

УДК 519.67

А.А. Дубанов, М.Н. Билдушкина
**ПОСТРОЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В СИСТЕМЕ
КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ «MATHCAD»**

*Бурятский Институт Инфокоммуникаций Сибирского
Государственного Университета Телекоммуникация и Информатики*

В данной статье рассматриваются вопросы моделирования геодезических линий, применительно к задаче преследования. При прогнозировании траектории до предполагаемой точки нахождения объекта преследования предпочтительно использование геодезических линий. Для этого выбирается локальная динамическая система координат. Абсциссой данной системы координат является линия, принадлежащая горизонтальной плоскости проекций и соединяющая горизонтальные проекции преследуемой точки с преследующей точкой. При решении краевой задачи с заданными граничными условиями в виде координат точек использовался метод «стрельбы». Для этого из преследующей точки производится серия «выстрелов» в заданном диапазоне углов. По результатам серии «выстрелов» строится интерполирующая кривая, где аргументом является угол из заданного диапазона, а значением является минимальное расстояние до точки преследования от точек траектории. Далее, встроенными средствами систем компьютерной математики ищется такое значение угла, при котором минимальное расстояние до точки преследования от точек траектории равно нулю. В качестве программной среды, для наглядности, выбрана система компьютерной математики «MathCAD». Система «MathCAD» позволяет быстро и наглядно делать анимированные изображения, что позволило результаты работы программы разместить на канале «Youtube.com».

Ключевые слова: задача преследования, преследующий объект, объект преследования, горизонтальная проекция вектора скорости, уравнение поверхности, символы Кристоффеля, локальная система координат, краевые условия, метод стрельбы.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ранее, в статье [1], авторами производилось решение в системе «MathCAD» известной задачи преследования. Преследование производилось на пересеченной местности, уравнение поверхности которой задано в явном виде $z = f(x, y)$. При реализации данной задачи предлагалась модель, когда горизонтальная проекция вектора скорости преследующего объекта направлена на горизонтальную проекцию объекта преследования. Данное условие учитывается в системе уравнений (1)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dX_f}{dt} &= \frac{V_f \cdot (X_r - X_f)}{\sqrt{(X_r - X_f)^2 + (Y_r - Y_f)^2 + \left((X_r - X_f) \cdot \frac{\partial f(X_f, Y_f)}{\partial X_f} + (Y_r - Y_f) \cdot \frac{\partial f(X_f, Y_f)}{\partial Y_f} \right)^2}} \\ \frac{dY_f}{dt} &= \frac{V_f \cdot (Y_r - Y_f)}{\sqrt{(X_r - X_f)^2 + (Y_r - Y_f)^2 + \left((X_r - X_f) \cdot \frac{\partial f(X_f, Y_f)}{\partial X_f} + (Y_r - Y_f) \cdot \frac{\partial f(X_f, Y_f)}{\partial Y_f} \right)^2}} \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Где X_f, Y_f – горизонтальная проекция точек преследующего объекта, X_r, Y_r – горизонтальная проекция точек объекта преследования, V_f – модуль скорости преследующего объекта

В данной статье будет рассмотрена модель, где в определенный момент времени скорость преследующего объекта \vec{V}_r направлена по геодезической линии, соединяющей преследующий объект с преследуемым. В качестве примера, будет рассмотрена следующая поверхность $z = e^{-(x^2+y^2)}$. Нами она была выбрана в качестве модели «одинокой горы». Преследуемая точка будет двигаться по траектории, которая в проекции на плоскость XOY будет окружностью. Необходимо выполнить построение геодезической линии, соединяющей точку наблюдения с преследуемой точкой.

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ ПО ДВУМ ТОЧКАМ. РЕАЛИЗАЦИЯ В «МАТНСАД».

Будем считать, что по условиям задачи, у нас есть поверхность, заданная в виде $z = f(x, y)$. Нам выгоднее ее представить в параметрическом виде $\vec{R}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}$ для того, чтобы реализовать подходы, изложенные в трудах по дифференциальной геометрии [2], [3].

