.

Алгоритм моделирования объектной части решающей функции

Для реализации объектной части решающей функции можно воспользоваться следующим алгоритмом:

- организуем двумерный массив с переменным количеством строк, количеством столбцов, расписывая численные значения каждого признака.

- соблюдая порядок следования заданных объектов, каждый элемент ставим в соответствующую ему строку и в соответствующий численному значению каждого характеризующего признака столбец (таблица 1).

Таблица 1.

0_1	1_1	k_1-1	0_2	1_2	k_2-1	…	0_n	1_n	k_n-1
	y_1					…			y_1
	y_2					…		y_2	
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
y_m				y_m		…			y_m

- проверяем каждый столбец заданного массива. Если в столбце более одного элемента, то вычеркиваем эти элементы из данных строк, заносим их в следующую строку в тот же столбец (таблица 2). Эти элементы образуют класс по данному значению переменной.

Таблица 2.

0_1	1_1	k_1-1	0_2	1_2	k_2-1	$\dots$	0_n	1_n	k_n-1
	$\cancel{y_1}$					$\dots$			$\cancel{y_1}$
	$\cancel{y_2}$					$\dots$		y_2	
	$y_1 y_2$								
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m				y_m		$\dots$			$\cancel{y_m}$
									$y_1 y_m$

- проверяем строки, если в строке, соответствующей какому-либо объекту остались переменные, то объект идентифицируется именно по этим переменным. Совокупность отдельных объектов и их индивидуальных признаков будут являться аксиомами для заданной области.

Строки, у которых несколько объектов в одном столбце, демонстрируют классы, которые возможно получить на данной предметной.

ПРИМЕР. Пусть задана следующая предметная область:

Таблица 3. Пример.

x_1	x_2	x_3	y
0	0	1	2
0	1	0	4
0	1	1	8
1	1	1	128

Множество признаков X представлено следующими значениями:

$X = \{X_1 = (0,0,1), X_2 = (0,1,0), X_3 = (0,1,1), X_4 = (1,1,1)\}$,

а множество объектов $Y = \{2, 4, 8, 128\}$.

Используя данный алгоритм решающая функция для примера будет иметь следующий вид:

$$f(X) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee P(128))\,\&\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee P(8))\,\&$$

$$\&(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee P(2))\,\&\,(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee P(4)) =$$

$$=\overline{x_1}\,\overline{x_2}\vee x_1\overline{x_2}\vee x_1\overline{x_3}\vee\overline{x_3}P(4)\vee\overline{x_2}P(2)\vee x_1P(128)\vee$$

$$\vee P(128)P(8)P(2)x_3\vee P(128)P(8)P(4)x_2\vee P(4)P(8)P(2)\overline{x_1}$$

Объектная часть функции представима следующими дизъюнктами

$$f(X)=\overline{x_3}P(4)\vee\overline{x_2}P(2)\vee x_1P(128)\vee P(128)P(8)P(2)x_3\vee$$

$$\vee P(128)P(8)P(4)x_2\vee P(4)P(8)P(2)\overline{x_1}$$

$$f^*(X)=\overline{x_3}P(4)\vee\overline{x_2}P(2)\vee x_1P(128)\vee P(8)x_2x_3$$

Некоторые свойства операций логического дифференцирования и интегрирования дискретных *k* – значных функций

Логическое дифференциальное и интегральное исчисления являются направлениями современной дискретной математики и находят свое применение в задачах динамического анализа и синтеза дискретных цифровых структур. Основным понятием логического дифференциального исчисления является производная булевой функции, представление о которой в виде булевой разности было получено еще в работах [2, 4].

Булева производная по некоторым своим свойствам является аналогом производной в классическом дифференциальном исчислении

Определение. Производная первого порядка $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ от булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ по переменной x_i есть сумма по модулю 2 соответствующих остаточных функций:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f(x_1,\ldots,x_{i-1},0,x_{i=1},\ldots,x_n)\oplus f(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i=1},\ldots,x_n)\qquad(2)$$

Определение. Весом производной $P(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ от булевой функции называется число конституент («1») этой производной.

Утверждение. Чем больше вес производной, тем больше функция $f(x_{1,\ldots,}x_n)$ зависит от переменной x_i.

