УДК 519.97, 519.6, 007.681.5

Е.А. Андреева, В.М. Цирулева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Тверской государственный университет, Тверь, Россия

В настоящее время важной технической и теоретической задачей является разработка методов и способов управления сложными динамическими объектами, использующими как традиционные способы управления динамическими системами (принцип максимума Понтрягина, метод синтеза управления Беллмана, теорию автоматического регулирования), так и методы, основанные на обучении искусственных нейронных сетей, такие как методы с эталонной моделью, прогнозирующее нейроуправление, метод обратного распространения ошибки и др. Нейроуправление можно использовать в управлении истребителями, асинхронными электроприводами и компьютерами. Для разработки интеллектуальных систем управления методы искусственного интеллекта могут быть объединены с достижениями классической теории оптимального управления. В статье показана возможность объединения классических методов оптимального управления и методов оптимизации, таких как принцип максимума Понтрягина для систем с запаздывающим аргументом, методы динамического программирования и др., с методами, использующими искусственные нейронные сети. Использование технологий нейроуправления вызвано существованием неконтролируемых шумов и помех. Преимущество нейронных сетей заключается в возможности их обучения, при этом необходим правильный выбор функции активации, учет запаздывания при передаче сигнала между нейронами и формирование входного сигнала. Целью статьи является разработка и построение обобщенной математической модели управления сложной динамической системой автоматического управления с помощью методов математической теории оптимального управления, методов оптимизации и нейронных сетей; разработка общего гибридного алгоритма для получения оптимальных значений управляющих функций и весовых коэффициентов нейронной сети, оптимизирующих заданный функционал. Созданная модель может быть использована для различных функций активации, с учетом запаздывания и ограничений на управляющие параметры. Разработан алгоритм построения численного решения в зависимости от значений параметров модели, метода и вида функций активации. В завершении статьи приведены результаты вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: оптимальное управление, многослойная искусственная нейронная сеть, ансамбль нейронов, функция активации, математическая модель, система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, многокритериальная задача, принцип максимума с запаздывающим аргументом, дискретная задача оптимального управления.

ВВЕДЕНИЕ. Актуальность исследования искусственных нейронных сетей (ИНС) подтверждается многочисленными примерами использования ИНС в системах автоматического регулирования [1], [2], робототехнике

[3], системах автопилотирования [4] и др. В работе [5], к примеру, показана возможность управления летательным аппаратом (квадрокоптером).

В данной статье построена динамическая модель, в которой поиск оптимального управления осуществляется с помощью методологии основанной на принципе максимума Понтрягина [6], [7], [8], [9], решении задач синтеза управления Беллмана [10], [7], [9], [11], методах оптимизации [9], [12] и управления с помощью нейронных сетей [13], [14], [15], учитывающих эффект запаздывания в формировании сигнала, который может возникать в системах автоматического управления. Динамическая нейронная сеть описываются системой дифференциальных уравнений с учетом запаздывания в аргументе функции состояния. Каждый нейрон взаимодействует с ансамблем нейронов. По характеру и методу обучение ИНС относится к классу задач обучения с учителем [1], [14]. Рассматриваемая модель ИНС имеет достаточно общую структуру.

Поставленная задача решается с помощью принципа максимума Понтрягина для систем с запаздывающим аргументом, а численные результаты получены с помощью метода быстрого автоматического дифференцирования (БАД) [12], [9]. Целью управления является определение оптимальных весовых коэффициентов нейронной сети и внешней управляющей функции, минимизирующих заданный функционал в зависимости от функций активации нейронной сети и от параметров задачи. Следует отметить, что в общем случае каждая координата может иметь свое запаздывание, при этом являющееся функцией времени. Математическая модель ИНС учитывает многообразие функций активации (радиальные, сигмоидальные и другие) и многокритериальность задачи.

Разработанный на основе гибридного подхода алгоритм позволяет решить задачу синтеза оптимального управления в зависимости от действия шума и помех для нелинейных процессов.

