УДК 519.53

А.В. Стариков, М.Л. Лапшина, С.В. Писарева,
А.А. Грибанов, А.Л. Бойкова

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ ДОХОДНОСТИ ПОСРЕДСТВОМ МОНОТОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г.Ф. Морозова, Воронеж, Россия
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

В работе описывается класс функций полезности (ФП), производная которых представима в виде преобразования Лапласа. Формулируются основные свойства для функций полезности, принадлежащих описываемому классу. Анализируется проблема стохастического доминирования, исследуются предельные свойства показателей абсолютной и относительной несклонности к риску. Целесообразность выделения ФП из всей совокупности обусловлена двумя соображениями. Во-первых, этот класс включает в себя практически все традиционно используемые при описании поведения инвесторов ФП. Во-вторых, каждая функция из L представима приближенно в виде суммы с положительными коэффициентами экспоненциальных ФП. Основное внимание в работе сосредоточено на двух аналитических методах. Первый - задача усиления и ослабления рисков, когда несклонному к риску инвестору приходится решить, что лучше: подвергнуть свой доход участию в двух рискованных проектах или вообще отказаться от риска, либо участвовать только в одном из проектов? Второй аспект освещает поведение показателей абсолютной и относительной несклонности к риску. В настоящей работе дается более полное интегральное представление функций, принадлежащих L, *и, систематическое описание класса; формулируется утверждение в терминах предпочтения лотерей, полностью характеризующая класс, также представлены основные математические понятия и свойства вполне монотонных функций, которые необходимы для формального описания и исследования вводимого класса, точное определение класса ФП, характеристику основных свойств и утверждение о необходимых и достаточных условиях принадлежности ФП изучаемому классу. В статье рассматривается вопрос стохастического доминирования на вводимом классе, приводятся соответствующие критерии доминирования. Полученные выводы используются далее в связи с задачей усиления или ослабления риска при одновременном воздействии независимых случайных факторов на доход инвестора. И, наконец, в работе представлен анализ асимптотических свойств показателей абсолютной и относительной несклонности к риску для функций полезности из введенного класса*

Ключевые слова: функция полезности, класс, риск, альтернатива, ценные бумаги, предпочтения.

ВВЕДЕНИЕ

Современные экономико-математические модели основываются на аксиоматических предпосылках о поведении индивидуальных инвесторов при совершении операций на финансовых рынках. Их поведение описывается в простейших ситуациях максимизацией ожидаемого значения ФП дохода. В большинстве случаев представительный инвестор считается несклонным к риску, что соответствует вогнутости индивидуальной ФП. Решения, принимаемые инвестором, в первую очередь определяются его отношением как к самому доходу, так и сопряженному с ним риску и, следовательно, конкретными свойствами ФП.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проанализируем необходимые свойства класса функций, заданных на $[0,\infty)$ и названных С.Н. Бернштейном вполне монотонными. Предложенный анализ базируется на результатах, приведенных в [1, 2].

Определение 1. Функцию $\varphi(w), w>0$, назовем вполне монотонной, если имеет производные всех порядков и $(-1)^n \varphi^{(n)}(w) \geq 0 \ \forall\, w>0$.

При $w \to 0, \varphi^{(n)}(w)$ может иметь конечный или бесконечный предел. Будем считать, что $\varphi(w)=c>0 \ \forall w \geq 0$ также является вполне монотонной. Наиболее существенна для дальнейшего возможность представления вполне монотонных функций в виде преобразования Лапласа некоторой меры на $[0,\ \infty)$. Это следует из утверждения, принадлежащего С.Н. Бернштейну.

Утверждение 1. Функция $\varphi(w)$ на $[0,\ \infty)$ - вполне монотонная тогда и только тогда, когда она представима в виде

$$\varphi(\omega)=\int_0^\infty e^{-sw}U(ds),\ w>0,$$

где U - *(*может быть, бесконечная) мера на $[0,\ \infty)$.

В дальнейшем будем интерпретировать меру *U* в терминах "функции распределения" $F(s)=U\{0,s\}$, допуская, что $F(s)$ может быть и неограниченной на бесконечности, но конечной при каждом $s>0$. При наличии атома у меры *U* в нуле или при $F(0)>0$ соответствующая $\varphi(w)$ будет иметь предел при $w\to\infty$, больший нуля. Перечислим необходимые свойства вполне монотонных функций. Основные формулировки и доказательства приведены в [3].