Определение. Смешанной производной *k*-го порядка от булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ называется выражение вид:

$$\frac{\partial^k f}{\partial(x_1\ldots x_k)}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x_1\ldots\partial x_{k-1}}\right);$$

При этом порядок фиксированной переменной не имеет значения. Производная *k*-го порядка определяет условия, при которых эта функция изменяет свое значение при одновременном изменении значений $x_1,\ldots,x_k$.

Совершенные нормальные дизъюнктивные формы хотя и дают однозначные представления функции, но являются очень громоздкими. Реализация СДНФ программное или схемотехнически является избыточной, что ведет к увеличению программного кода, поэтому существуют методы упрощения логической записи – минимизации [5,6].

Теорема. Пусть $f(x_1,\dots,x_n)\in P_k$, пусть $\frac{d^l f}{dx^l}=const$, где l- конечное число, тогда функция $f(x_1,\dots,x_n)$ представима в виде псевдополинома.

В системах k=6,10 и выше, если $k\neq p^n$, где p -простое число существуют бесконечно дифференцируемые функции.

Свойство1. Пусть $f(x_1..x_{i-1},x_i,x_{i+1}...,x_n)$булева функция от n переменных, $k\le n$, $\frac{\partial f^k}{\partial x_{1....}\partial x_k}\neq 0$, тогда $(x_1..x_{i-1},x_i,x_{i+1}...,x_k)$- существенные переменные.

Свойство 2. Для булевой функции $f(x_1..x_{i-1},x_i,x_{i+1}...,x_n)$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}$.

Свойство 3. $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\vee x_i)=\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\vee \overline{x}_i)=\frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i}$ $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\vee x_i)=\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\vee \overline{x}_i)=\frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i}$.

Применение булевого дифференцирования для минимизации объектной части логической функции.

Воспользовавшись свойствами булевого дифференцирования, и формулами $\frac{\partial}{\partial x_i}(f\vee g)=\overline{f}\frac{\partial g}{\partial x_i}\vee\overline{g}\frac{\partial f}{\partial x_i}$ дифференцирования дизъюнкции, $\frac{\partial}{\partial x_i}(f\,\&\,g)=g\frac{\partial f}{\partial x_i}$и конъюнкции, применяя их к объектной части построенной логической функции (1) получим В=$\frac{\partial^k f}{\partial(x_1...x_k)}=\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1...\partial x_{k-1}})$, где x_k-переменные ходящие в объектную часть функции (1).

Применяя к нашему к примеру:

$f^*(X)=\overline{x}_3P(4)\vee\overline{x}_2P(2)\vee x_1P(128)\vee P(8)x_2x_3$ получаем

$$\frac{\partial f^*}{\partial x_1}=P(128)\vee\overline{x}_3P(4)\vee\overline{x}_2P(2)\vee P(8)x_2x_3;$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial x_1\partial\overline{x}_2}=P(128)\vee\overline{x}_3P(4)\vee P(2);$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial x_1\partial\overline{x}_2\partial\overline{x}_3}=P(128)\vee P(4)\vee P(2)$$

Соотнося объекты с переменными по которым проводилось дифференцирование, получаем минимальный набор правил, восстанавливающих исходную, заданную зависимость минимальную базу знаний, которая полностью восстанавливает исходные данные $B=\{P(128)x_1;P(4)\overline{x}_3;P(2)\overline{x}_2;P(8)\}$

Заключение.