Предлагаемый метод соединяет в себе методы обучения ИНС и классического оптимального управления.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ. Динамика управляемого с помощью ИНС объекта описывается системой дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\dot{x}_i(t) = \beta_i\big(t, x_i(t)\big) + F_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(t)x_j\big(t-h_j\big) - Q_i\right) +$$

$$+G_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(t)x_j(t) - \psi_i\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)u_j(t), \qquad (1)$$

здесь и далее $i = 1, \dots, n, t \in [0, T]$, $w_{ij}(t)$ – весовые коэффициенты ИНС, $\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(t) x_j(t - h_j)$ – суммарное воздействие ИНС с запаздыванием на i – ый нейрон, $\mathrm{Q_i}$ и ψ_i – заданные постоянные величины, которые в общем случае могут зависеть и от времени.

Начальные условия для системы (1) задаются на отрезке запаздывания:

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \ \ t \in \left[-\max_j\{h_j\}, 0\right], \qquad i, j = 1, \dots, n. \tag{2}$$

На весовые коэффициенты искусственной нейронной сети $w_{ij}(t)$ и внешние воздействия $u_j(t)$ наложены ограничения:

$$u(t) \in U \subseteq R^n, \ \ w(t) \in W \subseteq R^n \times R^n. \tag{3}$$

В системе дифференциальных уравнений (1) функция $\beta_i(t, x_i(t))$ описывает динамику неуправляемого процесса; $F_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(t) x_j(t - h_j) - \mathrm{Q_i}\right)$ – функция управления динамической системой с помощью искусственной нейронной сети с учетом запаздывания, аргумент этой функции определяется состоянием системы с учетом запаздывания, $\mathrm{Q_i}$ – сдвиг аргумента, а сама функция F_i представляет собой дифференцируемую функцию активации; $G_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(t) x_j(t) - \psi_i\right)$ – также является функцией активации в случае отсутствия запаздывания при управлении динамической системой с помощью искусственной нейронной, ψ_i – сдвиг аргумента; последнее слагаемое в выражении (1) описывает классические внешние управляющие воздействия. Таким образом, задача построения оптимального управления представляет собой синтез классического управления и нейроуправления и заключается в определении классического оптимального управления и весовых коэффициентов искусственной нейронной сети, минимизирующих заданный целевой функционал:

$$I(w, u) = \int_0^{\mathrm{T}} \left(\mathrm{M_1} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}(t) x_i(t) x_j(t) + \mathrm{M_2} \sum_{i=1}^{n} \big(u_i(t)\big)^2 \right) dt \ +$$

$$+\mathrm{M_3} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x(\mathrm{T})) \to min \tag{4}$$

при ограничениях (1) – (3).

Заметим, что в поставленной задаче (1) – (4) целевой функционал (4) является свёрткой трёх критериев с заданными весовыми коэффициентами $\mathrm{M_1}, \mathrm{M_2}, \mathrm{M_3}$.

Первое слагаемое $\text{M}_1\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}(t)x_i(t)x_j(t)$ выражает внутреннюю энергию нейронной сети, которую требуется уменьшить для того, чтобы избежать перегрузки, перегрева, появления побочных электромагнитных полей.

Второе слагаемое $\text{M}_2\sum_{i=1}^{n}\left(u_i(t)\right)^2$ отражает влияние внешнего управления на нейронную сеть. Терминальное слагаемое $\text{M}_3\sum_{i=1}^{n}\Phi_\text{i}(x(\text{T}))$ отвечает за состояние системы в конечный фиксированный момент времени (попадание в заданную точку пространства или на заданное многообразие).

Требуется обучить нейронную сеть, определив оптимальные весовые коэффициенты $w_{ij}(t)$ и внешние воздействия $u_i(t)$ на заданном отрезке времени $[0, T]$.

Поставленная задача является многокритериальной задачей оптимального управления с запаздыванием в аргументе функции состояния и решена с учетом выбора различных функций активации [13].

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В АРГУМЕНТЕ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ. Для определения функции управления и оптимальных значений весовых коэффициентов в задаче (1) – (4) воспользуемся принципом максимума для динамических систем с запаздывающим аргументом [7], [13], [14].