Координаты геодезической линии должны удовлетворять решению системы дифференциальных уравнений (2).

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 u}{ds^2} &= -\Gamma_{11}^1 \cdot \left(\frac{du}{ds} \right)^2 - 2\Gamma_{12}^1 \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} - \Gamma_{22}^1 \cdot \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \\ \frac{d^2 v}{ds^2} &= -\Gamma_{11}^2 \cdot \left(\frac{du}{ds} \right)^2 - 2\Gamma_{12}^2 \cdot \frac{du}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} - \Gamma_{22}^2 \cdot \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Где Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля второго рода, а s – параметр длины дуги. Мы считаем, что для решения наших задач, поставленных в этой

статье, более удобным является, когда параметр v является зависимым от параметра u (3).

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2) \cdot \frac{dv}{du} + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2) \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \Gamma_{11}^1 \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^3 \quad (3)$$

Вывод уравнения (2.2) был показан в источнике [4]. Нами представлен программный код [5], выполняющий построение геодезической линии на поверхности $z = e^{-(x^2+y^2)}$ из точки (-2;-0.5) в точку (2;-0.5) (Рисунок 1)

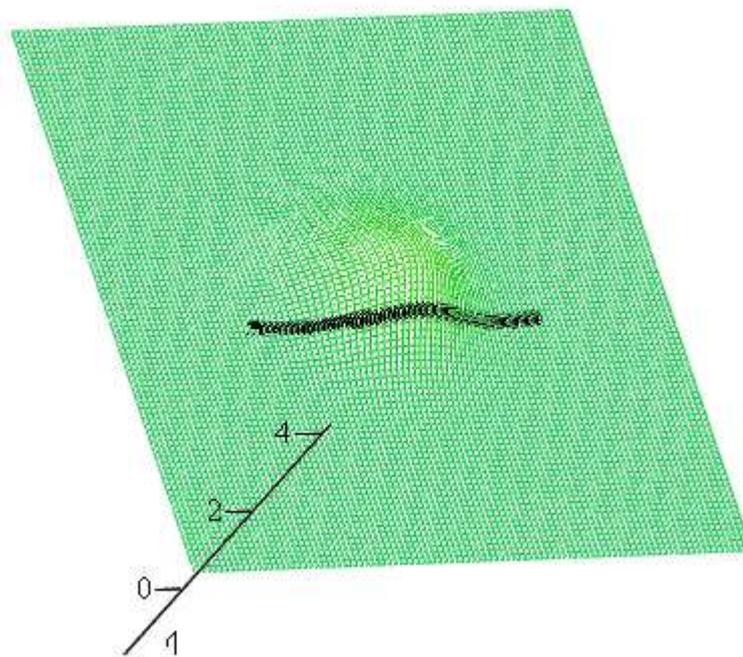


Рис. (U, V, Z)

Рисунок 1. Геодезическая по двум точкам. Краевая задача.

Данный программный код выполнен в системе компьютерной математики «MathCAD 11» доступен для просмотра на следующем ресурсе: [5]. При решении дифференциального уравнения (3) является важным наличие функциональной зависимости $v(u)$. Вероятность существования такой зависимости существенно повышает переход в локальную систему координат (Рисунок 2).

Предполагается, что в зависимости от значения угла φ , что является функцией времени, будет производиться переход в локальную систему координат \vec{H}_1, \vec{H}_2 , что означает перерасчет исходной поверхности

$\vec{R}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}$ и символов Кристоффеля (4) в новом динамическом базисе.

