УДК 519.8(075.8)

А.В. Ганичева

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СОЗДАНИЯ РЕЗЕРВА ДЕНЕЖНЫХ СРЕДСТВ

Тверская государственная сельскохозяйственная академия,
Тверь, Россия

Актуальность исследования обусловлена необходимостью рационального управления денежными средствами, как организации (предприятия), так и различных сообществ, индивидуальных предпринимателей, семейного бюджета и отдельных индивидуумов. В статье разработан новый метод оценки оптимального управления резервом денежных средств. Для непрерывного и дискретного случаев построены математические модели, основанные на аппарате линейных дифференциальных и разностных уравнений. Показано изменение резерва как функции времени. Предложены варианты оценки параметров при четких и нечетких условиях. Сформулированы условия оптимального управления резервными средствами, а также решение задач определения момента времени для данного уровня резерва и начального значения резерва при заданном прогнозном уровне. Определено эффективное и неэффективное управление денежными средствами при четких и нечетких условиях. Проведен анализ зависимости резервных средств от значений параметров уравнений, описывающих процесс формирования резерва. Рассмотрена модель составляющих резерва. Решена задача их оптимального сочетания при максимизации резерва. При решении использованы методы целочисленного программирования. Материалы статьи представляют практическую ценность, так как могут найти применение в технике, экономике, экологии, военном деле, социальной сфере.

Ключевые слова: система, средства, резерв денежных средств, параметры уравнения, оптимальное управление резервом.

Введение. Одной из основных целей функционирования любой организации, существования семейной ячейки, отдельного индивидуума является оптимальное управление резервом денежных средств. В данной работе показана общая схема решения данной задачи.

Цель данной работы заключается в проведении исследования зависимости доли резерва денежных средств от времени, как для дискретного, так и для непрерывного случая.

Основные решаемые задачи:

1. Описать в общем виде изменение доли резервного значения как функции времени.
2. Показать, как осуществляется оптимальное управление резервными средствами.
3. Проанализировать различные ситуации, определяемые соответствующими соотношениями между параметрами, характеризующими данную модель.

1. Построение непрерывной модели резерва денежных средств

Процесс изменения резерва денежных средств будем рассматривать на временном интервале Δ. Разобьём этот интервал на N подинтервалов $\Delta_n = [t_n, t_{n+1}]$, $(n = \overline{1,N})$. Пусть $M(t)$-вся сумма денежных средств в момент времени t, $Q(t)$-резервная сумма, $P(t) = Q(t)/M(t)$–доля резервной части. Рассматривается случай, когда $M(t)$ не пополняется извне, т.е. является убывающей функцией. За время Δt ($\Delta t \le \Delta_n$) $P(t)$ либо увеличится, либо уменьшится. Резервная часть увеличивается тем больше, чем меньше денежных средств расходуется. Резервная часть уменьшается при увеличении расходов. В первом случае $P(t)$ увеличивается тем больше, чем будет больше выделенных для расхода средств $1 - P(t)$, которые за Δt не были использованы, т.е. изменение $P(t)$ представляет собой некоторую функцию, зависящую от $1 - P(t)$и Δt. Наиболее простая зависимость:

$$\alpha(1 - P(t)) \cdot \Delta t,$$

где α – постоянная величина, α>0.Такое допущение справедливо, поскольку в первом случае $P(t + \Delta t)$ представляет собой часть средств $1 - P(t)$, которые за промежуток Δt не были использованы, и эта часть увеличивается с увеличением Δt.

Во втором случае (уменьшения $P(t)$) за время Δt часть резервных средств начинает использоваться. Изменение денежных средств определяется зависимостью

$$-\gamma \cdot P(t)\Delta t,$$

где γ – постоянная величина (γ>0).

Известны разные методики оценки коэффициентов α и γ в задачах по составлению дифференциальных и разностных уравнениях [1-4].

Рассмотрим следующее тождество:

$$P(t + \Delta t) - P(t) = \frac{P(t + \Delta t) - R(t)}{\left(1 - P(t)\right)\Delta t}\left(1 - P(t)\right)\Delta t - \frac{P(t) - R(t)}{P(t)\Delta t} P(t)\Delta t,$$

где $R(t)$- доля $P(t)$, оставшаяся в резерве, $\frac{P(t+\Delta t) - R(t)}{1 - P(t)}$- доля задействованных средств, которые за Δt ушли в резерв, $\frac{P(t) - R(t)}{P(t)}$- доля выделенных для расхода денежных средств, которые за Δt стали использоваться.

Для краткости положим $P_n = P(t)$, $P_{n+1} = P(t + \Delta t)$, $R_n = R(t)$.