Построим функцию Понтрягина для задачи (1) – (4):

$$H\big(t,x,y,w,u,p(t)\big) = -\lambda_0\text{M}_1\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}x_i x_j - \lambda_0\text{M}_2\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2} +$$
$$+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\left(\beta_i(t,x_i) + F_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}y_j - \text{Q}_\text{i}\right)\right) + \tag{5}$$
$$+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\left(G_i\left(\sum\nolimits_{j=1}^{m} w_{ij}x_j - \psi_\text{i}\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)u_j\right),$$

где $y_j(t) = x_j(t - h_j)$.

Согласно принципу максимума оптимальное управление определяется условием (6):

$$\overline{u}(t) = \arg\max_{u\in U}\left[-\lambda_0\text{M}_2\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_i(t)b_{ij}(t)u_j\right], \tag{6}$$

а весовые коэффициенты – из выражения (7):

$$\overline{w}(t) = \arg\max_{w\in W}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\left(F_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\overline{y}_j - \mathrm{Q_i}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+G_i\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\overline{x}_j - \psi_\mathrm{i}\right)\right)-\lambda_0\mathrm{M}_1\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}\overline{x}_i\overline{x}_j\right]. \qquad (7)$$

Согласно принципу максимума для задачи с запаздывающим аргументом сопряженные вектор-функции $p(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (8) – (9):

$$\dot{p}_r(t) = \lambda_0\mathrm{M}_1\sum_{j=1}^{n}\overline{w}_{rj}(t)\overline{x}_j(t) + \lambda_0\mathrm{M}_1\sum_{i=1}^{n}\overline{w}_{ir}(t)\overline{x}_i(t) + \frac{\partial\beta_r(t,\overline{x}_r)}{\partial x_r}p_r(t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} p_i(t+h_r)\frac{\partial F_i(z_i)}{\partial z_i}w_{ir}(t+h_r) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\frac{\partial G_i(s_i)}{\partial s_i}w_{ir}(t), \qquad (8)$$

где $z_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}(t+h_j)y_j\left(t+h_j\right) - \mathrm{Q_i}$, $s_i = \sum_{j=1}^{n} w_{rj}x_j - \psi_\mathrm{i}$.

Условия трансверсальности для задачи с запаздыванием имеют вид:

$$p_i(T) = -\mathrm{M}_3\frac{\partial\Phi_i(\bar{x}(\mathrm{T}))}{\partial x_i}, \;\; p_i(t) = 0, \;\; t > T, \;\; i = 1,\dots,n. \qquad (9)$$

Легко проверить, что нерегулярных решений в задаче не существует, поэтому $\lambda_0 = 1$. Если на управление наложены параллелепипедные ограничения вида:

$$u_i(t) \in [-C_i, C_i], \qquad i = 1,\dots,n, \qquad (10)$$

то оптимальное управление определяется выражением (11):

$$\bar{u}_r(t) = \begin{cases} C_r, & \frac{1}{2\mathrm{M}_2}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)b_{ir}(t) > C_r, \\ \frac{1}{2\mathrm{M}_2}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)b_{ir}(t), & \left|\frac{1}{2\mathrm{M}_2}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)b_{ir}(t)\right| \le C_r, \\ -C_r, & \frac{1}{2\mathrm{M}_2}\sum_{i=1}^{n} p_i(t)b_{ir}(t) < C_r. \end{cases} \qquad (11)$$

В общем случае оптимальное управление является решением нелинейной системы алгебраических уравнений (6) с учетом ограничений (3).

Если на весовые коэффициенты не наложены ограничения, то приравняв к нулю производные (12):

$$\frac{\partial H\big(t,x,y,w,u,p(t)\big)}{\partial w_{rs}} = -\lambda_0\mathrm{M}_1 x_r(t)x_s(t) +$$

$$+\sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial F_r(z_r)}{\partial z_r} y_s(t) + \sum_{r=1}^{n} p_r \frac{\partial G_r(h_r)}{\partial h_r} x_s(t) = 0, \qquad (12)$$

где $z_r = \sum_{j=1}^{n} w_{rj} y_j(t),\ h_r = \sum_{j=1}^{n} w_{rj} x_j(t)$, r, s =1,…, n,

получим систему алгебраических уравнений для определения оптимальных значений весовых коэффициентов $\overline{w}_{rs}$(t) нейронной сети, которые зависят от структуры функций активации F_r и G_r.