Свойство 1. $\varphi(w)$ интегрируема на $[0,\ 1]$ и $[1,\infty]$ тогда и только тогда, когда функция $1/s$ интегрируема относительно функции распределения $F(s)$ на $[1,\ \infty]$ и $[0,\ 1]$ соответственно.

Свойство 2. Если $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$ вполне монотонны, то этим же свойством обладают $\varphi_1+\varphi_2$ и $\varphi_1(w)\varphi_2(w)$. Первое получается формальным сложением мер, второе доказывается по индукции последовательным дифференцированием.

Свойство 3. Пусть для любой вполне монотонной $\varphi(w)$ сложная функция $\varphi(\psi(w))$ также вполне монотонна. Необходимое и достаточное условие справедливости включения состоит в том, что $\psi(w)$ - положительная функция с вполне монотонной производной. Достаточность следует из второй части свойства 2. Для доказательства необходимости положим $\varphi(w)=e^{-\alpha\psi(w)}$, где α - произвольный параметр. Последовательно дифференцируя $e^{-\alpha\psi(w)}$ по w и устремляя α к нулю, показываем смену знаков у производных сложной функции.

Свойство 4. Если $\varphi(w)$ вполне монотонная и не постоянная, то квадратичная форма $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(w_i+w_j)\xi_i\xi_j$ положительно определена для всех натуральных n и наборов положительных чисел $(w_1...,w_n)$ и легко проверяется подстановкой в квадратичную форму интегрального представления $\varphi(w)$.

Свойство 5. Вполне монотонные функции логарифмически выпуклые, т.е. $\ln\varphi(w)$ - выпуклая функция. Это непосредственно следует из свойства 4. Достаточно положить $n=2$ и применить критерий положительности квадратичной формы.

Свойство 6. При любых неотрицательных целях n и $h>0$ для вполне монотонной $\varphi(w)$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k\varphi(w+kh)>0, \quad w>0 \tag{1}$$

Если для произвольной $\varphi(w)$, заданной на $(0,\ \infty)$, функции выполнены (1), то $\varphi(w)$ вполне монотонна. В [3] указанное свойство доказывается для абсолютно монотонных функций, определенных на $(-\infty,\ 0]$, а в [2] - на [0, 1]. Неотрицательная функция называется абсолютно монотонной, если все ее производные существуют и неотрицательны. В первом случае вполне монотонные функции получаются из абсолютно монотонных сменой знака у аргумента; во втором - путем замены переменной $x=e^{-z}$. Точнее, если $\varphi(x)$ - абсолютно монотонная функция на отрезке $[0,1]$, то $\tilde{\varphi}(z)=\varphi(e^{-z})$ вполне монотонная на $(0,\ \infty)$[4, 5]. Неравенства (1) удобно записывать в терминах конечных разностей. Определим для $h>0$ оператор

$\Delta_h\varphi(w) = \varphi(w+h) - \varphi(w)$ и введем обозначения

$$\Delta_h^0\varphi(w) = \varphi(w), \Delta_h^{h+1} = \Delta_h\Delta_h^n, \Delta_h^1 = \Delta_h.$$

Тогда несложно показать по индукции, что (1) эквивалентны неравенствам $(-1)^n\Delta_h^n\varphi(w) \geq 0, \quad n \geq 0, \quad h \geq 0, \quad w \geq 0.$ Класс L- совокупность положительных на $(0, \infty),$ функций $U(w)$, производная которых - вполне монотонная функция, и $U(0) = 0.$ Описание класса L дает принадлежащее Шенбергу [3] следующее утверждение.

Утверждение 2. $U(w)$ принадлежит L тогда и только тогда, когда $U(w)$ представима в виде

$$U(w) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-sw}}{s} dF(s) \text{ и } \int_1^\infty \frac{dF(s)}{s} < \infty$$

Кроме перечисленных утверждений о вполне монотонных функциях в дальнейшем нам потребуются два утверждения.