С учетом тождества коэффициент α определим как среднюю для выборки $\{x_n | x_n = (P_{n+1} - R_n)/(1 - P_n) \cdot \Delta_n\}$, где $n = \overline{1,N}$. Коэффициент γ определяется как средняя арифметическая для выборки $\{x_n | x_n = (P_n - R_n)/P_n \cdot \Delta_n\}$, $n = \overline{1,N}$. Действительно, в этом случае

$P(t+\Delta t)$ является частью $P(t)$ резервных средств, которые за время Δt стали использоваться, причем эта часть тем больше, чем больше Δt.

Изменение $\Delta P(t)$ можно записать следующим образом:

$$\Delta P(t) = P(t+\Delta t) - P(t) = \alpha(1-P(t))\Delta t - \gamma P(t)\Delta t\,. \qquad (1)$$

Используя предельный переход (при $\Delta t \to 0$), имеем

$$P'(t) + (\alpha+\gamma)P(t) - \alpha = 0\,. \qquad (2)$$

Решение уравнения (2) при $P(t_0) = P_0$ будет:

$$P(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}) \cdot e^{(\alpha+\gamma)\cdot(t_0-t)}\,. \qquad (3)$$

Выражение (3) определяет часть резервных денежных средств в момент времени *t*. Решение данного уравнения, как показано в [5] является устойчивым.

При описании коэффициентов α и γ нечеткими (треугольными) числами левая часть уравнения (3) задается парой чисел [$P^{(1)}$, $P^{(2)}$], соответствующих левой и правой границам коэффициентов α и γ. Для сравнения полученной оценки с допустимым уровнем можно использовать методику, разработанную в [6].

График функции $P(t)$ при выполнении неравенства $P_0 - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} < 0$ показан на рисунке 1, а при обратном соотношении ($P_0 - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} > 0$)- на рисунке 2.

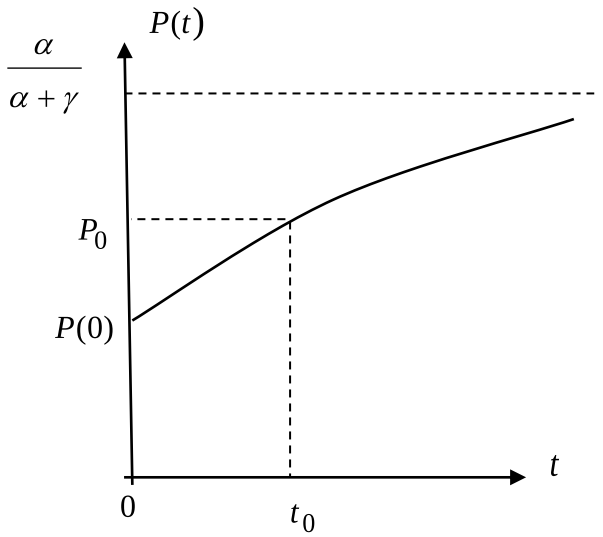

Рисунок 1. Возрастающая выпуклая вверх функция

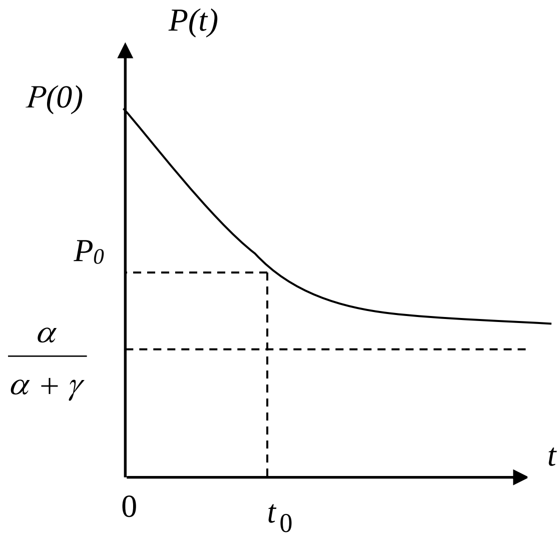

Рисунок 2. Убывающая выпуклая вниз функция

Имеют место следующие предельные переходы:

$P(t) \to \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma} + (P_0 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}) \cdot e^{(\alpha+\gamma)\cdot t_0}$ при $t \to 0$ и $P(t) \to P_0$ при $t \to t_0$.

Неравенство $P(t_0) < \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$ определяет предельную границу уменьшения резервной доли денежных средств $P(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$. При выполнении условия $P(t_0) > \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$ эта граница соответствует увеличению резервных средств.

