

УДК 519.676

Д.Е. Орлова

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТЕНЗОРНЫХ УРАВНЕНИЙ КРОНА ДЛЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Воронежский институт ФСИН России,
Воронеж, Россия

Рассматривается численный метод решения тензорных уравнений Крона для двухуровневой иерархической системы при наличии релевантных связей взаимного влияния между ее компонентами. Идея метода заключается в том, что детальный учет связей взаимовлияния, собственно, и обуславливающих трудности решения данных уравнений, подменяется типовыми алгоритмами оптимизации координационного типа. Выбор типа алгоритма предваряется количественной оценкой степени рассогласованности параметров компонентов, основанной на идеях системной теории конфликта. Показано, что все многообразие рассогласований можно свести к трем типовым вариантам: существенному рассогласованию, практическому отсутствию локальных рассогласований и незначительному рассогласованию по второстепенным вопросам. В первом варианте для нормального функционирования системы требуется, чтобы в ней доминировали системные интересы. Во втором варианте решение проблем может быть отдано на уровень компонентов системы. В третьем варианте устранить рассогласования можно на основе паритета системных и локальных интересов. Описываются соответствующие этим вариантам алгоритмы оптимизации: при доминировании системных интересов, при доминировании локальных интересов и при паритете интересов. Метод реализован в виде программного комплекса на базе систем программирования Visual Basic, C++ и Delphi. Численным экспериментом доказана сходимость алгоритмов оптимизации. Метод может найти практическое применение как инструмент поддержки принятия решений при управлении сложными динамическими системами иерархического типа.

Ключевые слова: тензорные уравнения Крона, численный метод, оптимизация, рассогласование, программный комплекс, алгоритм, сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

В своих работах [1,2] Крон предложил описывать и оптимизировать многоуровневые иерархические системы с помощью тензорных уравнений специального вида, в которых, вся система целиком обрисовывается в некотором обобщенном пространстве, а ее части в своих локальных подпространствах. Тогда интегральные показатели системы есть проекции на оси обобщенного пространства, а показатели подсистем интерпретируются как проекции на оси локальных подпространств. Определение оптимальных параметров системы осуществляется путем совместного решения таких уравнений. Очевидно, что это возможно тогда и только тогда, когда между параметрами этих проекций нет связей взаимного влияния. В противном случае уравнения Крона не имеют

совместных решений, в том смысле, что «оптимальные» по отдельности части системы, будучи сложенными все вместе, дадут «картину» далекую от оптимальной. Избежать этого можно тремя способами:

- а). игнорировать указанные связи, считая их нерелевантными, и решать задачу так, как будто этих связей не существует;
- б). подобрать (если это возможно по условиям задачи) оси локальных подпространств таким образом, чтобы связи между параметрами по эффекту своего проявления были пренебрежимо малы;
- в). исходить из того, что связи между проекциями реально существуют, более того они релевантные, и для решения уравнений Крона разрабатывать специальные методы.

В классическом тензорном анализе Крона предпочтение отдается первым двум способам. На то, есть причины. Как отмечается в [3], объектами исследования у Крона выступают не сложные, а так называемые составные системы, образованные ограниченным количеством типов компонентов одной природы при условии, что множества компонентов каждого типа достаточно мощные и слабо зависящие друг от друга. В реальных же системах на первый план выходят как раз связи между их компонентами, и игнорирование этих связей на практике, как правило, влечет за собой непоправимые ошибки. Так, например, в системе регулирования движения городского транспорта оптимизация проезда на каждом перекрестке в отдельности без учета всего потока автомашин на данном направлении неминуемо приводит к транспортному коллапсу в часы пик [4]. Аналогичная ситуация имеет место при обеспечении комплексной безопасности объектов уголовно-исполнительной системы, где несогласованная оптимизация отдельных аспектов безопасности не только не снижает, но повышает уязвимость системы со стороны криминальных элементов [3].

Цель статьи заключается в том, чтобы продемонстрировать возможность совместного решения тензорных уравнений Крона для двухуровневой иерархической системы при наличии релевантных связей взаимного влияния между их параметрами путем разработки и использования специального численного метода оптимизации координационного типа [5,6,8,9].