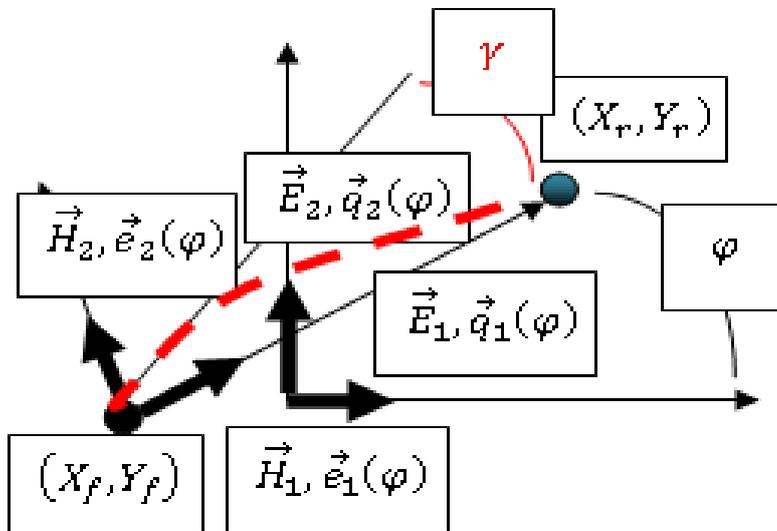


Рисунок 2. Преобразования координат

На рисунке 2 введены следующие обозначения: \vec{E}_1, \vec{E}_2 - базис плоскости (XOY) со значениями $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. \vec{H}_1, \vec{H}_2 - локальный базис. Зависимость от времени базиса \vec{H}_1, \vec{H}_2 выражается в угле наклона φ оси \vec{H}_1 к оси \vec{E}_1 . $\vec{q}_1(\varphi), \vec{q}_2(\varphi)$ - координаты базиса \vec{E}_1, \vec{E}_2 в базисе \vec{H}_1, \vec{H}_2 . А $\vec{e}_1(\varphi), \vec{e}_2(\varphi)$ - координаты базиса \vec{H}_1, \vec{H}_2 в базисе \vec{E}_1, \vec{E}_2 .

Для реализации поставленной задачи в системе «MathCAD» , мы взяли для примера простую поверхность $\vec{R}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ e^{-(u^2+v^2)} \end{bmatrix}$. Далее, мы вычислим коэффициенты первой квадратичной формы $g(u, v) = \begin{bmatrix} \vec{R}_u \cdot \vec{R}_u & \vec{R}_u \cdot \vec{R}_v \\ \vec{R}_u \cdot \vec{R}_v & \vec{R}_v \cdot \vec{R}_v \end{bmatrix}$ и сразу найдем инверсную ей матрицу $ig(u, v) = g(u, v)^{-1}$. Запись символов Кристоффеля второго рода (4) мы взяли из источника [4], как адаптированную для ввода в системы компьютерной математики.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} ig_{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} ig_{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \right) \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2} ig_{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} ig_{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v} \right) \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} ig_{11} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} ig_{12} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} i g_{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} i g_{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \right) \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} i g_{21} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} i g_{22} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v} \right) \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2} i g_{21} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right) + \frac{1}{2} i g_{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

Далее, мы приступим к решению краевой задачи. Для этого мы преобразуем дифференциальное уравнение второго порядка (3) в систему ОДУ первого порядка (5). Далее система уравнений (5) решается при помощи встроенной процедуры rkfixed системы «MathCAD»

$$\begin{cases} \frac{dY_0}{du} = Y_1 \\ \frac{dY_1}{du} = -\Gamma_{22}^2 + (\Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2) \cdot Y_1 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2) \cdot (Y_1)^2 + \Gamma_{11}^1 \cdot (Y_1)^3 \end{cases} \quad (5)$$

где $Y_0 = v, Y_1 = \frac{dv}{du}$.