2. Построение разностной модели резерва денежных средств

Во многих практических ситуациях можно рассматривать изменение резервных средств в дискретные моменты времени, отличающиеся друг от друга на постоянный временной интервал Δt. Пусть $t_{n+1} = t_n + \Delta t,\ \ P(n) = P(t_n), n = 0,2,\ldots,k.$

В этом случае можно использовать разностные модели, построенные в [1] для управления налоговыми платежами и в [5] для оценки качества обучения:

$$\Delta P(t_n) = P(t_n + \Delta t) - P(t_n) = \alpha(1 - P(t_n)) - \gamma P(t_n).$$

Решение разностного уравнения, аналогичное решению (3), будет иметь вид:

$$P(n) = \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + (P_0 - \frac{\alpha}{\alpha+\gamma}) \cdot (1 - (\alpha+\gamma))^{n-n_0}, \qquad (4)$$

где n_0 - начальное значение аргумента и $P(n_0) = P_0$.

Возможны следующие случаи соотношения параметров данного уравнения:

1) $\alpha + \gamma > 1,\ \ P_0 > \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$. В этом случае график функции $P(n)$ имеет колебательный характер вокруг оси $\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$ (вначале функция убывающая). При выполнении условия $(\alpha+\gamma) - 1 < 1$ - это затухающий процесс колебаний (рисунок 3), а при $(\alpha+\gamma) - 1 > 1$ возрастающий процесс. Таким образом, на рисунке 3 показана стабилизация доли резервных денежных средств около значения $\dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$.

2) $\alpha + \gamma > 0$, $P_0 < \dfrac{\alpha}{\alpha+\gamma}$, $P(n)$ (вначале функция возрастающая). График функции $P(n)$ также имеет колебательный характер (рисунок 4).

3) В случае $\alpha+\gamma=0$ зависимость $P(n)$ от $\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}$ линейная.

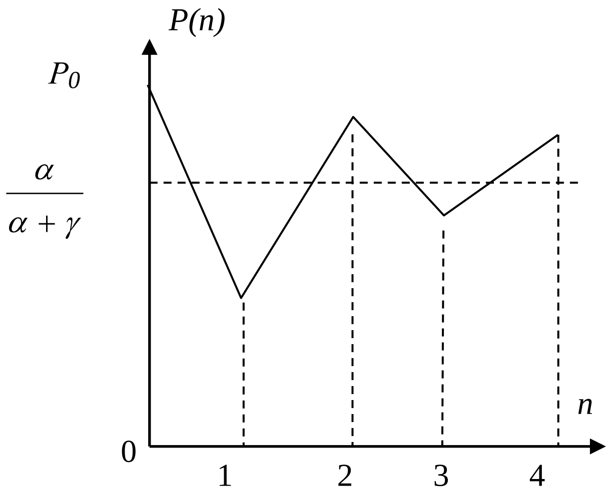

Рисунок 3. Колебательный процесс (Вначале функция убывающая).

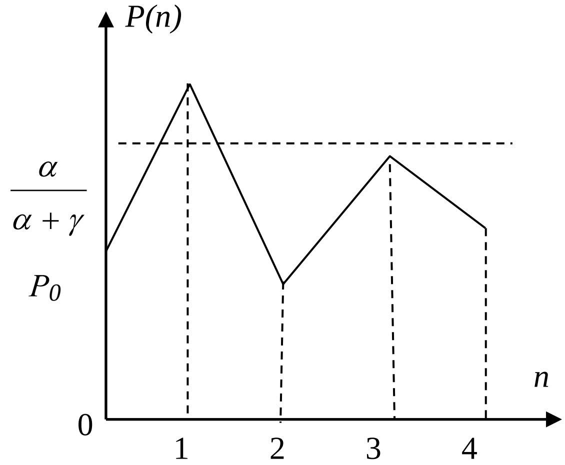

Рисунок 4. Колебательный процесс (Вначале функция возрастающая).

4) $\alpha+\gamma<1$, $P_0<\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}$ $(P_0>\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})$. В этом случае $P(n)$ возрастает (убывает), приближаясь снизу (рисунок 5) и сверху (рисунок 6) к линии $P(n)=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}$