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Предварительно поясним смысл такого понятия как «тензор Крона». Если в механико-математическом смысле тензор определяется как линейный оператор F , преобразующий вектор \bar{x} в вектор $F\bar{x}$, и

обладающий тем свойством, что скалярное произведение $\bar{x}F\bar{y}$ не меняется при перестановке векторов \bar{x} и \bar{y} , то тензор Крона можно определить как матрицу, компонентами которой являются тоже матрицы (грубо говоря, тензор Крона – это матрица в матрице). Замечательным свойством тензора Крона является то, что его компоненты могут рассматриваться в качестве проекций в том пространстве, в котором определен данный тензор. Соответственно, компоненты матрицы могут рассматриваться как проекции на оси того пространства, где определена матрица. И наконец, компоненты любого вектора, по сути, есть проекции на оси того пространства, в котором определен данный вектор. Это позволяет расчленить сложный объект на части (проекции), исследовать эти части по отдельности, а затем «объединить» результаты частных исследований и получить понимание того, что происходит с системой в целом [10]. Собственно, этим свойством тензора Крона мы и воспользуемся для описания исследуемой системы.

Пусть $S_{1\dots n}^{1\dots n} [R(\vec{r}), (Q_1(\vec{q}_1), \dots, Q_n(\vec{q}_n)), t]$ – n-валентный тензор Крона, описывающий двухуровневую иерархическую систему, состоящую из Центра и n подсистем, в обобщенном пространстве $R(\vec{r})$ и локальных пространствах $Q_1(\vec{q}_1), \dots, Q_n(\vec{q}_n)$, где (\vec{r}) – вектор интегральных показателей системы, $(\vec{q}_i), i = \overline{1, n}$ – вектора локальных показателей подсистем, t – время. Пусть $S_{1\dots n}^{1\dots n} [R'(\vec{r}'), t]$ и $s^i(\vec{q}'_i, t); i = \overline{1, n}$ – тензоры-эталонны, задающие эталонные значения интегральных (\vec{r}') и локальных показателей $(\vec{q}'_i), i = \overline{1, n}$. Тогда система тензорных уравнений Крона для такой системы может быть представлена в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{1\dots n}^{1\dots n} [R(\vec{r}), (Q_1(\vec{q}_1), \dots, Q_n(\vec{q}_n)), t] C_{R, Q_1, \dots, Q_n}^{R', Q'_1, \dots, Q'_n} = S_{1\dots n}^{1\dots n} [R'(\vec{r}'), t]; \\ \left. \begin{array}{l} s^1(\vec{q}_1, t) C_{q_1}^{q'_1} = s^1(\vec{q}'_1, t); \\ \dots \\ s^n(\vec{q}_n, t) C_{q_n}^{q'_n} = s^n(\vec{q}'_n, t), \end{array} \right\} \quad (1)$$

где $C_{R, Q_1, \dots, Q_n}^{R', Q'_1, \dots, Q'_n}$ и $C_{q_i}^{q'_i} (i = \overline{1, n})$ – тензоры преобразования,

минимизирующие отклонения текущих интегральных и локальных показателей от эталонных соответственно.

Система (1), как это видно из ее структуры, не имеет конструктивных решений, поскольку в ней не заданы в явном виде такие аспекты оптимизации как критерии, ограничения и связи между параметрами. Для того чтобы напрямую выделить эти аспекты детализируем и конкретизируем (1). Для этого введем в рассмотрение следующие компоненты [7]: $\vec{y}_i (i = \overline{1, n})$ – векторы координации; $\vec{m}_i (i = \overline{1, n})$ – векторы управлений; $\|\alpha_{ij}\|; i, j = \overline{1, n}; \alpha_{ii} = 0$ – матрица целевой рассогласованности подсистем.

С учетом введенных компонентов содержательная сторона оптимизации будет состоять в том, чтобы Центр на основании информации о рассогласованности подсистем $\|\alpha_{ij}\|$ выработал и довел до них такие координирующие воздействия $\vec{y}_i (i = \overline{1, n})$, которые помогут им выработать управления $\vec{m}_i (i = \overline{1, n})$, обеспечивающие максимально возможный интегральный эффект на уровне системы, но в тоже время сохраняющие «оптимальность» управления локальными процессами.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Предположим для простоты, что: а) пространство $R(\vec{r})$ линейное и имеет единичную размерность; б) подпространства $Q_1(\vec{q}_1), \dots, Q_n(\vec{q}_n)$ также линейные и имеют одинаковую размерность равную K ; в) показатели $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$ нормированы $q_{ij} = (\hat{q}_{ij} - \hat{q}_{ij}^{\min}) / (\hat{q}_{ij}^{\max} - \hat{q}_{ij}^{\min})$ – для ориентированных на максимум, $q_{ij} = 1 - (\hat{q}_{ij} - \hat{q}_{ij}^{\min}) / (\hat{q}_{ij}^{\max} - \hat{q}_{ij}^{\min})$ – для ориентированных на минимум, где $q_{ij}^{\max}, q_{ij}^{\min}$ – минимально и максимально возможные значения показателя; \hat{q}_{ij} – не нормированное значение показателя q_{ij} . Нормировка позволяет свести значения локальных показателей к диапазону $[0, 1]$ с ориентацией на максимум, а после

