УДК 519.1

В.В. Меньших, О.В. Пьянков

РАЗРАБОТКА МЕТОДА РАСЧЁТА ОЦЕНОК СБАЛАНСИРОВАННОСТИ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПЕРМАНЕНТНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Воронежский институт МВД России

Предлагается осуществлять исследование эргатических систем предметного назначения на основе применения теории конфликтов. Показаны внутренние показатели эффективности функционирования эргатических систем, представляющие собой оценки сбалансированности (конфликтности) элементов системы. Разрабатываются методы и алгоритмы, позволяющие осуществлять расчёт оценок сбалансированности конфликтных взаимодействий элементов эргатических систем. Обосновывается применение знакового графа G в качестве модели конфликтных взаимодействий элементов системы. Доказывается возможность применения перманентного многочлена матриц смежности P и Z графа G для расчёта оценок сбалансированности. Рассматривается метод Райзера, уменьшающий вычислительную сложность вычисления перманентного многочлена матриц смежности. Предлагается модификация метода Райзера, включающая вычисление суммы значений разрядов двоичного представления десятичных чисел, позволяющая осуществлять машинный расчёт, подробно приводятся примеры использования нового способа для вычисления перманента. На условном алгоритмическом языке показаны разработанные алгоритмы расчёта оценок сбалансированности.

Ключевые слова: оценки сбалансированности, перманент, метод и алгоритм расчёта, метод Райзера, эргатическая система.

Введение. Системное представление моделируемых объектов, как правило, предполагает их описание в виде конечного набора элементов и взаимоотношений между ними [1]. Исследование эргатических систем осложняется, что одним из элементов является человек, определяющий в процессе функционирования системы разные типы отношений к другим элементам системы. В связи с этим среди показателей эффективности функционирования таких систем важное место занимает их сбалансированность, т.е. наличие внутренних конфликтов и компромиссов [2]. Наличие в таких областях большого многообразия элементов и отношений между ними позволяет предложить в качестве модели знаковый ориентированный граф $G = G(V, U)$, вершины которого соответствуют элементам системы, а дуги $u_{v1,v2}$ — отношениям между ними [3]. Для исследования сложных эргатических систем может быть предложено использование оценок сбалансированности элементов системы, базирующихся на числовом расчете отношений между количеством конфликтных и неконфликтных циклов графовой модели системы [4].

Однако эти вычисления представляют собой трудоемкую задачу, основная вычислительная сложность которой обусловлена выделением всех циклов. В связи с этим большое значение приобретает разработка численного метода, не включающего процедуру выделения циклов.

Методы и алгоритмы вычисления оценок сбалансированности. Для вычисления оценок сбалансированности предлагается метод с использованием перманента и перманентного многочлена матрицы смежности P и знаковой матрицы смежности Z графа G.

Для описания разработанного метода будем использовать ряд определений [5, 6].

Определение 1. Перманентом квадратной матрицы A n-го порядка называется величина

$$per\,A = \Sigma\, a_{1i(1)}\, a_{2i(2)} \ldots\, a_{ni(n)}, \tag{1}$$

где суммирование осуществляется по всем возможным перестановкам $i(j)$ элементов матрицы.

Определение 2. Перманентным многочленом квадратной матрицы A n-го порядка называется многочлен

$$A_G(\lambda) = per(\lambda I + A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\,.$$

Обозначим p_i и z_i — коэффициенты перманентных многочленов соответственно матриц P и Z:

$$P_G(\lambda) = per(\lambda I + P_\alpha) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n,$$

$$Z_G(\lambda) = per(\lambda I + Z_\alpha) = \lambda^n + z_1\lambda^{n-1} + \ldots + z_n\,.$$

Тогда в соответствии с [6] коэффициенты p_i равны числу линейных ориентированных подграфов графа G (орграфов, в каждую вершину которых входит и выходит только одна дуга, т.е. состоящих из циклов, связанных или несвязанных между собой), содержащих точно i вершин.