Краевая задача принципа максимума [8], [9] имеет следующий вид:

$$\dot{x}_i(t) = \beta_i\big(t, x_i(t)\big) + F_i\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_{ij}(t) x_j\big(t - h_j\big) - \mathrm{Q_i}\right) +$$

$$+G_i\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{w}_{ij}(t) x_j(t) - \psi_i\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)\bar{u}_j(t),$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \ \ t \in \left[-\max_j\{h_j\}, 0\right], \qquad (13)$$

$$\dot{p}_r(t) = \lambda_0 \mathrm{M}_1 \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_{rj}(t) x_j(t) + \lambda_0 \mathrm{M}_1 \sum_{i=1}^{n} \overline{w}_{ir}(t) x_i(t) + \frac{\partial \beta_r(t, x_r)}{\partial x_r} p_r(t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} p_i(t + h_r) \frac{\partial F_i(z_i)}{\partial z_i} \overline{w}_{ir}(t + h_r) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \frac{\partial G_i(s_i)}{\partial s_i} \overline{w}_{ir}(t),$$

где $z_i = \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_{ij}(t + h_j) y_j\big(t + h_j\big) - \mathrm{Q_i},\ \ s_i = \sum_{j=1}^{n} \overline{w}_{rj} x_j - \psi_i$,

$$p_i(T) = -\mathrm{M}_3 \frac{\partial \Phi_i(x_i(\mathrm{T}))}{\partial x_i{}^T}, \ \ p_i(t) = 0, \ \ t > T, \ \ i = 1, \dots, n,$$

в которой оптимальное управление определяется по формуле (6), а весовые коэффициенты удовлетворяют соотношениям (7).

ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БЫСТРОГО АВТОМАТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ. Для решения краевой задачи могут быть использованы различные методы [12], [9]: алгоритм градиентного спуска, методы прогонки (пристрелки), метод многократного шунтирования, генетический алгоритм и др.

Построим дискретную аппроксимацию задачи (1) – (4), используя правило левых прямоугольников для аппроксимации функционала и схему Эйлера для аппроксимации динамической системы. Дискретная задача оптимального управления [12], [9] запишется в виде

$$I(w,u)=\Delta t\left(\mathrm{M}_1\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{i,j=1}^{n}w_{ij}^k x_i^k x_j^k+\mathrm{M}_2\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i^k)^2\right)+$$

$$+\mathrm{M}_3\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x^q), \qquad (14)$$

$$x_i^{k+1}=x_i^k+\Delta t\left(\beta_i\left(t^k,x_i^k\right)+F_i\left(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}^k x_j^{k-\nu_j}-Q_i\right)\right)+$$

$$+\Delta t\left(G_i\left(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}^k x_j^k-\psi_i\right)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^k u_j^k\right) \qquad (15)$$

$$x_i{}^0=a_i, \qquad i=-\max_i\{\nu_j\},\ldots,0, \qquad (16)$$

$$u^k\epsilon U\subseteq R^n, \qquad w^k\epsilon\ W\subseteq R^n\times R^n. \qquad (17)$$

Здесь верхний $k=0,\ldots,q-1$ – номер нейронного слоя в схеме аппроксимации, а нижний индекс $i=1,..,n$ – номер координаты вектора.

Построим функцию Лагранжа [12], [9] дискретной задачи оптимального управления (14) – (17):

$$L(w,u,x)=\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n}p_i^{k+1}\left(x_i^{k+1}-x_i^k-\Delta tF_i\left(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}^k x_j^{k-\nu_j}-Q_i\right)\right)+$$

$$+\Delta t\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n}p_i^{k+1}\left(-\beta_i\left(t^k,x_i^k\right)-G_i\left(\sum_{j=1}^{n}w_{ij}^k x_j^k-\psi_i\right)-\sum_{j=1}^{n}b_{ij}^k u_j^k\right)+ \qquad (18)$$

$$+\lambda_0\Delta t\left(\mathrm{M}_1\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{i,j=1}^{n}w_{ij}^k x_i^k x_j^k+\mathrm{M}_2\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n}\left(u_i^k\right)^2\right)+\mathrm{M}_3\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(x^q).$$