нормировки ($\bar{q}'_i = 1$), $i = \overline{1, n}$. Тогда тензоры преобразования $C_{R, Q_1, \dots, Q_n}^{R', Q'_1, \dots, Q'_n}$ и

$C_{q_i}^{q'_i}$ ($i = \overline{1, n}$) можно задать в виде целевых функций следующего вида:

а). Интегральная целевая функция:

$$C_{R, Q_1, \dots, Q_n}^{R', Q'_1, \dots, Q'_n} = \left\{ \left[\int_0^T \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 - Q_i(\vec{m}_i, \vec{y}_i, t))^2} dt \right]_{\|\alpha_{ij}\|} \rightarrow \min_{\vec{y}_i \in Y} \right\}, \quad (2)$$

где $Q_i(\vec{m}_i, \vec{y}_i, t) = \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{j=1}^K (1 - q_{ij}(\vec{m}_i, \vec{y}_i, t))^2}$, $i = \overline{1, n}$; T – интервал времени;

б). Локальные целевые функции:

$$C_{q_i}^{q'_i} = \left\{ \left[\int_0^T \sqrt{\frac{1}{K_j} \sum_{j=1}^{K_j} (1 - q_{ij}(\vec{m}_i, \vec{y}_i, t))^2} dt \right]_{\vec{y}_i} \rightarrow \min_{\vec{m}_i \in M_i}; \quad i = \overline{1, n} \right\}. \quad (3)$$

Отсюда видно, что решение тензорных уравнений Крона для двухуровневой иерархической системы (1) при наличии связей взаимного влияния между подсистемами сводится к двум задачам: а) оценки степени рассогласованности подсистем, то есть определения матрицы $\|\alpha_{ij}\|$; б) разработки алгоритмов оптимизации целевых функций (2) и (3) для различных вариантов рассогласованности.

Оценка степени рассогласованности подсистем. Теоретическую базу такой оценки составляет типология, представленная в Таблице 1. [7]

Таблица 1. - Типы парного взаимовлияния подсистем и соответствующие им оценки рассогласованности

Взаимовлияние			Качественная оценка степени рассогласованности
Тип	Разновидность	Форма проявления	
Негативное	Исключительно негативное	Достижение цели одной подсистемой исключает достижение цели другой	Супервысокая
	Строго негативное	Наибольшая эффективность одной подсистемы достигается при наименьшей эффективности другой	Очень высокая
	Нестрого негативное	Подсистемы, хотя и оказывают отрицательное влияние друг на друга,	Высокая

		но цели их достижимы	
	Одностороннее негативное	Одна подсистема оказывает негативное влияние на другую, которая не оказывает влияния на первую	Не очень высокая
Позитивное	Исключительно позитивное	Цели подсистем сливаются в одну общую цель	Нулевая
	Строго позитивное	Подсистемы объединены единством цели, но вклад в ее достижение у каждой из них различен	Очень низкая
	Нестрого позитивное	Допускается противоречивость целей по второстепенным вопросам	Низкая
	Одностороннее позитивное	Одна подсистема оказывает позитивное влияние на другую, которая не оказывает влияния на первую	Не очень высокая
Двойкое	Нормальное	Несмотря на противодействие, цели подсистем достижимы	Очень низкая
	Аномальное	Несмотря на содействие, цели подсистем недостижимы	Очень высокая
	Нейтральное	Подсистемы не оказывают влияние друг на друга	Нулевая

Предположим, что распределение численных оценок рассогласования по типам и разновидностям взаимовлияния носит линейный характер. Тогда для количественной оценки степени рассогласованности $\alpha_{ij} (-1 \leq \alpha_{ij} \leq 1)$ можно использовать следующие формулы:

а). Для случая негативного взаимовлияния:

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} < 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} < 0 \right) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_i| \Rightarrow (|\bar{q}_j| = 0) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_j| \Rightarrow (|\bar{q}_i| = 0) \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = -1); \quad (4)$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} < 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} < 0 \right) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_i| \Leftrightarrow \min |\bar{q}_j| \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_j| \Leftrightarrow \min |\bar{q}_i| \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = -0,8); \quad (5)$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} < 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} < 0 \right) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_i| \overset{\bar{}}{\Leftrightarrow} \min |\bar{q}_j| \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_j| \overset{\bar{}}{\Leftrightarrow} \min |\bar{q}_i| \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = -0,5); \quad (6)$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} < 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} = 0 \right) \right] \vee \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} = 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} < 0 \right) \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = -0,1). \quad (7)$$