Лемма 1. Пусть для неотрицательной функции $U(w)$, $w \in [0, \infty]$, для всех целых неотрицательных n и всех $h > 0$ выполнены неравенства $(-1)^n \Delta_h^{n+1} U(w) \geq 0, \quad U(0) = 0$ и $\varphi_a(w) = U(w+a) - U(w).$ Тогда для любого $a > 0$: $(-1)^n \Delta_h^n \varphi_a(w) \geq 0.$

Лемма 2. Пусть $U(0) = 0, U(w) > 0$ при $w > 0$. $U(w)$ принадлежит классу L тогда и только тогда, когда для любого $h > 0$ $\varphi_h(w) = U(w+h) - U(w)$ - вполне монотонная функция по w и $\varphi_h(0) < \infty$. Опишем класс L функций полезности. Будем рассматривать неубывающие ФП дохода w, равные нулю при $w = 0$. Определим класс L как совокупность ФП, имеющих вполне монотонную производную. Из предыдущего раздела следует, что любая $U(w) \in L$ имеет интегральное представление $U(w) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-sw}}{s} dF(s)$, где $F(s)$ - некоторая функция распределения и $\int_1^\infty \frac{dF(s)}{s} < \infty$. ФП $U(w) \in L$ можно рассматривать как агрегат элементарных ФП $\frac{1-e^{-sw}}{s}$ с одинаковой предельной полезностью в 0, в котором параметризация осуществляется по показателю несклонности к риску s. Функция распределения $F(s)$ задает веса, с которыми элементарные функции входят в агрегированную ФП. Свойства функции распределения или соответственно веса при параметризации определяют и свойства агрегированной ФП. Если $\int_1^\infty \frac{dF(s)}{s} < \infty$, то $U(w)$ имеет конечный предел при $w \to \infty$. Поскольку предельная полезность $U(w)$ - преобразование Лапласа меры $F(s)$, конечность меры влечет за собой существование и конечность предельной полезности в нуле. Существование производных более высокого порядка у ФП в нуле определяется моментами функции распределения: если $\int_0^\infty s^n dF(s) < \infty, \quad n \ge 0,$ то производная $(n+1)$-го порядка $U^{(n+1)}(0)$ определена и конечна [6]. Согласно свойству 2 и 3, класс L замкнут относительно операций суперпозиции: если $U_1(w)$ и $U_2(w)$ принадлежат L, то $U_1(U_2(w)) \in L$. Действительно, если

$$U(w) = U_1(U_2(w)), \text{ то } \quad U'(w) = U_2'(w) U_2(w).$$

Суперпозиция вполне монотонной функции и функции из класса L также вполне монотонна, и то же самое можно утверждать о произведении производных. Полная характеризация ФП из класса L возможна в терминах предпочтений на лотереях. Рассмотрим две последовательности лотерей, конструируемых следующим образом. Правильная монета бросается n раз. Лотерея $L_n^e(h)$ называется четной, если выигрыш участника равен kh, где k, $0 \le k \le n$,- число выпадения орлов при четном k и 0 - в противоположном случае. Аналогично лотерея $L_n^e(h)$ называется нечетной, если участник получает сумму kh только при нечетном k и 0 при четном. Класс L характеризует следующее утверждение [7, 8].

Утверждение 2.1. ФП $U(w)$ принадлежит классу L тогда и только тогда, когда при всех $w \ge 0,\ h > 0$ и натуральных n нечетная лотерея предпочтительнее четной по критерию ожидаемой полезности, т.е.

$$E_{L_n^0} U(kh+w) \ge E_{L_n^e} U(kh+w) \tag{2}$$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, проиллюстрируем ее условия на конкретных значениях n. Для $n=1$ выигрыш в четной лотерее равен нулю с вероятностью единица, а в нечетной - с вероятностью $\frac{1}{2}$. Предпочтительность нечетной лотереи приводит к неравенству $\frac{1}{2}U(w+h) + \frac{1}{2}U(w) \ge U(w)$, что равносильно монотонности

$U(w)$. При $n=2$ четная лотерея дает выигрыш $2h$ с вероятностью $\frac{1}{4}$, а нечетная - h с вероятностью $\frac{1}{2}$ и (2) принимает вид

$$\frac{3}{4}U(w)+\frac{3}{8}U(w+2h)\le\frac{1}{2}U(w)+\frac{3}{8}U(w+h)+\frac{1}{8}U(w+3h),$$

из чего следует вогнутость функции полезности. И, при $n=3$ (2) принимает вид

$$\frac{5}{8}U(w)+\frac{3}{8}U(w+2h)\le\frac{1}{2}U(w)+\frac{3}{8}U(w+h)+\frac{1}{8}U(w+3h)$$

или

$$U(w)+3U\left(w+2h\right)\le 3U\left(w+h\right)+U\left(w+3h\right),$$

что влечет за собой выпуклость предельной полезности или положительность так называемого показателя благоразумия, равного отношению третьей производной ФК ко второй, взятому со знаком минус.

