УДК 004.942

С. В. Гаевой, В. М. А. Ахмед, С. А. Фоменков

УПРОЩЕНИЯ ГИПЕР-ГАММА-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ НАГРУЗКИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО КЛАСТЕРА

*Волгоградский государственный технический университет,
Волгоград, Россия*

В данной статье рассматриваются вычислительные кластеры (ВК), которые используются для выполнения входящих заданий. В нашем университете есть такой ВК, и нам необходимо предсказать его характеристики обслуживания при выполнении рабочих нагрузок. Важным методом анализа нагрузок является имитационное моделирование их выполнения с использованием моделей входящей нагрузки (МВН) для получения характеристик обслуживания. Мы ранее уже предложили несколько МВН, но все эти МВН используют аппроксимацию непрерывной случайной величины. Такая аппроксимация может быть выполнена как методом моментов (ММ), так и методом наибольшего (максимального) правдоподобия (МНП). Последний дает более точные результаты, но и требует больше машинного времени для определения. Наилучшими распределениями для аппроксимации являются гиперэкспоненциальное и гипер-гамма-распределения. Это было эмпирически доказано и в наших, и сторонних работах. Мы уже предложили упрощение, которое уменьшает время расчета аппроксимации гиперэкспоненциального распределения, используя ММ вместо МНП. В данной работе предлагается упрощенный метод аппроксимации гипер-гамма-распределения. Допущение уменьшает количество аппроксимированных параметров распределения, а затем использует ММ или МНП. Выбрано гипер-гамма-распределение, так как оно дает лучший результат среди всех используемых распределений, включая гиперэкспоненциальное. Тем не менее предложенный метод использует наше раннее предложенное упрощение для гиперэкспоненциального распределения. Чтобы проверить качество полученных результатов, мы используем моделирование приближения и сравниваем результаты с исходной рабочей нагрузкой (из лога работы кластера). Показаны характеристики предложенных методов. Обоснована необходимость выбора подходящего метода аппроксимации.

Ключевые слова: метод моментов, метод максимального (наибольшего) правдоподобия, нагрузки вычислительных систем, немасштабируемые задачи, имитационное моделирование, стохастическая аппроксимация, гипер-гамма-распределение.

Введение

В настоящее время весьма актуальна проблема оптимального выполнения параллельных и высокопроизводительных вычислений. В частности, существует проблема правильной балансировки нагрузки и выбора оптимальной производительности [1] вычислительных кластеров (ВК). Одним из способов анализа поведения вычислительных систем является моделирование их работы, в особенности имитационное, которое требует наличие математической модели ВК и его входящей нагрузки [1].

В данной работе рассматривается один из аспектов моделирования работы вычислительной системы - упрощение аппроксимации случайной непрерывной величины гипер-гамма-распредлелением. Ранее мы уже построили детерминированную и стохастическую имитационные модели [2-3] ВК и предложили способы моделирования для нее входной нагрузки [4-5], поэтому этот вопрос будет рассмотрен лишь кратко.

1. Материалы и методы

1.1 Описание уже построенной модели ВК

Из [1] нам необходимо ввести следующие определения. Время выполнения задачи назовем ее длиной. Количество узлов, на которых выполняется задача, называется ее шириной. Площадь задания — это произведение длины и ширины.

Если для пришедшего задания не хватает свободных узлов кластера, то оно становится в очередь. Длина очереди — это количество заданий в ней. Ширина (площадь) очереди — это сумма ширин (площадей) входящих в нее заданий. Точно так же мы определяем понятия длины, ширины, площади всей вычислительной системы, в нашем случае ВК.

Для генерации случайных нагрузок были предложены различные методики [4-5]. В любой из них необходимо аппроксимировать непрерывные случайные величины. Такое приближение может быть выполнено как с помощью метода моментов (ММ), так и метода максимального правдоподобия (МНП).

Согласно [6-8] и [4-5] гиперраспределения, в частности гиперэкспоненциальное и гипер-гамма- распределения, дали хорошие результаты при аппроксимации, но если аппроксимация проводилась численным способом для МНП, то это требует значительных вычислительных ресурсов.

В [7] ММ был использован для гиперэрланговского распределения после искусственного сокращения числа определяемых параметров. В [5] мы уже предложили упрощение, позволяющее получить более грубое, но и более быстрое решение для гиперэкспоненциального распределения с использованием ММ. В данной статье целью является аналогичное упрощение для гипергаммы.