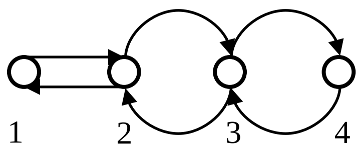

Рисунок 1 – Орграф

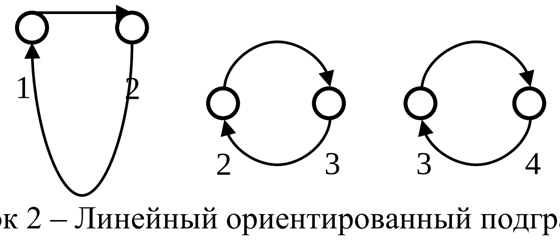

Рисунок 2 – Линейный ориентированный подграф (i = 2)

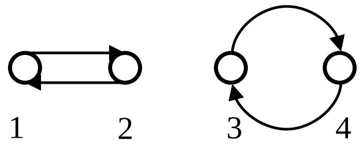

Рисунок 3 – Линейный ориентированный подграф (i = 4)

Так на Рисунке 1 показан орграф, на Рисунках 2 и 3 его линейные ориентированные подграфы. Для i = 2 имеется 3 подграфа (см. Рисунок 2), каждый из которых представляет собой цикл: (1-2-1), (2-3-2), (3-4-3). Для подграфа с 4 вершинами (см. Рисунок 3) ситуация иная: два цикла (1-2-1) и (3-4-3) не связаны между собой. Тем не менее, оба эти случая учитываются и определяют значения коэффициентов p_i перманентного многочлена $P_G(\lambda)$.

Для коэффициентов z_i перманентного многочлена $Z_G(\lambda)$ верно следующее утверждение.

Теорема 1. Значения коэффициентов z_i равны разности количества сбалансированных и несбалансированных линейных ориентированных подграфов графа G, содержащих i вершин.

Доказательство. Коэффициент z_i является суммой главных *per*-миноров порядка i матрицы Z. Тогда, как следует из (1) и определения матрицы Z, все *per*-миноры, основание которых составляют строки (столбцы), соответствующие вершинам, не составляющим ориентированный цикл, равны 0. Абсолютное значение остальных *per*-миноров равно количеству линейных ориентированных подграфов графа G, содержащих i вершин (с учетом кратности), проходящих через соответствующие вершины. Они имеют знак “+”, если число отрицательных сомножителей четно, т.е. циклы сбалансированны, или знак “-”, если число отрицательных сомножителей нечетно, т. е. циклы несбалансированны. Из этого непосредственно вытекает утверждение теоремы.

По значениям коэффициентов p_i и z_i с помощью методов линейной алгебры могут быть найдены следующие величины:

$b_i = (p_i+z_i)/2$ – количество сбалансированных линейных ориентированных подграфов графа G, содержащих i вершин,

$n_i = (p_i - z_i)/2$ – количество несбалансированных линейных ориентированных подграфов графа G, содержащих i вершин.

Общее число сбалансированных линейных ориентированных подграфов графа G:

$$b(G) = (\Sigma p_i+\Sigma z_i)/2. \quad (2)$$

Общее число несбалансированных линейных ориентированных подграфов графа G:

$$n(G) = (\Sigma p_i - \Sigma z_i)/2, \quad (3)$$

Суммирование в (2) и (3) осуществляется по всем значениям $i = 1...n$.

Для выполнения машинного расчета количества сбалансированных и несбалансированных линейных ориентированных подграфов докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. Количество сбалансированных и несбалансированных линейных ориентированных подграфов в знаковом графе G определяется следующим образом:

$$b(G) = (per(I+P) + per(I+Z))/2 - 1,$$

$$n(G) =(per(I+P) - per(I+Z))/2.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно подставить в формулы (2) и (3) следующие равенства:

$$\Sigma p_i = per(I+P) - 1, \quad (4)$$

$$\Sigma z_i = per(I+Z) - 1. \quad (5)$$

Для проверки справедливости равенства (4) достаточно в перманентном многочлене $P_G(\lambda)$ принять собственное значение λ равным единице. Действительно:

$$P_G(\lambda=1) = per\ (\lambda I+P) = 1^n + p_1 1^{n-1} + \ldots + a_n = 1 + \Sigma p_i.$$

Откуда непосредственно вытекает (4).

Аналогично доказывается (5).