б). Для случая позитивного взаимовлияния:

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} > 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} > 0 \right) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_i| \Leftrightarrow \max |\bar{q}_j| \right] \wedge \left[\min |\bar{q}_i| \Leftrightarrow \min |\bar{q}_j| \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = 1,0); \quad (8)$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} > 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} > 0 \right) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_i| \Leftrightarrow \max |\bar{q}_j| \right] \wedge \left[\min |\bar{q}_i| \Leftrightarrow \min |\bar{q}_j| \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = 0,8); \quad (9)$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} > 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} > 0 \right) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_i| \Leftrightarrow \max |\bar{q}_j| \right] \wedge \left[\min |\bar{q}_i| \Leftrightarrow \min |\bar{q}_j| \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = 0,5); \quad (10)$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} > 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} = 0 \right) \right] \vee \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} = 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} > 0 \right) \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = 0,1). \quad (11)$$

В) Для случая двойкового взаимовлияния:

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} < 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} > 0 \right) \right] \vee \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} > 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} < 0 \right) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_i| \Leftrightarrow \min |\bar{q}_j| \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_j| \Leftrightarrow \min |\bar{q}_i| \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = 0,8); \quad (12)$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} < 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} > 0 \right) \right] \vee \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} > 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} < 0 \right) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_i| \Rightarrow (|\bar{q}_j| = 0) \right] \wedge \left[\max |\bar{q}_j| \Rightarrow (|\bar{q}_i| = 0) \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = -0,8). \quad (13)$$

Г) Для случая отсутствия взаимовлияния:

$$\left\{ \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} = 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} = 0 \right) \right] \vee \left[\left(\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial \bar{q}_j} = 0 \right) \wedge \left(\frac{\partial \bar{q}_j}{\partial \bar{q}_i} = 0 \right) \right] \right\} \rightarrow (\alpha_{ij} = 1). \quad (14)$$

Используя результаты расчетов по формулам (4) - (14) составляем симметричную $n \times n$ матрицу $\|\alpha_{ij}\|$; $\alpha_{ii} = 0$, по которой определяем среднюю степень рассогласованности подсистем:

$$\alpha = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1(i \neq j)}^n \left(\sum_{j=1(i \neq j)}^n \alpha_{ji} \right) \right]. \quad (15)$$

Величина α определяет тип и содержание алгоритма оптимизации. Если $-1 < \alpha \leq 0,33$, то в системе имеют место существенные рассогласования, и для обеспечения ее нормального функционирования необходимо, чтобы в ней доминировали системные интересы. При $0,33 < \alpha \leq 1$ в системе практически отсутствуют локальные рассогласования, и решение проблем может быть отдано на «откуп» подсистемам. Если $-0,33 < \alpha \leq 0,33$, то в системе имеют место незначительные рассогласования по второстепенным вопросам, устранить которые можно на основе паритета интересов. Заметим, что при таком

подходе нет необходимости детального учета всех связей взаимовлияния между компонентами системы, что, собственно, и влекло за собой невозможность совместного решения уравнений Крона. В нашем случае достаточно перейти к реализации трех типовых алгоритмов оптимизации.

Алгоритм оптимизации при доминировании системных интересов. В этом случае оптимизация должна основываться на сопоставлении величин r и r' . С учетом этого алгоритм оптимизации сводится к пошаговой итерационной процедуре следующего вида.

Step 1. Задаем стартовый вектор $\bar{y}_i^{(0)} \in Y; (i = \overline{1, n})$.

Step 2. Решаем задачи (3). Полученные значения $\vec{m}_i^{*(0)}$ и $Q_i^{(0)} (i = \overline{1, n})$ запоминаем.

Step 3. Для полученных значений $Q_i^{(0)} (i = \overline{1, n})$ решаем задачу (2) и запоминаем значения $\bar{y}_i^{*(0)} (i = \overline{1, n})$ и $r^{(0)}$.

Step 4. Сравниваем $r^{(0)}$ с r' . Если $r^{(0)} \geq r'$ – задача решена, $\bar{y}_i^{*(0)} (i = \overline{1, n})$ признаются оптимальными. При $r^{(0)} < r'$ продолжаем решение.

Step 5. Выбираем новый вектор $\bar{y}_i^{(1)} \in Y; (i = \overline{1, n})$.