Доказательство. Запишем условия утверждения в виде неравенств, опуская множитель

$$U(w)\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{2k-1}+\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{2k-1}U\left(w+2kn\right)\le U(w)\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{2k}+\sum_{k=1}^{m}C_{2m}^{2k-1}U[w+\left(2k-1\right)h],$$

$n=2m,$

$$U(w)\sum_{k=1}^{m}C_{2m+1}^{2k+1}+\sum_{k=0}^{m}C_{2m+1}^{2k}U[w+2kn]\le U(w)\sum_{k=0}^{m}C_{2m+1}^{2k}+\sum_{k=1}^{m+1}C_{2m+1}^{2k-1}U[w+\left(2k-1\right)h],$$

$n=2m+1.$

Первые слагаемые в обеих частях неравенства соответствуют суммированию по всем неблагоприятным исходам в лотереях. Для лотереи L_n^e такими являются исходы с нечетным числом выпадения орлов, для L_n^0 - с четным. Суммарные вероятности этих исходов для обоих типов лотерей совпадают и соответствующие слагаемые могут быть опущены. Тогда неравенства (2) для произвольного $n\ge 1$ представимы в виде $\sum_{k=o}^{m}(-1)^{k-1}C_n^kU[2+kh]\ge 0$ или, используя разностный оператор Δ_h,

$$(-1)^{n-1}\Delta_h^nU(w)\ge 0 \qquad (3)$$

Теперь, для доказательства утверждения применим леммы 1 и 2. В силу леммы 1 из (3) следует, что $(-1)^{n-1}\Delta_h^{n-1}\varphi_a\left(w\right)\ge 0$, где $\varphi_a(w)=U(w+a)-U(w)$. Если $U(w)\in L$, то $\varphi_a\left(w\right)$ - вполне монотонная функция и по свойству 6 необходимые условия выполнены. Обратно. Пусть $(-1)^{n-1}\Delta_h^{n-1}\varphi_a\left(w\right)\ge 0 \quad \forall a$ и $w>0$ и $n\ge 1$. Тогда $\varphi_a\left(w\right)$ - вполне моно-тонная при любом $a>0$ и, по лемме 2, $U(w)$ принадлежит классу L. Отметим, что лотереи L_n^e и L_n^0

"трудно различимы", поскольку все первые $n-1$ моменты у них совпадают. При четном *n* момент *n* лотереи L_n^e и все последующие будут больше, чем соответствующие моменты лотереи L_n^0. При нечетном *n* ситуация противоположная, однако нечетная лотерея L_n^0 оказывается предпочтительнее четной лотереи L_n^e. Рассмотрим возможность применения стохастического доминирования в классе *L*. В теории оптимального выбора портфеля ценных бумаг существенную роль играет понятие стохастического доминирования. Напомним общепринятое определение. Пусть *M* - некоторое множество ФП и ξ_1 и ξ_2 - две произвольные неотрицательные случайные величины, из которых первая стохастически доминирует $\xi_2, \xi_1 > \xi_2$ если для любых $U(x) \in M$ выполнено неравенство

$$EU(\xi_1) > EU(\xi_2) \tag{4}$$

Лемма 3. Случайная величина ξ_1 доминирует ξ_2 в классе *L* тогда и только тогда, когда для всех $s \geq 0$

$$\int_0^\infty e^{-sx} dF_1(x) \leq \int_0^\infty e^{-sx} dF_2(x) \tag{5}$$

где $F_i(x)$ - функция распределения ξ_i.