Соответственно для линейных ориентированных подграфов графа G оценка сбалансированности $M_{ЛОП}$ вычисляется следующим образом:

$$M_{ЛОП} = b(G)/(b(G)+n(G)). \quad (6)$$

Для вычисления оценок сбалансированности M_i^+, M_i^-, M_c, M_n, M_s применительно к линейным ориентированным подграфам необходимо определить для каждой вершины s_i следующие значения: $C^+(s_i)$ и $C^-(s_i)$.

Вычисление количества сбалансированных и несбалансированных линейных ориентированных подграфов, которым принадлежит вершина, основано на следующем утверждении: при удалении из графа вершины число линейных ориентированных подграфов в графе уменьшается на количество линейных ориентированных подграфов, которым эта вершина принадлежит.

Данное утверждение вытекает из тех соображений, что при удалении из цикла любой вершины цикл распадается, т.е. перестает существовать.

Исходя из данного утверждения, количество сбалансированных и несбалансированных линейных ориентированных подграфов, которым принадлежит вершина s_i, находится по следующим выражениям:

$$C^+(s_i) = b(G) - b(G,\ при\ p_{ik} = p_{ki} = z_{ik} = z_{ki} = 0 \quad \forall k = 1 \ldots n), \quad (7)$$

$$C^-(s_i) = n(G) - n(G,\ при\ p_{ik} = p_{ki} = z_{ik} = z_{ki} = 0 \quad \forall k = 1 \ldots n), \quad (8)$$

где p_{ik}, p_{ki}, z_{ik}, z_{ki} – элементы матриц смежности P_α и Z_α.

Однако для прямого расчета перманента матрицы размера n требуется произвести $N=(n-1)\cdot n!$ умножений, что чрезвычайно много. В связи с этим предлагается вычислять перманент методом Райзера, который заключает в себе $N_R = (n-1) \cdot (2^n-1)$ умножений [5].

Сравним: при $n = 12$ $N = 5\,269\,017\,600$,

$N_R = 45\,045$,

$N/N_R \approx 117$ раз.

Вычисление значения перманента для квадратной матрицы S осуществляется по следующей формуле Райзера:

$$per(A) = \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \sum_{x \in \Lambda_{n-t}} \prod_{i=1}^{n} r_i(X), \tag{9}$$

где $r_i(X)$ — сумма элементов i-ой строки матрицы X,

Λ_{n-t} — совокупность всех подматриц X размера $n\times(n-t)$ матрицы A.

Для применения этой формулы на ЭВМ необходима процедура выделения всех подматриц X в матрице A. Эту процедуру рассмотрим на следующем примере:

Пусть дана квадратная матрица A размера $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

тогда при t=0:

$$\Lambda_3:\quad X^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$r_1=a_{11}+a_{12}+a_{13}$,

$r_2=a_{21}+a_{22}+a_{23}$,

$r_3=a_{31}+a_{32}+a_{33}$.

при t=1:

$$\Lambda_2:\quad X_1^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix},\quad X_2^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix},\quad X_3^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$r_1=a_{11}+a_{12}$,	$r_1=a_{11}+a_{13}$,	$r_1=a_{12}+a_{13}$,
$r_2=a_{21}+a_{22}$,	$r_2=a_{21}+a_{23}$,	$r_2=a_{22}+a_{23}$,
$r_3=a_{31}+a_{32}$.	$r_3=a_{31}+a_{32}$.	$r_3=a_{32}+a_{33}$.

при t=2:

$$\Lambda_1:\quad X_1^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix},\quad X_2^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix},\quad X_3^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$

$r_1=a_{11}$, $r_1=a_{12}$, $r_1=a_{13}$,
$r_2=a_{12}$, $r_2=a_{22}$, $r_2=a_{23}$,
$r_3=a_{13}$. $r_3=a_{23}$. $r_3=a_{33}$.

Представим, к примеру, несколько десятичных чисел в двоичном виде с указанием значений разрядов d_v и их суммы Σd_v:

$1_{10} = 001_2$ $d_3 = 0, d_2 = 0, d_1 = 1$ $\Sigma d_v = 1$
$3_{10} = 011_2$ $d_3 = 0, d_2 = 1, d_1 = 1$ $\Sigma d_v = 2$
$7_{10} = 111_2$ $d_3 = 1, d_2 = 1, d_1 = 1$ $\Sigma d_v = 3$

Тогда из двоичного представления десятичных чисел можно увидеть связь разрядов d_1, d_2, d_3 двоичных чисел со столбцами матриц X.