Step 6. Решаем задачи (3), полученные значения $\vec{m}_i^{*(1)} (i = \overline{1, n})$ и $Q_i^{(1)} (i = \overline{1, n})$ запоминаем.

Step 7. Для полученных значений $Q_i^{(1)} (i = \overline{1, n})$ решаем задачу (2) и запомним значения $\bar{y}_i^{*(1)} (i = \overline{1, n})$ и $r^{(1)}$.

Step 8. Сравниваем $r^{(1)}$ с r' . Если $r^{(1)} \geq r'$ – задача решена, $\bar{y}_i^{*(1)} (i = \overline{1, n})$ признаются оптимальными. При $r^{(1)} < r'$ продолжаем решение.

Step 9. Сравниваем $r^{(1)}$ и $r^{(0)}$. Если $r^{(1)} < r^{(0)}$, то есть процедура повторяется с шага 5. В противном случае ($r^{(1)} \geq r^{(0)}$) попытка считается безуспешной. Поиск прекращается после того, как будет совершено μ безуспешных шагов: система уравнений (1) считается неразрешимой.

Алгоритм оптимизации при доминировании локальных интересов. В этом случае оптимизация должна основываться на сопоставлении величин $Q_i (i = \overline{1, n})$ и Q'_i . С учетом этого алгоритм оптимизации сводится к пошаговой итерационной процедуре следующего вида.

Step 1. Решаем задачи (3) в предположении, что координирующие

воздействия отсутствуют. Полученные значения $\vec{m}_i^{*(0)}(i = \overline{1, n})$ и $Q_i^{(0)}(i = \overline{1, n})$ запоминаем.

Step 2. Сравниваем $Q_i^{(0)}(i = \overline{1, n})$ с Q'_i . Если $\forall_{i=\overline{1, n}}(Q_i^{(0)} \geq Q'_i)$ – задача решена, координация не требуется, а локальные управления $\vec{m}_i^{*(0)}(i = \overline{1, n})$ признаются оптимальными. Если указанное условие не выполняется, то продолжаем решение задачи.

Step 3. Задаем стартовый вектор $\vec{y}_i^{(0)} \in Y; (i = \overline{1, n})$.

Step 4. Для полученных значений $Q_i^{(0)}(i = \overline{1, n})$ решаем задачу (2) и запоминаем значения $\vec{y}_i^{*(0)}(i = \overline{1, n})$.

Step 5. Для этих значений $\vec{y}_i^{*(0)}(i = \overline{1, n})$ решаем задачи (3). Полученные значения $\vec{m}_i^{*(1)}(i = \overline{1, n})$ и $Q_i^{(1)}(i = \overline{1, n})$ запоминаем.

Step 6. Сравниваем $Q_i^{(1)}(i = \overline{1, n})$ с Q'_i . Если $\forall_{i=\overline{1, n}}(Q_i^{(1)} \geq Q'_i)$ – задача решена, координация не требуется, а локальные управления $\vec{m}_i^{*(1)}(i = \overline{1, n})$ при координирующих воздействиях $\vec{y}_i^{*(0)}(i = \overline{1, n})$ признаются оптимальными. Если указанное условие не выполняется, то продолжаем решение задачи с первого шага. Поиск прекращается после того, как будет совершено μ безуспешных попыток добиться выполнения условия $\forall_{i=\overline{1, n}}(Q_i^{(1)} \geq Q'_i)$.

Алгоритм оптимизации при паритете системных и локальных интересов. В отличие от двух предыдущих случаев, оптимизация должна основываться на сопоставлении как величин r и r' , так и $Q_i(i = \overline{1, n})$ и Q'_i . С учетом этого алгоритм оптимизации при паритете интересов сводится к пошаговой итерационной процедуре следующего вида.

Step 1. Задаем стартовый вектор $\vec{y}_i^{(0)} \in Y; (i = \overline{1, n})$.

Step 2. Одним из методов вариационного исчисления решаем задачи (3). Полученные значения $\vec{m}_i^{*(0)}(i = \overline{1, n})$ и $Q_i^{(0)}(i = \overline{1, n})$ запоминаем.

Step 3. Для полученных значений $Q_i^{(0)}(i = \overline{1, n})$ решаем задачу (2) и запоминаем значения $\vec{y}_i^{*(0)}(i = \overline{1, n})$ и $r^{(0)}$.