Критерий (5) доминирования в классе *L* можно представить в другой эквивалентной форме. Обозначим через $P_i(s)$ преобразование Лапласа функций $F_i(s)$. Тогда в силу (5) $\psi(s) = P_2(s) - P_1(s)$ - неотрицательная функция. Применим к ней снова преобразование Лапласа и получим

$$\int_0^\infty e^{-sz}\psi(s)ds = \int_0^\infty P_2(s)e^{-sz}ds - \int_0^\infty P_1(s)e^{-sz}ds = \int_0^\infty \frac{dF_2(x)}{x+z} - \int_0^\infty \frac{dF_1(x)}{x+z} = \bar{\psi}(z),$$

где $\bar{\psi}(z)$ как преобразование Лапласа неотрицательной функции положительна и вполне монотонна. Случайная величина ξ_1, с распределением $F_1(s)$ доминирует ξ_2 распределением $F_2(s)$ тогда и только тогда, когда для всех натуральных *n* и положительных *z* выполнены неравенства

$$\int_0^\infty \frac{dF_1(x)}{(x+z)^n} \leq \int_0^\infty \frac{dF_2(x)}{(x+z)^n}.$$

Однако в этом случае мы достигли бы только необходимости для стохастического доминирования. Критерий стохастического доминирования в терминах преобразования Лапласа (5) позволяет для класса *L* без труда исследовать феномен усиления или ослабления риска при сложении двух независимых случайных величин [9]. Содержательно это можно объяснить так. Пусть доход инвестора в следующий от момента принятия решения - случайная величина $\tilde{w}$ и он может в момент 0 участвовать в двух взаимно независимых и независимых от $\tilde{w}$ лотереях. Предположим, что ему предложены на выбор две альтернативы: A_1 - с вероятностью $\frac{1}{2}$ принять участие в одной из лотерей; A_2 - с вероятностью $\frac{1}{2}$ принять одновременно участие в обеих лотереях или с той же вероятностью вообще не принимать на себя никакого риска. Вопрос состоит в том, какая альтернатива лучше. Формально речь идет о сравнении двух величин

$$A_1 = \frac{1}{2}Eu(\tilde{w}+x)+\frac{1}{2}Eu(\tilde{w}+y) \text{ и } A_2 = \frac{1}{2}Eu(\tilde{w})+\frac{1}{2}Eu(\tilde{w}+x+y).$$

Рассмотрим сначала ситуацию, когда обе случайные величины неотрицательны. Тогда нетрудно убедиться, что для $U(w)\in L$ вторая величина всегда не больше первой.

Действительно, пусть $\omega_0(s), \omega_x(s), \quad \omega_y(s),$ - преобразования Лапласа случайных величин $\tilde{\omega}$, x и y соответственно. Первая альтернатива приводит к составной лотерее с преобразованием Лапласа $\omega_0(\omega_x+\omega_y)$, а вторая - к лотерее с преобразованием Лапласа $\omega_0(1+\omega_x\omega_y)\ge\omega_0(\omega_x+\omega_y)$, поскольку из условия положительности x и y имеем $\omega_x\le 1 \text{ и } \omega_y\le 1,$ $\omega_0(1+\omega_x\omega_y)\ge\omega_0(\omega_x+\omega_y)\forall s\ge 0$. Следовательно, A_2 всегда не больше A_1 когда $U(w)\in L$. Совместно с неотрицательными рисками, т.е. неотрицательными случайными величинами x и y, часто рассматриваются так называемые нежелательные риски. Будем называть нежелательным риском случайную величину x с неположительным средним. С целью избежать ненужных сложностей также предположим, что x ограничена снизу с вероятностью единица. Определим преобразования Лапласа случайной величины x с распределением $F(x)$ как $\omega_x(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-sx}dF(x)$ при $s\ge 0$. Поскольку $\omega_X(0)=1$ и $\omega_x'(0)=-\int_{-\infty}^{\infty}xdF(x)\ge 0$ по предположению и $\omega_x'(s)\ge 0 \ \forall s>0$, $\omega_x(s)$ выпуклая функция на $[0,\infty)$ с минимумом в нуле. Обратимся снова к задаче о выборе из двух альтернатив. Если обе случайные величины x и y - независимые нежелательные риски, т.е. $Ex\le 0 \text{ и } Ey\le 0,$ то $(1-\omega_x(s))(1-\omega_y(s))\ge 0$ и альтернатива A_1 предпочтительнее A_2, когда