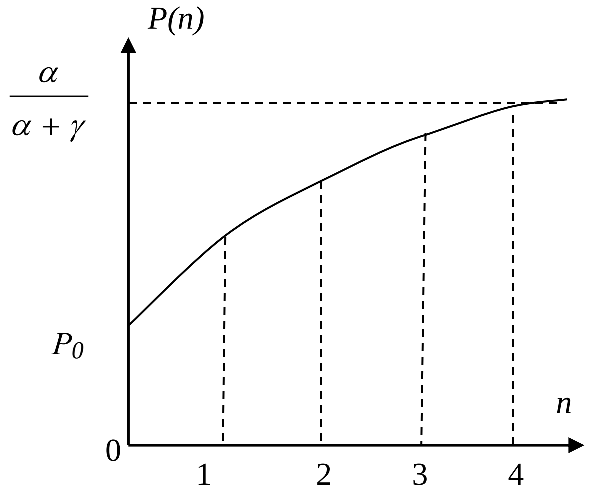

Рисунок 5. Увеличение отчислений в резерв

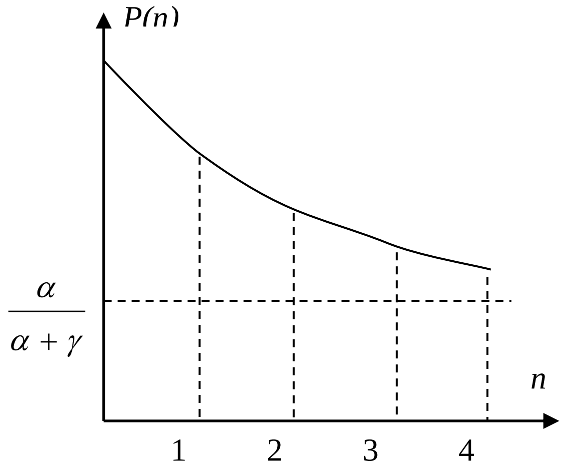

Рисунок 6. Снижение отчислений в резерв

3. Оптимальное планирование резерва

Одной из важных задач при планировании является определение времени t, при котором резерв достигает заданного уровня $P(t)=P$. Это время для непрерывного случая определяется из уравнения (3):

$$t=\frac{1}{\alpha+\gamma}\cdot\ln[(P_0-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\cdot e^{(\alpha+\gamma)t_0}\Big/(P-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})]. \quad (5)$$

Для дискретного случая равенство (5) при α+γ<1 запишется следующим образом:

$$n=\left\lfloor n_0+\ln[(P(n)-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\Big/(P_0-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})]\Big/\ln(1-(\alpha+\gamma)\right\rfloor, \quad (6)$$

где $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа *x*.

Другой важной задачей является определение резервной части P_0 в начальный момент времени для данного уровня P. Эта задача также может быть решена с использованием уравнения (4):

$$P_0=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+(P-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\cdot e^{(\alpha+\gamma)\cdot(t-t_0)}. \quad (7)$$

Аналогично для дискретного случая имеем

$$P_0=\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}+(P_0-\frac{\alpha}{\alpha+\gamma})\cdot(1-(\alpha+\gamma))^{n_0-n}. \quad (8)$$

Из формул (5) и (7) следует, что резервную долю $P(t)=P$ можно изменить, меняя момент времени или корректируя P_0. Аналогичные выводы следуют из формул (6) и (8) для дискретного случая.

Итак, на основе формул (5) и (7) ((6) и (8)) можно управлять резервной долей $P(t)$.

Управление резервными средствами можно рассматривать как эффективное и неэффективное. В качестве меры эффективности можно рассматривать отношение полученного значения *P(t)* к планируемому или оптимальному в данных условиях для каждого момента времени. Если оно близко к 1, то имеет место эффективное управление резервом. Чем меньше указанное отношение, тем неэффективнее управление.

Для процесса управления в нечетких условиях можно определить понятие оценки риска неэффективности управления аналогично оценке риска неэффективности управления учебным процессом [2]. Для этого проверяется условие $P(t)\geq G$, где $P(t)=[P_1(t), P_2(t)]$, $P_1(t)$-левая граница, $P_2(t)$-правая граница, $G=[G_1,G_2]$, G_1-левая граница, G_2-правая граница треугольных чисел. Для разных соотношений $P_1(t)$, $P_2(t)$, G_1,G_2 находится площадь зоны неэффективности. Для заданного уровня принадлежности определяется степень неэффективности через геометрическую вероятность с последующим нахождением интеграла от $P(t)$ на интервале изменения уровня принадлежности.

4. Моделирование составляющих резерва

Рассматривается денежная сумма $M(t)$ для n-го интервала времени $\Delta_n = [t_n, t_{n+1}]$ $\left(n = \overline{1,N},\ N - \text{количество промежутков}\right)$. В общем случае она представляет собой взвешенную сумму вида

$$M(t) = \sum_{i=1}^{k} C_i n_i(t),$$

где k-количество составляющих денежной суммы, C_i-приведенные веса, $n_i(t_n)$- денежный ресурс i-ой составляющей на момент времени t, представленной в целых единицах. Весовые коэффициенты C_i определяются на основе опроса экспертов. Так, при планировании суммы $M(t)$ семейного бюджета, например, на месяц, составляющими резерва являются составляющие денежные средства потребительской корзины, оставленные в резерве.