Step 4. Сравниваем $r^{(0)}$ с r' и $Q_i^{(0)} (i = \overline{1, n})$ с Q'_i . Если $(r^{(0)} \geq r')$ и $\forall_{i=1,4} (Q_i^{(0)} \geq Q'_i)$ – задача решена, $\vec{y}_i^{*(0)} (i = \overline{1, n})$ признаются оптимальными. Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то продолжаем решение задачи.

Step 5. Выбираем новый случайный вектор $\vec{y}_i^{(1)} \in Y; (i = \overline{1, n})$.

Step 6. Решаем задачи (3), полученные значения $\vec{m}_i^{*(1)} (i = \overline{1, n})$ и $Q_i^{(1)} (i = \overline{1, n})$ запоминаем.

Step 7. Для полученных значений $Q_i^{(1)} (i = \overline{1, n})$ решаем задачу (2) и запоминаем значения $\vec{y}_i^{*(1)} (i = \overline{1, n})$ и $r^{(1)}$.

Step 8. Сравниваем $r^{(1)}$ с r' и $Q_i^{(1)} (i = \overline{1, n})$ с Q'_i . Если $(r^{(1)} \geq r')$ и $\forall_{i=1,n} (Q_i^{(1)} \geq Q'_i)$ – задача решена, $\vec{y}_i^{*(1)} (i = \overline{1, n})$ признаются оптимальными. В случае $(r^{(1)} \geq r^{(0)})$ попытка считается безуспешной. Поиск прекращается после μ безуспешных шагов.

Программный комплекс. Функциональная схема программного комплекса, реализующего описанный метод решения тензорных уравнений Крона для двухуровневой иерархической системы, приведена на Рисунке 1. В состав комплекса входят следующие блоки:

- лингвистический блок, обеспечивающий интерактивное общение пользователя с комплексом (ввод исходных данных и необходимых экспертных оценок, получение результатов расчетов и построение графических зависимостей, изменение параметров алгоритмов);
- блок оценки степени рассогласованности подсистем, обеспечивающий расчет величины α по формулам (5) - (15);
- блоки реализации алгоритмов оптимизации при различных вариантах соотношения системных и локальных интересов;
- блок реализации метода случайного поиска, представляющий собой стандартный модуль решения оптимизационных задач данным методом.

Основные характеристики программного комплекса:

- тип – интерактивный, диалоговый, информационно-расчетный;
- минимальные требования к программному обеспечению – ОС

Windows 2007-10, Office 2007-10, Access 2010;

- используемые системы программирования – Visual Basic, C++, Delphi;
- объем на CD – диске без загрузки оперативной информацией – 640 MB;
- форма отображения выходной информации – текстовая, графическая;
- время визуализации и выдачи информации – не более 12с.