Качества аппроксимации оценим следующим образом: промоделируем обслуживание сгенерированных нагрузок и сравним показатели обслуживания с показателями обслуживания исходной нагрузки из логов, предоставленных [8] (детерминированная имитационная модель [2-3]).

1.2 Получение упрощения гипер-гамма- распределения

Введем следующие обозначения: *E(X)* - математическое ожидание величины X, cov*(X)* - коэффициент вариации. Если мы имеем дело с оценкой момента, то будем писать над ней горизонтальную черту.

Оценки начальных и второго центрального моментов имеют вид

$$\overline{E(X^k)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^k, \tag{1}$$

где N - число наблюдений, X_i - конкретное i-ое наблюдение

Также нам потребуются $pdf(x)$ и $cdf(x)$ - дифференциальная и интегральная функции распределения.

Обозначим через $H(n)$ гиперэкспонециальное распределение:

$$pdf(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \tag{2}$$

$$cdf(x) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{-\lambda_i x}, \tag{3}$$

где n - количество веток распределения, α_i - вероятности использования веток (полная группа). При этом $cov(X) \geq 1$.

Начальные моменты

$$E(X^k) = k!\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\lambda_i^k}. \tag{4}$$

Одна из α_i задается по остаточному принципу (вероятности составляют полную группу), поэтому число параметров этого распределения равно $2n-1$. На практике использование ММ настоятельно не рекомендуется для распределений, у которых более четырех параметров [4-5, 7]. Для распределения с двумя ветками необходимо найти три параметра, и поэтому ММ применим. Решение уже найдено нами в [5]. Обозначим его как H_μ. В силу того, что аппроксимация МНП применима для любого количества веток, обозначим ее так же, как и самое распределение $H(n)$.

Гипер-гамма-распределение $HГ(n)$ имеет вид:

$$pdf(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \frac{(\lambda_i x)^{\nu_i - 1}}{\Gamma(\nu_i)} e^{-\lambda_i x}, \tag{5}$$

$$cdf(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(\nu_i, \lambda_i x), \tag{6}$$

где n - количество веток распределения, α_i - вероятности использования веток (полная группа), λ_i - интенсивность ветки № i. Здесь уже $cov(X) \in (0;\infty)$, что позволяет учесть большее количество случаев.

Начальные моменты $H\Gamma(n)$ имеют вид

$$E\left(X^k\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\Gamma\left(\nu_i+k\right)}{\lambda_i^k\Gamma\left(\nu_i\right)}. \tag{7}$$

Число параметров гипер-гамма-распределения также зависит от числа веток и в общем случае равно $3n-1$, поэтому даже для распределения с двумя ветками ММ уже не применим. Значит, необходимо упрощение. Будем считать, что $\nu_1=\nu_2=\nu$, тогда распределение имеет четыре параметра и моменты принимают вид

$$E\left(X^k\right)=\frac{\Gamma\left(\nu+k\right)}{\Gamma\left(\nu\right)}\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_i}{\lambda_i^k} \tag{8}$$

или

$$E\left(X^k\right)\frac{k!\Gamma\left(\nu\right)}{\Gamma\left(\nu+k\right)}=k!\sum_{i=1}^{2}\frac{\alpha_i}{\lambda_i^k}. \tag{9}$$

Иными словами, мы перешли от случайной величины X $H\Gamma(2)$ к случайной величине Y $H(2)$ с моментами

$$E\left(Y^k\right)=E\left(X^k\right)\frac{k!\Gamma\left(\nu\right)}{\Gamma\left(\nu+k\right)}. \tag{10}$$

Аппроксимация величины Y уже произведена нами в работе [5], поэтому им можно воспользоваться:

$$E\left(Y\right)=\overline{E\left(Y\right)}, \tag{11}$$

$$E\left(Y^2\right)=\overline{E\left(Y^2\right)}, \tag{12}$$

$$cov^2\left(Y\right)=\frac{E\left(Y^2\right)}{E^2\left(Y\right)}-1, \tag{13}$$

$$\beta=\sqrt{\frac{cov^2\left(Y\right)-1}{2}}, \tag{14}$$

$$\gamma=\frac{\overline{E\left(Y^3\right)}}{6E^3\left(Y\right)\beta^3}-\frac{1+3\beta^2}{\beta^3}, \tag{15}$$

$$\alpha_1=\max\left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+4}}\right);\frac{\beta^2}{1+\beta^2}\right), \tag{16}$$

$$\alpha_2=1-\alpha_1, \tag{17}$$

$$\lambda_1=\left(E\left(Y\right)\left(1-\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\beta\right)\right)^{-1}, \tag{18}$$

$$\lambda_2=\left(E\left(Y\right)\left(1+\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\beta\right)\right)^{-1} \tag{19}$$