При реализации метода «стрельбы» в системе «MathCAD», нами был задан диапазон углов $\alpha = \left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12} \right]$ с шагом $\Delta\alpha = \frac{\pi}{60}$. Для каждого значения α_i решается система уравнений (2.4) с начальными условиями $\begin{bmatrix} -2 \\ tg(\alpha_i) \end{bmatrix}$. В приведенном примере геодезическая линия строится от точки $(-2; -0.5)$ до точки $(2; -0.5)$. Посмотреть листинг решения данной задачи можно здесь [6]. Далее, при получении решения системы дифференциальных уравнений (5) на отрезке $u = [-2; 2]$, невязка для каждого значения α_i будет равна $\lambda_i = v|_{u=2} - v_0$, в данном примере $v_0 = -0.5$. На Рисунке 3 показана зависимость невязки λ_i от угла «стрельбы» α_i . К зависимости $\lambda(\alpha)$ можно применить различные методы интерполяции, в нашем примере была применена линейная интерполяция. Далее, для решения уравнения $\lambda(\alpha) = 0$ существует встроенная функция «MathCAD» root, которая ищет нули функции на заданном диапазоне. Полученное значение α дает направление геодезической линии от точки $(-2; -0.5)$ до точки $(2; -0.5)$.

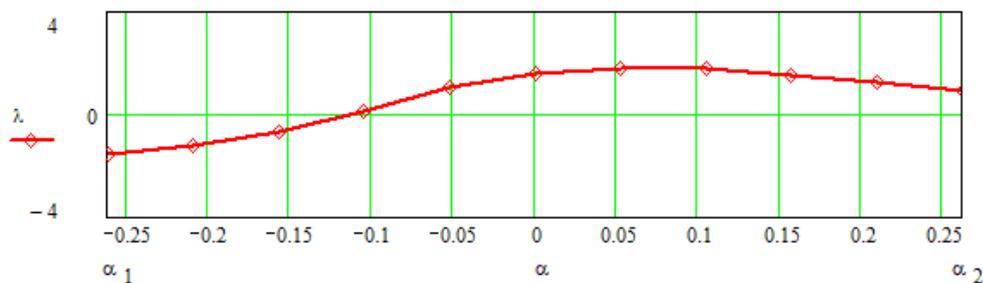


Рисунок 3. Зависимость невязки от угла "стрельбы"

На Рисунке 4 показана зависимость параметра v (ось ординат на рисунке) от параметра u (ось абсцисс).

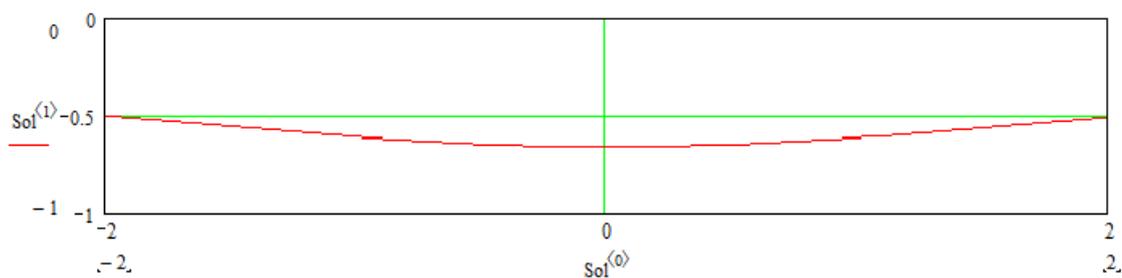


Рисунок 4. Зависимость v от u

На Рисунке 4 наглядно видно, при угле вычисленном угле «стрельбы» $\lambda(\alpha) = 0$, траектория геодезической линии выходит из точки $(-2; -0.5)$ и приходит в заданную точку $(2; -0.5)$.

Следует отметить то, что в системе компьютерной математики «MathCAD» существуют встроенные средства решения краевых задач, такие как процедура «sbval», вычислительный блок «Given - Odesolve», но в этих процедурах, так или иначе, неявно прописан известный алгоритм «стрельбы». При реализации встроенных процедур неизбежны трудности при локализации корней уравнения $\lambda(\alpha) = 0$, в случаях их множественности или их отсутствия. Поэтому, поиск нулей функции $\lambda(\alpha) = 0$ мы решили написать сами, во избежание прерывания вычислительного процесса. Далее, мы решили описать построение геодезической линии из определенной неподвижной точки к точке, движущейся по определенной траектории по заданной поверхности.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

Для решения данной задачи, для примера, мы сформировали отдельный программный код [6], где для решения дифференциальных уравнений будет использован вычислительный блок-системы «MathCAD» Given – Odesolve.