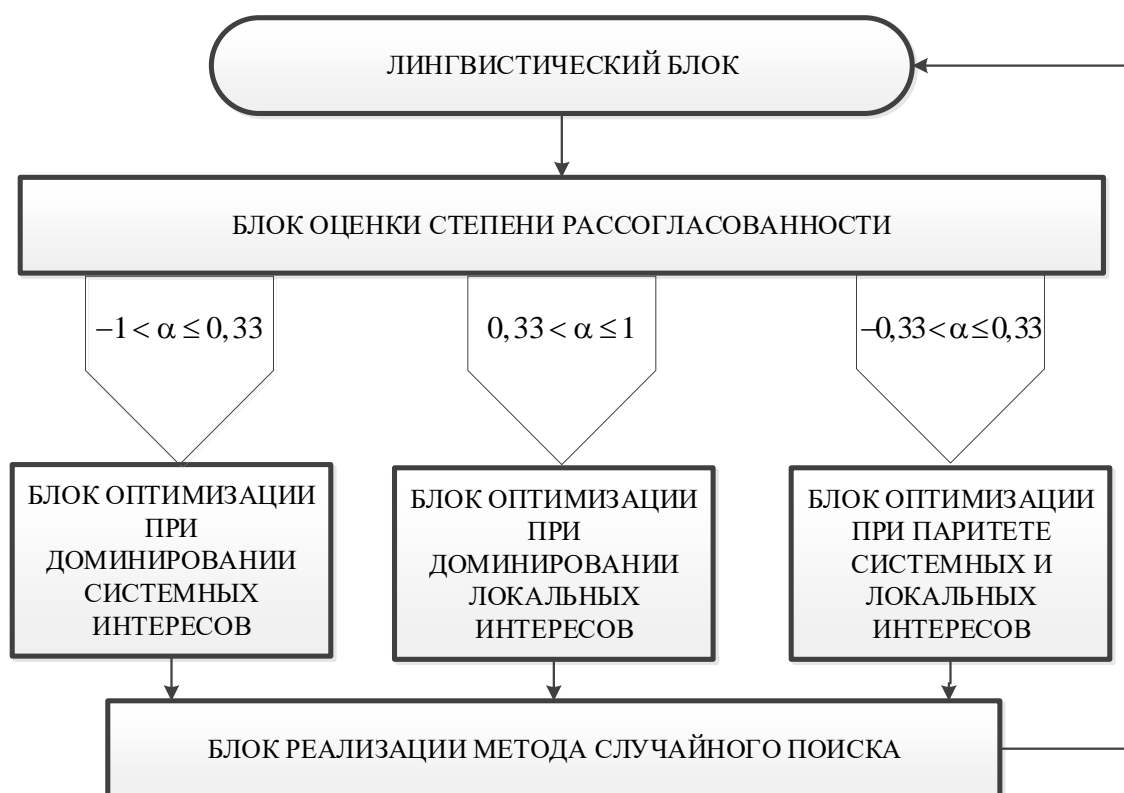


Рисунок 1. Функциональная схема программного комплекса численного решения тензорных уравнений Крона для двухуровневой иерархической системы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в статье метод дает приближенное решение тензорных уравнений Крона для двухуровневой иерархической системы при наличии релевантных связей взаимного влияния между их параметрами. Такая возможность обеспечивается тем, что детальный учет связей взаимовлияния подсистем подменяется их типологией, а для оптимизации используются типовые алгоритмы. При этом выбор типа алгоритма предваряется количественной оценкой степени рассогласованности параметров компонентов, основанной на идеях

системной теории конфликта [7]. Таким образом, предложенный метод дает решение задачи с точностью до выделенных типов рассогласованности частей оптимизируемой системы.

Оценка сходимости рассмотренных выше алгоритмов производилось путем проведения вычислительного эксперимента. При этом полагалось, что алгоритм сходится, если за приемлемое для практики число итеративных циклов (порядка 150-200), он позволяет получить установившийся результаты, то есть результаты, имеющие не более чем 10% отклонение от среднего значения при десятикратном повторении циклов. Результаты вычислительного эксперимента представлены в Таблице 2.

Таблица 2 - Результаты вычислительного эксперимента по анализу сходимости алгоритмов оптимизации

Разновидность алгоритма	Минимум итераций для обеспечения сходимости	Отклонение от среднего
Алгоритм оптимизации при доминировании системных интересов	95-100	10-15%
Алгоритм оптимизации при доминировании локальных интересов	80-90	10-15%
Алгоритм оптимизации при паритете интересов	120-160	10-15%

Из анализа полученных данных видно, что описанные алгоритмы оптимизации обладают свойством сходимости в указанном выше смысле. Причем, выявлена следующая закономерность: чем проще в структурном отношении алгоритм, тем за меньшее количество итераций обеспечивается его сходимость. Так, например, для самого простого алгоритма оптимизации при доминировании интересов подсистем сходимость достигается примерно за 80-90 циклов, в случае самого сложного алгоритма координации при паритете интересов системных и локальных интересов – за 120-160 циклов.

Ценность рассмотренного в статье метода в том, что его использование расширяет возможности приложения тензорной методологии Крона для моделирования не только суммативных систем, но и систем со сложной структурой. При этом необходимо соблюдение двух условий. Во-первых, тензор исследуемой системы должен обеспечивать взаимную согласованность ее частей (их совокупность должна быть системой), а сами части должны представляться тоже тензорами. Во-вторых, при описании систем тензорами Крона необходимо использовать такие пространства и такие операторы преобразования координат, чтобы

при изменениях структуры системы ее параметры изменялись по линейному закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крон Г. Применение тензорного анализа в электротехнике. – М.: Наука, 1955. – 156 с.
2. Крон Г. Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио, 1978. – 720 с.
3. Новосельцев В.И., Кочедыков С.С., Орлова Д.Е. Тензорный анализ Крона и его приложения / Под ред. В.И. Новосельцева. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2017. – 220 с.
4. Михеева Т.И., Михеев С.В., Золотовицкий А.В. Автоматизированная система контроля и управления дорожным движением // Математика. Компьютер. Образование: сб. научн. тр. / Дубна: МГУ, - 2008. С. 207-214.
5. Месарович М., Мако Д., Такахара И. Теория иерархических и многоуровневых систем / Пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 344 с.
6. Алиев Р.А., Либерзон М.И. Методы и алгоритмы координации в промышленных системах управления. – М.: Экономика, 1987. -168 с.
7. Новосельцев В.И., Тарасов Б.В. Системная теория конфликта. – М: Майор, 2011. – 336 с.
8. Новосельцев В.И., Орлова Д.Е. Координационное управление как способ разрешения экономических конфликтов / Актуальные проблемы инновационных систем информатизации и безопасности / Матер. международной научно-практической конф. – Воронеж, ВИВТ, 2014, С. 434-436.
9. Новосельцев В.И., Орлова Д.Е. Особенности управления активной иерархической системой с нечетко заданными критериями / Матер. всеросс. научно-технической конф., посвященной 95-летию войск связи – ВУНЦ ВВС «ВВА им. Жуковского и Гагарина», Воронеж, 2014. С. 256-260.
10. Петров А.Е. Тензорная методология в теории систем. – М.: Радио и связь, 1985. – 152 с.