(для случая $cov\ (Y)=1$ получаем $\lambda_1=\lambda_2=\left(E(Y)\right)^{-1}$ и α_1 можно выбрать любой, то есть получаем обычное экспоненциальное распределение).

Таким образом, зная ν, мы сможем по первым трем моментам определить оставшиеся три параметра распределения. Теперь, варьируя ν, мы сможем приблизить значения третьего и четвертого моментов оригинальной величины X. В силу особенностей гиперэкспоненциального распределения получить равенство третьего момента получается не всегда [5], поэтому его тоже надо учитывать.

Также надо учесть, что гиперэкспоненциальное распределение может аппроксимировать лишь распределения, у которых $cov(Y)\geq 1$, поэтому должно выполняться условие

$$E\left(Y^2\right)\geq 2E^2(Y) \tag{20}$$

Переходя к изначальной величине, получаем

$$E\left(X^2\right)\frac{2!\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+2)}\geq 2E^2(X)\left(\frac{1!\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+1)}\right)^2 \tag{21}$$

После преобразований получаем

$$\nu\geq\frac{1}{cov^2(X)}. \tag{22}$$

Для поиска ν воспользуемся методом Хука-Дживса. В качестве стартового значения возьмем

$$\nu=\frac{1}{\overline{cov(X)}^2}, \tag{23}$$

а в качестве минимизируемой функции

$$f(\nu)=\sum_{i=3}^{4}\left(\frac{E\left(X^i\right)-\overline{E\left(X^i\right)}}{\overline{E\left(X^i\right)}}\right)^2. \tag{24}$$

Заметим, что

$$\overline{cov(X)}^2=\frac{\overline{E\left(X^2\right)}}{\overline{E(X)}^2}-1, \tag{25}$$

так как мы используем только начальные моменты.

Обозначим такую аппроксимацию по аналогии $H\Gamma_\mu$. Также по аналогии будем использовать $H\Gamma(n)$ как обозначение аппроксимации МНП. Имеет смысл опробовать упрощение $\nu_1=\nu_2=\nu$ и на МНП-аппроксимации $H\Gamma(2)$, что сократит время аппроксимации. Обозначим этот способ как $H\Gamma_\lambda$.

Функция правдоподобия для МНП имеет вид:

$$L = \prod_{j=1}^{N} pdf\left(X_j\right), \quad (26)$$

где N - число наблюдений, X_j - конкретное наблюдение №j.

В качестве метода численной оптимизации возьмем метод Хука-Дживса.

2. Результаты

Ресурс [8] является в том числе хранилищем логов работы вычислительных систем в открытом доступе. В данной работе будет использован лог UniLu-Gaia-2014-2.swf.

В Таблице 1 представлена производительность методов аппроксимации. В сравнение с [5] мы несколько оптимизировали алгоритм аппроксимации, поэтому время аппроксимации сократилось. Так же, как и в [5], наша аппроксимация может сопровождаться анализом.

Результаты аппроксимации могут выглядеть по-разному. Например, для время между приходами заданий (Рисунок 1) замена H_{μ}: на $H\Gamma_{\mu}$ практически не меняет результат, но для приведенного времени между приходами заданий единичной ширины (Рисунок 2) качество результата сильно возрастает.

Таблица 1 – Скорости выполнения различных видов аппроксимации

Анализ	Время выполнения					
	H_{μ}	$H(2)$	$H(3)$	$H\Gamma_{\mu}$	$H\Gamma_{\lambda}$	$H\Gamma(2)$
Не проводится	16 сек.	1 мин. 44 сек	6 мин. 53 сек	18 сек.	2 мин. 22 сек.	4 мин. 58 сек.
Проводится	2 мин. 47 сек.	4 мин. 14 сек.	8 мин. 42 сек.	3 мин. 24 сек.	5 мин. 12 сек.	7 мин. 22 сек.