Как уже говорилось ранее, преследуемая точка движется по окружности в проекции на плоскость XOY : $\begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} + R \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}$. Обозначения в этой формуле имеют тот же смысл, что и на Рисунке 2. В листинге самой программы [6] были заданы значения $\begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$, $R = 4$. Далее, в системе координат \vec{H}_1, \vec{H}_2 (Рис. 2) будет произведен перерасчет исходной поверхности $\vec{R}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}$, коэффициентов первой квадратичной формы, символов Кристоффеля. Как несложно установить, все это будет зависеть от угла φ (Рис. 2). Также преобразуется в систему координат \vec{H}_1, \vec{H}_2 (Рис. 2) и дифференциальное уравнение второго порядка (2.2). Поскольку на основе его будет сформирован вычислительный блок Given – Odesolve. В сформированный вычислительный блок (Рисунок 5) вводятся следующие граничные условия: $v(0) = 0$ и $\frac{dv}{du}(0) = tg(\gamma)$. Где γ - угол наклона «стрельбы» в системе координат \vec{H}_1, \vec{H}_2 к оси \vec{H}_1 .

Given

$$\frac{d^2}{du_f^2} v_f(u_f) - \left[-G\phi_{222}(u_f, v_f(u_f), fi) + (G\phi_{122}(u_f, v_f(u_f), fi) - 2 \cdot G\phi_{212}(u_f, v_f(u_f), fi)) \cdot \left(\frac{d}{du_f} v_f(u_f) \right) \right] + (2 \cdot v_f(u_f) - G\phi_{111}(u_f, v_f(u_f), fi)) = 0$$

$$v_f(0) = 0 \quad v_f'(0) = \text{gamma} \quad v_{ff}(fi, \text{gamma}) := \text{Odesolve}(u_f, 4)$$

Рисунок 5. Вычислительный блок Given-Odesolve. Фрагмент листинга

Вычислительный блок Given – Odesolve позволяет сформировать функцию пользователя. В данном программном коде (Рисунок 5) нами была сформирована функция $v(\varphi, \gamma)$, где φ - угол между векторами \vec{H}_1 и

\vec{E}_1 , а γ - угол наклона «стрельбы» к оси \vec{H}_1 (Рис. 2) на отрезке $[0; 4]$ (условия поставленной нами задачи). В данном листинге программы переменная **gamma** имеет значение $tg(\gamma)$. Отметим следующее, вычислительный блок Given – Odesolve позволяет решить краевую задачу, если задать краевые условия $v(0) = 0$ и $v(4) = 0$, но при решении нашей задачи встроенный алгоритм решения проявил нестабильность при поиске решений уравнения (2.2), поэтому мы решили сами реализовать алгоритм «стрельбы». В программном коде реализовано для случая, когда объект преследования движется по сегменту окружности в проекции на горизонтальную плоскость $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ (Рисунок 6).