D.E. Orlova

NUMERICAL METHOD OF THE SOLUTION OF THE TENSOR EQUATIONS KRON FOR TWO-LEVEL HIERARCHICAL SYSTEM

Voronezh institute of the Federal Penitentiary Service of Russia

The numerical method of the solution of the tensor equations Kron for two-level hierarchical system in the presence of relevant communications of mutual influence between its components is considered. The idea of a method consists that the detailed account of communications of interference, actually and causing difficulties of the decision of the given equations, is substituted for typical algorithms of optimization of coordination type. The choice of type of algorithm is anticipated a quantitative estimation of degree of a mismatch of parameters of the components, the system theory of the conflict based on ideas. It is shown that all variety of mismatches can be reduced to three typical variants: to an essential mismatch, practical absence of local mismatches and an insignificant mismatch on minor questions. In the first variant for normal functioning of system it is required, that in it system interests dominated. In the second variant the decision of problems can be given on level of components of system. In the third variant to eliminate mismatches it is possible on the basis of parity of system and local interests. Algorithms of optimization corresponding to these variants are described: at domination of system interests, at domination of local interests and at parity of interests. The method is realized in the form of a program complex on the basis of Visual Basic programming systems, S ++ and Delphi. Numerical experiment proves convergence of algorithms of optimization. The method can find practical application as the tool of support of decision-making at management difficult dynamic system of hierarchical type.

Keyword: tensor equations Kron, numerical method, optimization, mismatch, program complex, algorithm, convergence.

REFERENCES

1. Kron G. *Primenenie tenzornogo analiza v elektrotekhnikе*. – M.: Nauka, 1955. – 156 p.
2. Kron G. *Tenzornyy analiz setey*. – M.: Sov. radio, 1978. – 720 p.
3. Novosel'tsev V.I., Kochedykov S.S., Orlova D.E. *Tenzornyy analiz Krona i ego prilozheniya / Pod red. V.I. Novosel'tseva*. – Voronezh: IPTs «Nauchnaya kniga», 2017. – 220 p.
4. Mikheeva T.I., Mikheev S.V., Zolotovitskiy A.V. *Avtomatizirovannaya sistema kontrolya i upravleniya dorozhnym dvizheniem // Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie: sb. nauchn. tr. / Dubna: MGU, - 2008. pp. 207-214.*
5. Mesarovich M., Mako D., Takakhara I. *Teoriya ierarkhicheskikh i mnogourovnevykh sistem / Per. s angl.* – M.: Mir, 1973. – 344 p.
6. Aliev R.A., Liberzon M.I. *Metody i algoritmy koordinatsii v promyshlennykh sistemakh upravleniya*. – M.: Ekonomika, 1987. -168.

7. Novosel'tsev V.I., Tarasov B.V. Sistemnaya teoriya konflikta. – M: Mayor, 2011. – 336 p.
8. Novosel'tsev V.I., Orlova D.E. Koordinatsionnoe upravlenie kak sposob razresheniya ekonomicheskikh konfliktov / Aktual'nye problemy innovatsionnykh sistem informatizatsii i bezopasnosti / Mater. mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konf. – Voronezh, VIVT, 2014, pp. 434-436.
9. Novosel'tsev V.I., Orlova D.E. Osobennosti upravleniya aktivnoy ierarkhicheskoy sistemoy s nechetko zadannymi kriteriyami / Mater. vseross. nauchno-tekhnicheskoy konf., posvyashchennoy 95-letiyu voysk svyazi – VUNTs VVS «VVA im. Zhukovskogo i Gagarina», Voronezh, 2014. pp. 256-260.
10. Petrov A.E. Tenzornaya metodologiya v teorii sistem. – M.: Radio i svyaz', 1985. – 152 p.