$U(w) \in L$. Если же x - неотрицательная случайная величина, а y - независимый от $\tilde{w}$ и нежелательный риск, то ситуация меняется на противоположную: альтернатива A_2 оказывается предпочтительнее A_1, поскольку $(1-\omega_x(s))(1-\omega_y(s)) \le 0$. Это представляется вполне естественным. При выборе альтернативы A_2 благоприятный риск x взаимодействует с нежелательным - y. Инвестору в этом случае лучше применять на себя оба риска одновременно, чем с равными вероятностями - один из них. Итог проведенных рассуждений подводит следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть ФП инвестора принадлежит классу L и $\tilde{w}$ - его случайный доход. Если x и y - не зависящие от $\tilde{w}$ и друг от друга, нежелательные риски, то A_1 предпочтительнее A_2. Если x - неотрицательный риск, а y - нежелательный, то A_2 предпочтительнее A_1. Мы предполагаем, что верно и обратное: описанное правило предпочтения альтернатив для всех $\tilde{w}$, *x и y* означает, что $U(w) \in L$. Но на настоящий момент строгое доказательство нам неизвестно. Остановимся на анализе поведения показателей абсолютной и относительной несклонности к риску

$$A(w) = -\frac{U''(w)}{U'(w)} \quad \text{и} \quad R(w) = -\frac{wU''(w)}{U'(w)}.$$

Для ФП из класса L. Во избежание ненужных усложнений будем предполагать, что $U'(0)$ и $U''(0)$ конечны. Первое условие соответствует ограниченности функции распределения $F(s)$, второе - существованию среднего $\int_0^\infty s dF(s)$. При этих предположениях $A(0) < \infty$ и $R(0) = 0$.

Заключение

В заключении остановимся на ряде вопросов, возникающих в связи с исследованием свойств класса L.

1. Наиболее важен, с нашей точки зрения, вопрос о структуре множества эффективных портфелей. К настоящему моменту нам известно полное описание множества для полных рынков с тремя состояниями. В общем случае проблема описания структуры множества эффективных портфелей связана с задачей интерполяции вполне монотонных функций.

2. Известно, что для произвольных полных рынков с безрисковым активом любой эффективный портфель - линейная комбинация некоторого рискованного портфеля с безрисковым только для ФП типа HARA, принадлежащих L. Позволяет ли ослабление ограничения на произвольность отдач и вероятностей событий расширить класс функций, для которых множество эффективных портфелей имеет аналогичную структуру?

3. Свойства ФП в существенной мере зависят от типа существующего распределения по параметру несклонности к риску. По всей видимости, можно получить дополнительные результаты, предполагая это распределение безграничноделимым. В этом случае показатель абсолютной несклонности к риску так же является вполне монотонной функцией. Это следует их хорошо известного факта в теории преобразований Лапласа. Существует ли связь между соответствующими распределениями?

4. В работе приведены критерии стохастического доминирования в классе L. Однако они недостаточно хорошо интерпретируемы экономически в противоположность критерию стохастического доминирования в классе всех вогнутых ФП. Представляется единственным вопрос о получении критерия в более конструктивной и содержательной форме.

5. При решении задачи отыскания оптимального портфеля обычно используются стандартные методы оптимизации. Известно, что при большой размерности задач время на поиск оптимума весьма значительно. Возможно, для ФП из класса L реализуемы вычислительные алгоритмы, использующие в явном виде их специфические свойства, которые позволят существенно сократить это время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hertel S. Space sweep solves intersection of two convex polyhedron elegantly / S. Hertel, K. Mehlhorn, J. Nievergeit - Acta Informatica, 21. - 1984. - p. 501-519.
2. Johnston J. Econometric Methods / J. Johnston, J. DiNardo - N.Y.: The Mcgraw-Hill Companies, Inc., - 1997. - 240 p.
3. Lee D.T. Geometric complexity of some location problems / D.T. N.Y Lee Wu // Algorithmica Y.F.: The Mcgraw-Hill Companies, Inc. - 1986. - p. 193-211.
4. Вилкас Й. Э. Решения: теория, информация, моделирование / Й. Э. Вилкас, Е.З. Майминас - М.: Радио и связь. - 1981.- 145 с.
5. Kimball M.S. Standard Risk Aversion / M.S. Kimball // Econometrica - 1993. V. 61. № 3. – p. 58-67.
6. Ingersoll J. Theory of Financial Decision Making / J. Ingersoll - Dotowa, NJ – 1987. - 89 p.
7. Lemareshal C. New Variants of Bundle Methods / C. Lemareshal, Yu. Nemirovskii, A. Nesterov // Mathematical Programming. Serios B. - 1995. - V 69. - №1. - p. 67-77.