Градиент минимизируемой функции (18) определяется следующими соотношениями

$$\frac{\partial L(w,u,x)}{\partial u_s^l}=\mathrm{M}_2\lambda_0\Delta t2u_s^l-\Delta t\sum_{i=1}^{n}b_{is}^l p_i^{l+1}, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial L(w,u,x)}{\partial w_{sm}^l}=\mathrm{M}_1\lambda_0\Delta t x_m^l x_s^l-\Delta t p_s^{l+1}x_m^{l-\nu_m}\frac{\partial F_s(z_s^l)}{\partial z_s^l}-$$

$$-\Delta t p_s^{l+1}x_m^l\frac{\partial F_s(y_s^l)}{\partial y_s^l}, \qquad (20)$$

где $z_s^l = \sum_{j=1}^{n} w_{sj}^l x_j^{l-\nu_j} - \mathrm{Q}_s\,,\quad \mathrm{y}_s^l = \sum_{j=1}^{n} w_{sj}^l x_j^l - \psi_s$.

В формулах (18) – (19) *l=1, ..., q-1, s=1, ..., n, m=1, ..., n.*

Сопряженные переменные p_m^l вычисляются с помощью рекуррентных формул:

$$p_m^q = -\mathrm{M}_3\lambda_0 \frac{\partial\Phi_\mathrm{m}(x_m^q)}{\partial x_m^q},\quad p_m^l = 0,\qquad l > q, \tag{21}$$

$$p_m^l = -\mathrm{M}_1\lambda_0\Delta\mathrm{t}\left(\sum_{i=1}^{n} w_{im}^l\, x_i^l + \sum_{j=1}^{n} w_{mj}^l\, x_j^l\right) + p_m^{l+1} + \Delta\mathrm{t}\, p_m^{l+1}\frac{\partial\beta_m(t^l, x_m^l)}{\partial x_m^l} +$$

$$+\Delta\mathrm{t}\sum_{i=1}^{n} p_i^{l+\nu_m+1} w_{im}^{l+\nu_m}\frac{\partial F_i(z_i^{l+\nu_m})}{\partial z_i^{l+\nu_m}} + \Delta\mathrm{t}\sum_{i=1}^{n} p_i^{l+1} w_{im}^l \frac{\partial G_i(y_i^l)}{\partial y_i^l}, \tag{22}$$

где $z_i^k = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^k x_j^{k-\nu_j} - \mathrm{Q}_\mathrm{i}\,,\quad \mathrm{y}_i^k = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^k x_j^k - \psi_\mathrm{i}$, *k =1, ..., q-1* , *i =1, ..., n,* которые используются в численном алгоритме для вычисления градиента минимизируемой функции.

При наличии дополнительных ограничений на функции управления и состояния и весовые коэффициенты небходимо учитывать условия дополняющей нежесткости, не отрицательности и согласования знаков [12], [9], [16].

Достоверность полученных результатов подтверждается использованием теоретически обоснованных методов.

Дискретная задача решалась методом БАД [12], [9].

Отметим основные этапы алгоритма построения приближенного оптимального решения дискретной задачи оптимального управления.

Задаем значения параметров модели и метода, функции активации и допустимые начальные состояния системы (16) на интервале запаздывания.

Выбираем допустимые начальные значения внешних управляющих воздействий и весовых коэффициентов нейронной сети для нулевой итерации.

Получаем состояние системы на текущей итерации согласно (15) – (16) и соответствующее значение целевой функции по формуле (14).

Вычисляем значения сопряженных векторов на текущей итерации по формулам (21) – (22).

Используя соотношения (19) – (20) для вычисления градиента минимизируемой функции, определяем управление, весовые коэффициенты нейронной сети, фазовые переменные и значение целевой функции на следующей итерации, корректируя, в случае необходимости, шаг градиентного спуска.

Сравниваем значения минимизируемой функции на двух последовательных итерациях. Процесс завершается, если достигнута заданная точность вычислений [9], [12].