В работе предложен подход к построению логической функции, для анализа зависимостей между объектами и характеризующими их признаками. Построенная функция дает возможность выявить все закономерности данной предметной области, провести классификацию объектов по признакам, выявить индивидуальные признаковые характеристики каждого объекта, что дает возможность для построения базы знаний корректно описывающую исследуемую предметную область. Далее предложен метод минимизации построенной базы знаний, полученной на основе логического анализа данных. В результате может быть выявлен минимальный набор решающих правил, достаточных для решения поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лютикова Л. А., Шматова Е. В. Анализ и синтез алгоритмов распознавания образов с использованием переменно-значной логики // "Информационные технологии". Том 22. №4. 2016. С. 292—297.
2. Бохманн Д., Станкович Р.С., Тошич Ж., Шмерко В.П., Янушкевич С.Н. Логическое дифференциальное исчисление: достижения, тенденции и приложения \\ Автоматика и телемеханика, 2000, № 6, С. 156–170; Autom. Remote Control, 61:6 (2000), P. 1033–1047.
3. Дюкова Е.В., Журавлев Ю.И., Прокофьев П.А. Методы повышения эффективности логических корректоров // Машинное обучение и анализ данных. 2015. Т. 1. № 11. С. 1555-1583.
4. Лютикова Л. А. Исследование систем булевых функций логическими интегро - дифференциальными методами // Материали за 6 Международна научна практична конференция «Найновите постижения на европейской наука-2011». София. Т. 37. С. 31-38.
5. Чернов А. В. Развитие аппарата логического дифференциального исчисления в применении к задачам проектирования и диагностики телекоммуникационных систем // Научно-технические ведомости СпБГПУ. 2008. № 2. С. 118-126.
6. Спирина М.С. Логическое дифференциальное и интегральное исчисление \\ Информационные системы и технологии: управление и безопасность. 2016. №4. С. 187-201.

L.A. Lyutikova

OPTIMIZATION OF KNOWLEDGE BASES BY BULLETIN DIFFERENTIATION METHODS

Institute of Applied Mathematics and Automation - Branch of the Federal State Budgetary Scientific Establishment "Federal Scientific Center "Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences", Nalchik, KBR

The subject of this study is the subject area, which is a precedent relationship between objects and their characteristics used in solving image recognition problems. Intellectual analysis of data is one of the necessary stages in the solution of poorly formalized problems; therefore, in many cases the accuracy of the solution of the task depends on the method of building knowledge bases, analyzing them and minimizing them. The development of common formal methods for revealing logical patterns in any given subject area seems to be a very pressing problem, as it provides the opportunity to form optimal knowledge bases, which greatly simplifies the solution and improves its quality.
In this paper, we use the apparatus for differentiating Boolean functions to analyze and minimize knowledge bases, which are the directions of modern discrete mathematics and find their application in problems of dynamic analysis and synthesis of discrete digital structures. The main results of the study are a constructed logical function that analyzes the relationship between objects and characteristics that characterize them, which is an opportunity to reveal all the laws of a given subject area; as well as the method of minimizing knowledge bases obtained on the basis of logical data analysis, revealing a minimal set of decision rules, sufficient for solving the task.

Keywords: Boolean function, logical operations, knowledge base, differentiation, minimization, logical axioms.

REFERENCES

1. Lyutikova L. A., Shmatova E. V. Analiz i sintez algoritmov raspoznavaniya obrazov s ispol'zovaniem peremenno-znachnoy logiki // "Informatsionnye tekhnologii". Vol. 22. No.4. 2016. pp. 292—297.
2. Bokhmann D., Stankovich R.S., Toshich Zh., Shmerko V.P., Yanushkevich S.N. Logicheskoe differentsial'noe ischislenie: dostizheniya, tendentsii i prilozheniya \\ Avtomatika i telemekhanika, 2000, No. 6, pp. 156–170; Autom. Remote Control, 61:6 (2000), pp. 1033–1047.
3. Dyukova E.V., Zhuravlev Yu.I., Prokof'ev P.A. Metody povysheniya effektivnosti logicheskikh korrektorov // Mashinnoe obuchenie i analiz dannykh. 2015. Vol.1. No. 11. pp. 1555-1583.
4. Lyutikova L. A. Issledovanie sistem bulevykh funktsiy logicheskimi integro - differentsial'nymi metodami // Materiali za 6 Mezhdunarodna nauchna praktichna konferentsiya «Naynovite postizheniya na evropeyskoy nauka-2011». Sofiya. Vol.37. pp. 31-38.
5. Chernov A. V. Razvitie apparata logicheskogo differentsial'nogo ischisleniya v primenenii k zadacham proektirovaniya i diagnostiki telekommunikatsionnykh sistem // Nauchno-tekhnicheskie vedomosti SpBGPU. 2008. No. 2. pp. 118-126.

6. Spirina M.P. Logicheskoe differentsial'noe i integral'noe ischislenie \\ Informatsionnye sistemy i tekhnologii: upravlenie i bezopasnost'. 2016. No.4. pp. 187-201.