Так, например, при $t = 0$ $[(n – t) = 3 = \Sigma d_v]$ сумму элементов строк матрицы $X^{(3)}$ можно найти как:

$$r_1=d_1\cdot a_{11}+ d_2\cdot a_{12}+ d_3\cdot a_{13},$$
$$r_2=d_1\cdot a_{21}+ d_2\cdot a_{22}+ d_3\cdot a_{23},$$
$$r_3=d_1\cdot a_{31}+ d_2\cdot a_{32}+ d_3\cdot a_{33},$$

или

$$r_i = \sum_{v=1}^{n} d_v \cdot a_{iv}\ , \qquad (10)$$

где значения d_v берутся из двоичного представления числа, для которого выполняется условие $(n – t) = \Sigma d_v$.

Подобным же образом можно найти r_i для всех матриц X.

Таким образом, процесс расчета перманента матрицы метом Райзера будет следующим:

1. Сформировать таблицу представления десятичных чисел от 1 до 2^n-1 (где n - размер матрицы) в двоичном виде (число разрядов $d_v = n+1$).

2. Для $t = 0$ найти двоичное представление числа для которого $\Sigma d_v = n – t$.

3. По формуле (10) найти r_i для всех $i = 1…n$.

4. Произведение r_i внести в память (сложить).

5. При отсутствии других представлений двоичных чисел удовлетворяющих условию $(n – t) = \Sigma d_v$, число из памяти умножить на $(-1)^t$ и внести в буфер (сложить). При наличии таких представлений повторить пункты 2-5.

6. Увеличить t на единицу.

7. Проверить условие $t < n$, при выполнении повторить пункты 2-6, при невыполнении число в буфере и будет являться перманентом матрицы.

Данный процесс представлен как процедура *PER* (Алгоритм 1).

Алгоритм расчета перманента с использованием метода Райзера позволяет находить оценки взаимодействий для линейных ориентированных подграфов графа *G* с большим числом элементов и на их основе проводить анализ функционирования элементов системы.

Соответственно процесс расчета оценок $М_{ЛОП}$ для всей системы и для её отдельных элементов представлен процедурой *OCENKA_Perm* (Алгоритм 2).

procedure *PER*(A)
[заполняем массив D двоичными числами d_n]
$D \leftarrow d_n$
$per \leftarrow 0$
for t=0 to n do

$$\left\{\begin{array}{l} i \leftarrow 1 \\ R \leftarrow 0 \\ \text{if } \Sigma d_t = n\text{-}t \text{ then } \left\{\begin{array}{l} r_i = \sum\limits_{v=1}^{n} d_v \cdot a_{iv} \\ i \leftarrow i+1 \\ R \leftarrow R + r_i \end{array}\right. \\ per \leftarrow per + R \cdot (-1)^t \end{array}\right.$$

result ← per

Алгоритм 1. Вычисление перманента по формуле Райзера

procedure *OCENKA_Perm* (Z)
$C^+ = (PER\ (I+|Z|) + PER\ (I+Z)) / 2 – 1$
[|Z| - *означает, что элементы матрицы берутся по модулю]*
$C^- = (PER\ (I+|Z|) - PER\ (I+Z)) / 2$
$М_{ЛОП} = C^+ / (C^+ + C^-)$
for i = 1 to n do

$$\left\{\begin{array}{l} Z_1 = Z \\ \text{for } j = 1 \text{ to } n \text{ do } Z_1[i, j] = 0 \\ C_i^+ = (PER\ (I+|Z_1|) + PER\ (I+Z_1))/2–1 \\ C_i^- = (PER\ (I+|Z_1|) – PER\ (I+Z_1)) / 2 \\ M_i = C_i^+ / (C_i^+ + C_i^-) \end{array}\right.$$

Алгоритм 2. Вычисление оценок сбалансированности элементов системы

Предложенные методы и алгоритмы исследования элементов ИАС ОВД позволяют осуществить разработку соответствующего программного обеспечения.