Приведем результаты одного из численных экспериментов со следующими исходными данными:
$\mathrm{M}_1 = 0,\ \mathrm{M}_2 = 1,\ \mathrm{M}_3 = 1, n = 4,\quad \Phi\big(x(T)\big) = \sum_{i=1}^{n}(x_i(T) - A_i)^2,$
$\beta_i\big(t, x_i(t)\big) = -\beta_i x_i(t).$

В качестве функций активации взяты радиально – базисные функции:

$$F_i\big(z_i^k\big) = K_i e^{-\left(\frac{z_i^k - a_i}{r_i}\right)^2},\ \ k = 1, \dots,\ q - 1,\qquad i - 1, \dots, n,$$
$$G_i\big(z_i^k\big) = 0,\ \ k = 1, \dots,\ q - 1,\qquad i - 1, \dots, n.$$

На отрезе запаздывания функции $\varphi_i(t),\ t \in \left[-\max_j\{h_j\}, 0\right]$ являются постоянными. Начальные значения для первого, второго, третьего и четвертого нейронов заданы соответственно $x_1(t) =\ 1{,}043,\ \ x_2(t) =\ 2{,}648,\ \ x_3(t) =\ 7{,}492,\ \ x_4(t) =\ 7{,}186$. В качестве конечных значений для всех четырех нейронов выбрано число 2,0. Точность вычислений $\varepsilon = 0{,}001$. Количество слоев q=100. Для выполнения заданной точности потребовалось 7000 итераций. При этом были получены следующие конечные значения состояний для первого, второго, третьего и четвертого нейронов соответственно: 1,974, 1,962, 2,007, 1,982. Значение функционала в начальный момент времени составляло 588,168. По итогам работы программы на 7000 итерации значение функционала уменьшилось до величины 0,181.

На рисунке 1 графики изменения состояний первого, второго, третьего и четвертого нейронов изображаются голубым, желтым, оранжевым и бирюзовым цветом соответственно.