8. Кузнецов В.В. Об устойчивости рыночного положения фирмы / В.В. Кузнецов // Экономика и математические методы – 2000. - №3. Т.36. – С. 136-139.
9. Лапшина М.Л. Использование имитационных моделей для описания динамики экономического развития предприятия / Лапшина М.Л., Петрова Ю.А.// Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7. № 10. - С. 165-167.

A.V. Starikov, M.L. Lapshina, S.V. Pisareva,
A.A. Gribanov, A.L. Boykova

INVESTIGATION OF THE FUNCTION OF INCOME RETENTION BY MEANS MONOTONE DERIVATIVE

Voronezh State Forestry University by F.G. Morozov, Voronezh, Russia
Voronezh State University, Voronezh, Russia

The paper describes a class of utility functions whose derivative is representable as a Laplace transform. The basic properties for the utility functions belonging to the described class are formulated. The problem of stochastic domination is analyzed, limiting properties of indices of absolute and relative risk aversion are investigated. The expediency of separating the utility function from the whole set is due to two considerations. First, this class includes almost all traditionally used in describing investors behavior of the utility function. Secondly, each function in L can be represented approximately as a sum with positive coefficients of exponential phase transitions. The main focus of the work is on two analytical methods. The first is the task of strengthening and mitigating risks, when a risk-averse investor has to decide what is best: to expose your income to participation in two risky projects, or to give up risk altogether, or to participate only in one of the projects? The second aspect highlights the behavior of absolute and relative risk aversion indicators. In this paper we give a more complete integral representation of functions belonging to L, and, a systematic description of the class; the statement is formulated in terms of lottery preference, fully characterizing the class, the basic mathematical concepts and properties of completely monotonic functions that are necessary for formal description and study of the introduced class, the precise definition of the class of the utility function, the characteristics of the basic properties and the statement of necessary and sufficient conditions for the function usefulness of the class being studied. In the article the question of stochastic domination on the introduced class is considered, corresponding criteria of domination are given. The findings are used further in connection with the task of strengthening or mitigating the risk with the simultaneous impact of independent random factors on the income of the investor. Finally, the paper presents an analysis of the asymptotic properties of the absolute and relative risk aversion indicators for utility functions from the introduced class

Keywords: utility function, class, risk, alternative, securities, preferences.

REFERENCES

1. Hertel S. Space sweep solves intersection of two convex polyhedron elegantly / S. Hertel, K. Mehlhorn, J. Nievergeit. - Acta Informatica, 21. - 1984. - pp. 501-519.
2. Johnston J. / J. Johnston, J. DiNardo Econometric Methods - N.Y.: The Mcgraw-Hill Companies, Inc., - 1997. - 240 p.
3. Lee D.T. Geometric complexity of some location problems / D.T. Lee, N.Y. Wu //Algorithmica Y.F.: The Mcgraw-Hill Companies, Inc. - 1986. - pp. 193-211.
4. Vilkas J.E. Solution: theory, information, modeling / J.E. Vilkas, E.Z. Maiminas - M .: Radio and Communication. - 1981.- 145 p.
5. Kimball M.S. Standard Risk Aversion / M.S. Kimball // Econometrica - 1993. Vol. 61. No. 3.
6. Ingersoll J. Theory of Financial Decision Making / J. Ingersoll. -Dotowa, NJ – 1987. - 89 p.
7. Lemareshal C., Nemirovskii Yu., Nesterov A. New Variants of Bundle Methods // Mathematical Programming. Serios B. - 1995. – Vol. 69. – No.1. - pp. 67-77.
8. Kuznetsov V.V., Firsakova V.V. On the stability of the market position of the firm // Economics and Mathematical Methods. - 2000. – No.3. Vol.36. – pp. 136-139.
9. Lapshina M.L. Use of simulation models to describe the dynamics of the economic development of the enterprise / Lapshina ML, Petrova Yu.A. // Bulletin of the Voronezh State Technical University. 2011. Vol. 7. No. 10. - pp. 165-167.