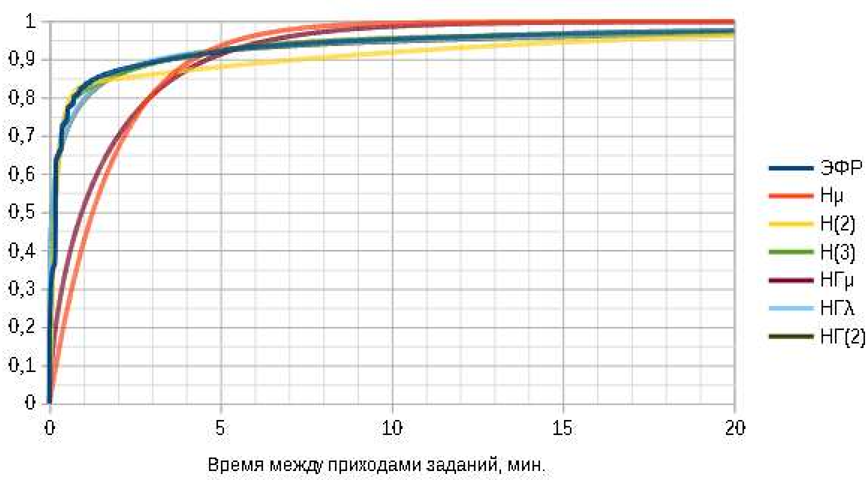

Рисунок 1 — Время между приходами заданий

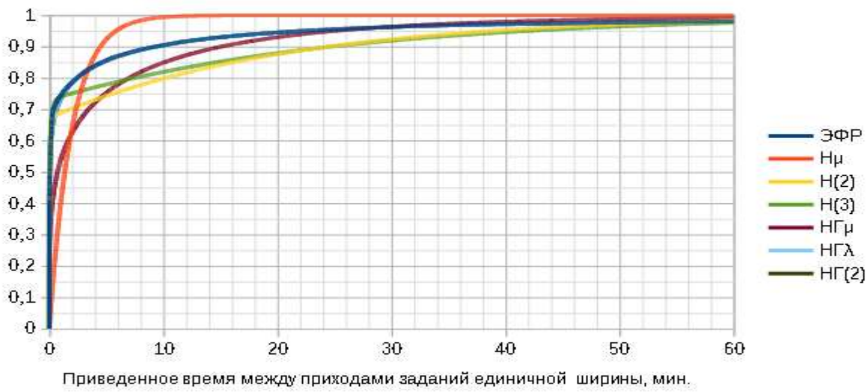

Рисунок 2 — Приведенное время между приходами заданий единичной ширины

3. Обсуждение

Для оценки качества аппроксимации было проведено стохастическое имитационное моделирование предложенных моделей с погрешностью 5%.

Отклонение от эталона рассчитывается по формуле

$$Dev = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\overline{P_i} - P_i}{P_i}\right)^2}\,, \qquad (27)$$

где M - число параметров, P_i - эталонное значение параметра, $\overline{P_i}$ - значение, полученное по стохастической модели.

Сравнение с эталоном дано в Таблице 2. Для каждого из способов аппроксимации выбрана модель, для которой он дает наименьшее отклонение.

Бессмысленно говорить об отклонении в 1% при погрешности каждой из величин 5%, поэтому $Н\Gamma_\lambda$ и $Н\Gamma(2)$ можно считать эквивалентными, но с учетом примерно в два раза более быстрой аппроксимации более удачной является $Н\Gamma_\lambda$. $Н\Gamma_\mu$ оказалась не только значительно лучше $Н_\mu$ при практически одинаковой скорости аппроксимации, но и сопоставима с $Н(2)$ и $Н(3)$, время работы которых значительно больше.

Заключение

Таким образом, были предложены два новых способа аппроксимации непрерывных величин : $Н\Gamma_\mu$ и $Н\Gamma_\lambda$, которые дали довольно хорошие результаты при более низких временных затратах. Даже $Н\Gamma_\lambda$ в сравнении с $Н\Gamma(2)$ дала двукратный выигрыш во времени при том же качестве. Полученные методы планируется использовать при моделировании работы ВК кафедры «ЭВМиС», но и они могут быть обобщены и для аппроксимации иных вычислительных систем. На разработанный программный продукт получено Свидетельство о госрегистрации [9].