Пусть $m_i(t)$- резервная часть денежной суммы i-ой составляющей на момент времени t, (в целых единицах). Общая доля резерва $P(t)$ в момент t можно рассчитать по формуле:

$$P(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i m_i(t)/M(t).$$

Для момента времени t имеем оптимизационную задачу максимизации целевой функции $L = \sum_{i=1}^{k} c_i m_i(t)$ при целых положительных значениях $m_i(t)$ и ограничениях $M(t) - \sum_{i=1}^{k} c_i m_i(t) \geq 0$. Задача заключается в отыскании целых положительных значений $m_i(t)$, которые дают минимум разности между значениями $M(t)$ и $M(t)\,P(t)$. Это задача целочисленного программирования. Так определяется долевое участие различных составляющих денежной суммы в любой момент времени в задаче максимизации резерва.

Заключение. Разработанная модель позволяет осуществлять оптимальное управление резервными средствами. Полученные результаты могут найти широкое применение в технике, экономике, экологии, военном деле, социальной сфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ганичева А.В. Модель мобилизации налоговых платежей // Бизнес. Образование. Право, 2018. – № 2 (43). – С. 98-104.
2. Овсянникова Н.И. Оптимальное управление процессом распространения эпидемии в неоднородном сообществе // Межвузовская научно-практическая конференция, посвященная 300-летнему юбилею Леонарда Эйлера: Сборник науч. статей. – Тверь: ТвГУ, 2007. –С. 51-65.
3. Ганичева А.В. Математическая модель планирования мероприятий // В мире научных открытий. Сер. Экономика и инновационное образование, 2011. – №6(18). – С.254-260,
4. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов. – М.: Логос, 2001. – 296 с.
5. Ганичева А.В. Математическая модель оценки качества обучения // В мире научных открытий, 2015. – № 6.1 (66). – С. 313-326.
6. Ганичева А.В. Математическая модель оптимального управления резервными средствами в учебном процессе // В мире научных открытий, – 2015. – № 12-3 (72). – С. 953-964.

A. V. Ganicheva

MATHEMATICAL MODEL OF CREATION OF THE RESERVE OF MONEY

Tver State Agricultural Academy, Tver, Russia

The relevance of the study is due to the need for rational management of funds, as an organization (enterprise), and various communities, individual entrepreneurs, family budget and individual. The article developed a new method for assessing the optimal management of cash reserves. For continuous and discrete cases, the mathematical models based on the device of the linear differential and differential equations are constructed. The change of reserve as a function of time is shown. Options of assessment of parameters are offered under accurate and indistinct conditions. The conditions for optimal management of reserve funds, as well as the solution of the problems of determining the time for this level of reserve and the initial value of the reserve at a given forecast level are formulated. The effective and inefficient management of funds under clear and unclear conditions is defined. The analysis of the dependence of reserve funds on the values of the parameters of the equations describing the process of reserve formation is carried out. The model of components of a reserve is considered. The problem of their optimum combination when maximizing a reserve is solved. The methods of integer programming are used in the solution. The materials of the article are of practical value, as they can be used in technology, Economics, ecology, military Affairs, social sphere.

Keywords: system, asset, the reserve funds, the parameters of the equation, optimal control reserve.

REFERENCES

1. Ganicheva A.V. Model of mobilization of tax payments//Business. Education. Right, 2018. – No. 2 (43). – pp. 98-104.
2. Ovsyannikova N.I. Optimum control of process of distribution of epidemic in non-uniform community//the Interuniversity scientific and practical conference devoted to 300-year anniversary of Leonard Euler: Collection науч. articles. – Tver: TVER STATE UNIVERSITY, 2007. – pp. 51-65.
3. Ganicheva A.V. Mathematical model of planning of actions//In the world of discoveries. It is gray. Economy and innovative education, 2011. – No. 6(18). – pp. 254-260,
4. Plotinsky Yu.M. Models of social processes. – M.: Lagos, 2001. – 296 p.
5. Ganicheva A.V. Mathematical model of assessment of quality of training//In the world of discoveries, 2015. – No. 6.1 (66). – pp. 313-326.
6. Ganicheva A.V. Mathematical model of optimum control of reserve means in educational process//In the world of discoveries, – 2015. – No. 12-3 (72). – pp. 953-964.