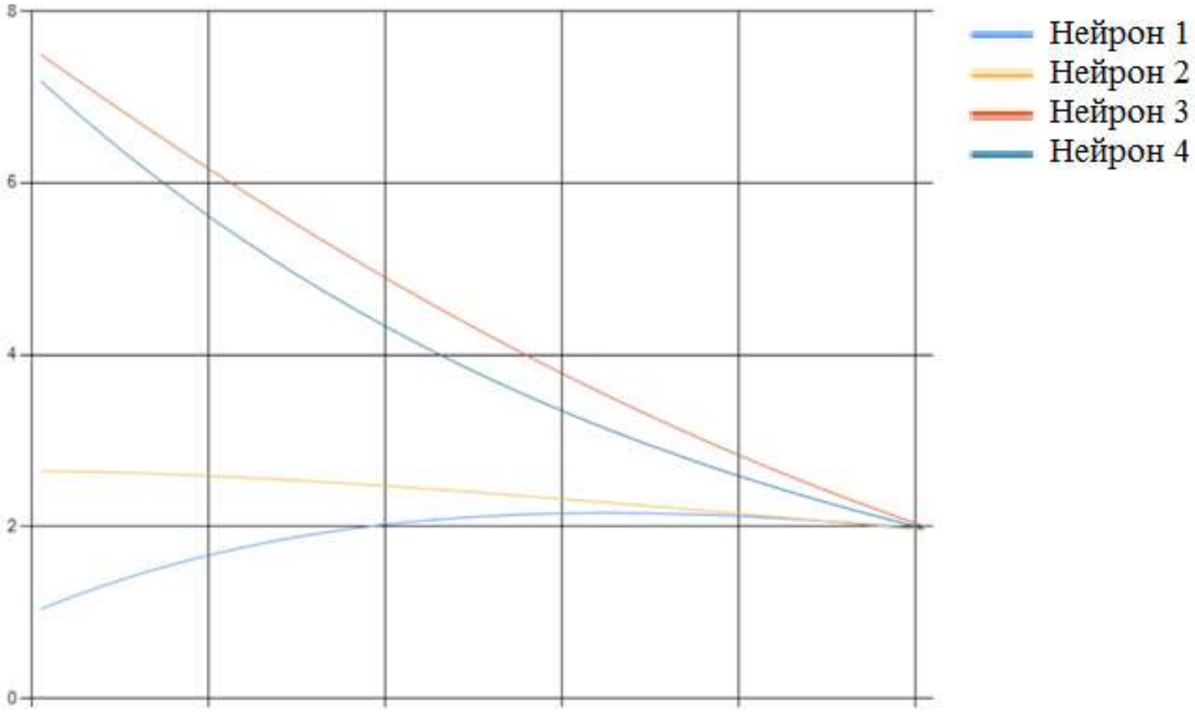

Рисунок 1- Зависимость функций x_i от времени

Функция Понтрягина, построенная без учета запаздывания на оптимальном решении, является постоянной величиной, что доказывает правильность работы реализованного алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ. В работе построена и проанализирована математическая модель динамической управляемой системы, в которой используется как классическое управление, так и управление с помощью искусственной нейронной сети с учетом запаздывания в передаче сигнала и в зависимости от выбранных функций активации. Рассматриваемая математическая модель может быть использована при моделировании систем автоматического управления. Эта модель может быть реализована при различных функциях активации ансамбля нейронов, учитывать влияние запаздывания в передаче сигнала ансамблем нейронов. С помощью построенной модели можно решать многокритериальные задачи, задачи с фазовыми и смешанными ограничениями, используя метод штрафных функций.

Изложенный в работе подход является объединением методов классической теории оптимального управления и оптимизации с методами нейроуправления, использующими искусственные нейронные сети, в частности, в системах автоматического управления. Авторами разработан алгоритм гибридного метода, в котором используется управление динамической системой с помощью искусственных нейронных сетей и классических методов управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галушкин А.И. Нейронные сети. Основы теории. – М.: Горячая линия – Телеком, 2012. – 496 с.
2. Терехов В.А., Ефимов Д.В., Тюкин И.Ю. Нейросетевые системы управления. – М.: Высшая школа, 2002. – 183 с.
3. Prokhorov Danil V. Toyota Prius HEV Neurocontrol and Diagnostics. // Neutral Networcs. – 2008. – № 21. – P. 458-465.
4. Микрин Е.А. Бортовые комплексы управления космическими аппаратами. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2014. – 245с.
5. Luukkonen Teppo. Modelling and control of quadcopter. URL http://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf (дата обращения 03.05.2018).
6. Понтрягин Л.С. Оптимальные процессы регулирования. // Успехи математических нвук. 1959. – Т. 14. – Вып. 1. – С. 3 – 20.
7. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. – М.: Наука, 1992. – 336 с.
8. Андреева Е.А. Управление динамическими системами. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2016. – 188 с.
9. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации. – М.: Высшая школа, 2006. – 584 с.
10. Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Иностранная литература, 1960. – 400 с.
11. Рафальская Н.В., Цирулева В.М. Достаточные условия оптимальности в задаче, линейной по фазовым переменным, и в модели очистки водоема. // Применение функционального анализа в теории приближений. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2001. – С. 108 – 124.
12. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982. – 432 с.
13. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Математическое моделирование управления динамической нейронной сетью с запаздыванием. // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – Воронеж: 2018. – Том 6. №1. 14 с.
14. Андреева Е.А., Пустарнакова Ю.А. Численные методы обучения искусственных нейронных сетей с запаздыванием. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. – Т. 42. С. 1383–1391.
15. Андреева Е.А., Пустарнакова Ю.А. Оптимизация нейронной сети с запаздыванием. – // Применение функционального анализа в теории приближений. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2000. – С. 14 – 30.

16. Андреева Е.А., Цирулева В.М., Кожеко Л.Г. Модель управления процессом рыбной ловли. // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – Воронеж: 2017. – №4 (19). 10 с.