Таблица 2 — Результаты проверки моделей

	~&HГλ /$HГλ	~&HГ(2)/HГ(2)^	~&H(3)/ H(3)^	&~HГμ/ &HГμ^	$~H(2)/ $H(2)	~&Hμ/ Hμ^	Эталон
Среднее время выполнения, сек	14299	14200	14191	14332	14334	14198	14329
Среднее число выполняемых заданий	96,707	95,97	95,475	97,005	96,553	95,692	93,067
Среднее число занятых каналов	939,86	910,88	955,45	921,58	918,34	959,77	872,26
Среднее время ожидания (среди всех заданий), сек	76,798	65,846	57,245	81,735	90,422	39,225	72,41
Среднее время ожидания (среди заданий, попавших в очередь), сек	2272,6	2255,2	1808	1850,2	3013	1428,7	2259,7
Доля попавших в очередь	0,02652	0,02591	0,02823	0,04196	0,02379	0,02415	0,03204
Средняя длина очереди	0,52236	0,44629	0,38729	0,55681	0,6103	0,26619	0,4703
Средняя ширина очереди	18,413	18,943	11,001	20,381	18,714	11,499	15,31
Среднее время пребывания в системе, сек	14376	14265	14248	14413	14425	14238	14402
Средняя длина системы	97,229	96,416	95,862	97,562	97,163	95,958	93,537
Средняя ширина системы	958,27	929,82	966,45	941,96	937,05	971,27	887,57
Отклонение	0,09639	0,10001	0,1436	0,16498	0,18738	0,24807	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Эвристики распределения задач для брокера ресурсов Grid [Электронный ресурс] / А.И. Аветисян [и др.] . – [2017]. – Режим доступа : http://citforum.ru/nets/digest/grid/index.shtml
2. Гаевой, С.В. Детерминированная имитационная модель кластеров грид-системы, обслуживающих задания / Гаевой С.В., Аль-Хадша Ф.А.Х., Лукьянов В.С. // Вестник компьютерных и информационных технологий. - 2014. - № 6. - С. 39-43.
3. Детерминированная имитационная модель кластеров грид-системы для сравнения эффективности использования эвристик распределения заданий / Гаевой С.В., Аль-Хадша Ф.А.Х., Фоменков С.А., Лукьянов В.С. // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. - 2014. - № 2. - С. 148-157.
4. Аппроксимация потока заданий на примере вычислительного кластера UniLu-Gaia / С.В. Гаевой, Весам М.А. Ахмед, Д.В. Быков, С.А. Фоменков // Известия ВолгГТУ. Сер. Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. - Волгоград, 2017. - № 8 (203). - С. 96-102.
5. Сокращение времени аппроксимации логов вычислительного кластера с использованием методов моментов на гиперэкспоненциальном распределении / Гаевой С.В., Ахмед В.М.А., Быков Д.В., Фоменков С.А. // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. - 2017. - № 1. - С. 94-105.
6. Lublin, U. The Workload on Parallel Supercomputers: Modeling the Characteristics of Rigid Jobs [Электронный ресурс] / U. Lublin, D. G. Feitelson. – [2017]. – Режим доступа: http://www.cs.huji.ac.il/~feit/papers/Rigid01TR.pdf
7. The Jann et al 1997 Model [Электронный ресурс]. – [2017]. – Режим доступа: http://www.cs.huji.ac.il/labs/parallel/workload/m_jann97/
8. Logs of Real Parallel Workloads from Production Systems [Электронный ресурс]. – [2017]. – Режим доступа: http://www.cs.huji.ac.il/labs/parallel/workload/logs.html
9. Свид. о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2017619355 от 24 августа 2017 г. Российская Федерация. Средство аппроксимации и имтационного моделирования вычислительных нагрузок (SWFJParser.JDSBrocker) / С.В. Гаевой, В.М.А. Ахмед, С.А. Фоменков; ВолгГТУ. - 2017.