Заключение. Исследование эргатических систем предметного назначения является задачей требующего рассмотрения самых разнообразных сторон. В то же время наличие человека в системе требует особого подхода к изучению её поведения (функционирования), заключающего в учёте типов отношений между элементами системы. Использование разработанных в статье алгоритмов позволяет реализовать их в виде программного средства, автоматизирующего процесс вычисления оценок конфликтности эргатических систем и принятием мер по повышению эффективности функционирования системы или её отдельных элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pyankov O. V. Structural Parametric Modelling of an Information-Analytical System / O. V. Pyankov, V. V. Menshikh // Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathemathical modeling, Programming & Computer Software". — 2016. — Vol. 9. — no. 1. — pp. 105-113.
2. Pyankov O. V. Estimation of the system balance / O. V. Pyankov, V. V. Menshikh // Abstract Book: International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS'17. — SPbPU, 2017. — P. 280-281.
3. Пьянков О.В. Математическое моделирование информационно-аналитической системы на основе теории конфликтов / О.В. Пьянков. — Вестник Воронежского государственного технического университета. — 2014. — Т.10. — № 1. — С. 75-79.
4. Пьянков О.В. Численный анализ внутрисистемного конфликта / О.В. Пьянков // Вестник Воронежского государственного технического университета, 2010. — Т. 6. — № 4. — С. 74-76.
5. Минк Х. Перманенты / Х. Минк; Пер. с англ. В.Е. Тараканова: под ред. В.К. Захарова. — Москва : Мир, 1982. — 216 с.
6. Цветкович Д. Спектры графов. Теория и применение / Д. Цветкович, М. Дуб, Х. Захс. — Киев : Наук. думка, 1984. — 384 с.

V.V. Menshikh, O.V. Pyankov

DEVELOPMENT OF THE METHOD OF CALCULATION OF BALANCING ESTIMATES BASED ON THE USE OF PERMANENT POLYNOMIALS

Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of Russia.

It is proposed to carry out a study of objective object systems based on the theory of conflicts. Indicated internal indicators of the effectiveness of the functioning of ergatic systems, which are estimates of the balance of the *elements of the system. Methods and algorithms are developed that allow the calculation of the balances of the conflict interactions of the elements of ergatic systems. The application of the sign graph G as a model of conflict interactions of the system elements is substantiated. We prove the possibility of applying the permanent polynomial of the adjacency matrices P and Z of graph G to calculate the balance estimates. We consider the Riser method, which reduces the computational complexity of calculating the permanent polynomial of adjacency matrices. We propose a modification of the Riser method, which includes calculating the sum of the digits of the binary representation of decimal numbers, allowing for computer calculations, and examples of using a new method for calculating the permanent are given in detail. On the algorithmic language, the developed algorithms for calculating the balance estimates are shown.*

Keywords: balance estimations, permanent, method and algorithm of calculation, Riser method, information-analytical system.

REFERENCES

1. Pyankov O. V. Structural Parametric Modelling of an Information-Analytical System / O. V. Pyankov, V. V. Menshikh // Bulletin of the South Ural State University. Series “Mathemathical modeling, Programming & Computer Software”. — 2016. — Vol. 9. — No. 1. — pp. 105-113.
2. Pyankov O. V. Estimation of the system balance / O. V. Pyankov, V. V. Menshikh // Abstract Book: International Conference on Mathematical Modelling in Applied Sciences, ICMMAS’17. — SPbPU, 2017. — pp. 280-281.
3. P'yankov O.V. Matematicheskoe modelirovanie informatsionno-analiticheskoy sistemy na osnove teorii konfliktov / O.V. P'yankov. — Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. — 2014. — Vol.10. — No. 1. — pp. 75-79.
4. P'yankov O.V. Chislennyy analiz vnutrisistemnogo konflikta / O.V. P'yankov // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2010. — Vol. 6. — No. 4. — S. 74-76.
5. Mink Kh. Permanenty / Kh. Mink; Per. s angl. V.E. Tarakanova: pod red. V.K. Zakharova. — Moskva : Mir, 1982. — 216 p.
6. Tsvetkovich D. Spektry grafov. Teoriya i primenenie / D. Tsvetkovich, M. Dub, Kh. Zakhs. — Kiev : Nauk. dumka, 1984. — 384 p.