E.A. Andreeva, V.M. Tsiruleva

MATHEMATICAL MODELING OF OPTIMAL CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS BY ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

Tver State University, Tver, Russia

Currently, an important technical and theoretical task is to develop methods and methods for managing complex dynamic objects that use both traditional methods for controlling dynamic systems (the Pontryagin maximum principle, the Bellman control synthesis method, the theory of automatic control), and methods based on the training of artificial neural networks, such as methods with a reference model, predictive neural control, method for back propagation of an error, etc. Neuropravlenie can be used in the management of fighters, asynchronous electric drives and computers. To develop intelligent control systems, methods of artificial intelligence can be combined with the achievements of the classical theory of optimal control. The article shows the possibility of combining classical methods of optimal control and optimization methods, such as the Pontryagin maximum principle for delayed argument systems, dynamic programming methods, etc., with methods using artificial neural networks.. The use of neural control technologies is caused by the existence of uncontrolled noises and interference. The advantage of neural networks is the possibility of their training, with the right choice of the activation function, accounting for delay in signal transmission between neurons and the formation of an input signal. The aim of the article is the development and construction of a generalized mathematical model for controlling a complex dynamic automatic control system using methods of optimal control theory, optimization methods and neural networks; developing a general hybrid algorithm for obtaining optimal values of control functions and weighting coefficients of a neural network that optimize a given functional. The created model can be used for various activation functions, taking into account the lag and limitations on the control parameters. An algorithm for constructing a numerical solution is developed depending on the values of the parameters of the model, the method, and the type of activation functions. At the end of the article the results of the computational experiment are shown.

Keywords: optimal control, multilayer artificial neural network, neuron ensemble, activation function, mathematical model, system of differential equations with delayed argument, multicriteria problem, maximum principle with delayed argument, discrete optimal control problem.

REFERENCES

1. Galushkin A.I. Neural networks. Fundamentals of the theory. – M.: Hot line – Telecom, 2012. – 496 c.
2. Terekhov VA, Efimov DV, Tyukin I.Yu. Neural network control systems. – Moscow: Higher School, 2002. – 183 p.
3. Prokhorov Danil V. Toyota Prius HEV Neurocontrol and Diagnostics. // Neutral Networcs. – 2008. – № 21. – P. 458-465.

4. Mikrin E.A. On-board control systems for space vehicles. – Moscow: Bauman MSTU, 2014. – 245 p.
5. Luukkonen Teppo. Modelling and control of quadcopter. URL http://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf (date of reference 03/05/2018).
6. Pontryagin L.S. Optimal regulation processes. // The success of mathematical Sciences. 1959. – Vol. 14. – Issue. 1. – P. 3 – 20.
7. Andreeva E.A., Kolmanovsky V.B., Shaikhet L.Ye. Management of systems with aftereffect. – Moscow: Nauka, 1992. – 336 p.
8. Andreeva E.A. Management of dynamic systems. – Tver: Tver state University, 2016. – 188 p.
9. Andreeva E.A., Tsiruleva V.M. Variations calculus and optimization methods. – Moscow: Higher School, 2006. – 584 p.
10. Bellman R. Dynamic programming. – Moscow: Foreign Literature, 1960. – 400 p.
11. Rafalskaya N.V., Tsiruleva V.M. Sufficient conditions of optimality in a problem linear jn phase variables and in model of water purification. // Application of functional analysis in approximation theory. – Tver: Tver. state. University, 2001. – P. 108 – 124.
12. Yevtushenko Yu.G. Methods for solving extremal problems and their application in optimization systems. – Moscow: Nauka, 1982. – 432 p.
13. Andreeva E.A, Tsiruleva V.M. Mathematical modeling of control of a dynamic neural network with delay. // Modeling, optimization and information technologies. – Voronezh: 2018. – Volume 6. №1. 14 c.
14. Andreeva E.A., Pustarnakova Yu.A. Numerical methods for training artificial neural networks with delay. // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. – T. 42. P. 1383–1391.
15. Andreeva E.A., Pustarnakova Yu.A. Optimization of the neural network with delay. – // Application of functional analysis in approximation theory. – Tver: Tver. state. University, 2000. –. – P. 14 – 30.
16. Andreeva E.A., Tsiruleva V.M., Kozheko L.G. The model of fisheries management. // Modeling, optimization and information technologies. – Voronezh: 2017. – № 4 (19). – 10 p.