S. V. Gaevoy, W. M. A. Ahmed, S. A. Fomenkov

SIMPLIFICATION OF HYPERGAMMA DISTRIBUTION FOR CLUSTER PARALLEL WORKLOAD APPROXIMATION

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russia

In this paper computing clusters (CC) are considered. They are used to execute incoming jobs. There is such a CC in our university and we need to predict its service characteristics at executing several workloads. An important method to analyze parallel workloads is modeling execution of those systems by using parallel workload models (PWM). We use PWMs to model the CC in order to get these service characteristics. We have already proposed many PWMs, but all these PWMs use a continuous variable approximation. This approximation can be done either by method of moments (MM), or maximum likelihood method (MLM). The latter gives the more accurate results but consumes much time. The best distributions for the approximation are Hyperexpoential and Hypergamma distributions. It was empirically proved in our and third-party papers. The simplification we have already proposed reduces the time consumption of the Hyperexponential distribution by using MM instead of MLM. In this paper a simplified method of Hypergamma distribution approximation is proposed. It reduces the number of the approximated distribution's parameters and then uses MM or MLM. Hypergamma distribution is chosen, because it has given the best result among all used distributions including Hyperexponential. Nevertheless the proposed method uses our early proposed simplification for Hyperexponential distribution. To validate the quality of the results described in this paper we use the simulation of this approximation and compare the results with the original workload (from the log) in this paper. The characteristics of the proposed methods are demonstrated. The necessity to select an appropriate approximation method is justified.

Keywords: Method of Moments, Maximum Likelihood Method, parallel workloads, rigid jobs, simulation, stochastic approximation, Hypergamma distribution.

REFERENCES

1. Evristiki raspredeleniya zadach dlya brokera resursov Grid [Elektronnyy resurs] / A.I. Avetisyan [i dr.]. – [2017]. – Rezhim dostupa: http://citforum.ru/nets/digest/grid/index.shtml
2. Gaevoy, S.V. Determinirovannaya imitatsionnaya model' klasterov grid-sistemy, obsluzhivayushchikh zadaniya / Gaevoy S.V., Al'-Khadsha F.A.Kh., Luk'yanov V.S. // Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy. - 2014. - No. 6. - pp.39-43.
3. Determinirovannaya imitatsionnaya model' klasterov grid-sistemy dlya sravneniya effektivnosti ispol'zovaniya evristik raspredeleniya zadaniy / Gaevoy S.V., Al'-Khadsha F.A.Kh., Fomenkov S.A., Luk'yanov V.S. // Prikaspiyskiy zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii. - 2014. - No. 2. - pp.148-157.
4. Approksimatsiya potoka zadaniy na primere vychislitel'nogo klastera UniLu-Gaia / S.V. Gaevoy, Vesam M.A. Akhmed, D.V. Bykov, S.A. Fomenkov //

Izvestiya VolgGTU. Ser. Aktual'nye problemy upravleniya, vychislitel'noy tekhniki i informatiki v tekhnicheskikh sistemakh. - Volgograd, 2017. - No. 8 (203). - pp.96-102.

5. Sokrashchenie vremeni approksimatsii logov vychislitel'nogo klastera s ispol'zovaniem metodov momentov na gipereksponentsial'nom raspredelenii / Gaevoy S.V., Akhmed V.M.A., Bykov D.V., Fomenkov S.A. // Prikaspiyskiy zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii. - 2017. - No. 1. - pp.94-105.
6. Lublin, U. The Workload on Parallel Supercomputers: Modeling the Characteristics of Rigid Jobs [Elektronnyy resurs] / U. Lublin, D. G. Feitelson. – [2017]. – Rezhim dostupa: http://www.cs.huji.ac.il/~feit/papers/Rigid01TR.pdf
7. The Jann et al 1997 Model [Elektronnyy resurs]. – [2017]. – Rezhim dostupa : http://www.cs.huji.ac.il/labs/parallel/workload/m_jann97/
8. Logs of Real Parallel Workloads from Production Systems [Elektronnyy resurs]. – [2017]. – Rezhim dostupa: http://www.cs.huji.ac.il/labs/parallel/workload/logs.html
9. Svid. o gos. registratsii programmy dlya EVM No. 2017619355 ot 24 avgusta 2017 g. Rossiyskaya Federatsiya. Sredstvo approksimatsii i imtatsionnogo modelirovaniya vychislitel'nykh nagruzok (SWFJParser.JDSBrocker) / S.V. Gaevoy, V.M.A. Akhmed, S.A. Fomenkov; VolgGTU. - 2017.