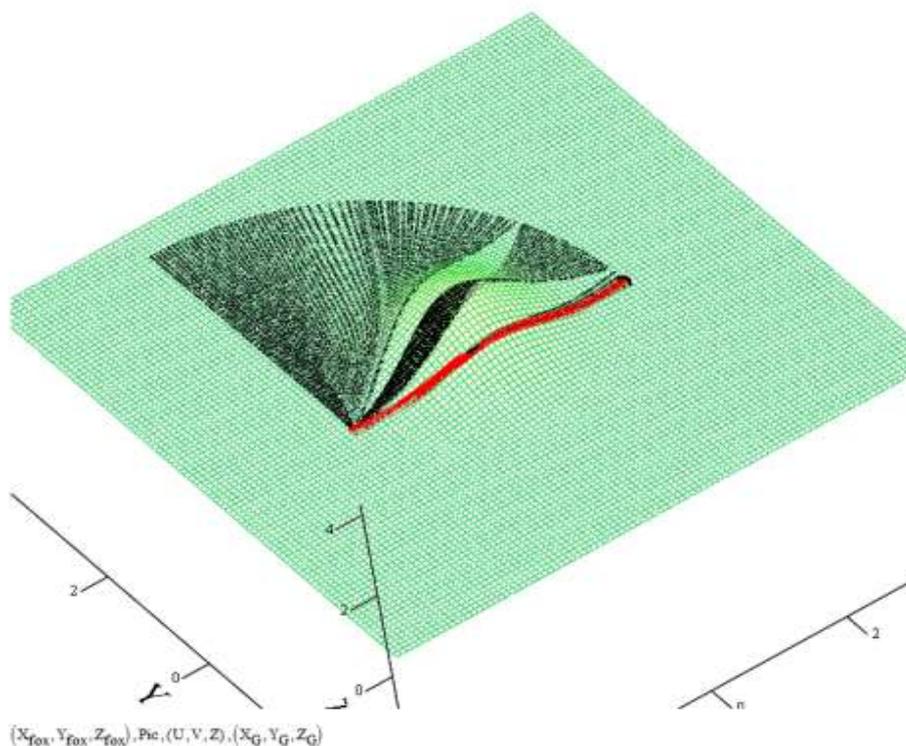


Рисунок 6. Преследуемый объект движется по окружности

Для каждого значения φ_i мы выпускаем серию «пристрелочных» выстрелов γ_j (в данном случае $\gamma \in [-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}]$) и в результате получаем для каждого значения φ_i массив невязок $\lambda_{i,j}$ (Рисунок 7) отклонения траектории геодезической от расчетной точки, соответствующей значению φ_i .

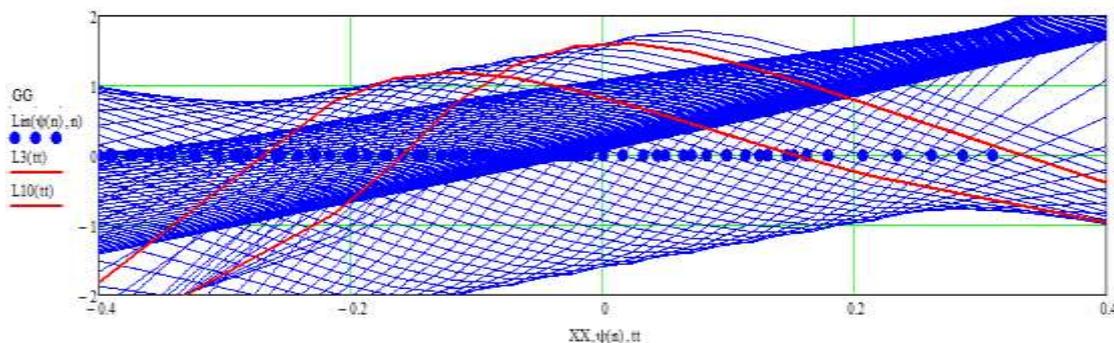


Рисунок 7. Массив невязок

Для каждого значения φ_i следует построить интерполирующую функцию, чтобы найти значение невязки $\lambda 0_i = 0$. В нашем программном коде мы применили линейную интерполяцию. На Рисунке 7 отмечены все точки $\lambda 0_i$, имеющие нулевую невязку. Результат моделирования можно посмотреть здесь [7], а также данная гиперссылка прикрепена к Рисунку 6.

ВЫВОДЫ

В данной статье выполнялось построение геодезических линий в локальной динамической системе координат. Результаты, изложенные в данной статье (методы, алгоритмы), можно использовать при проектировании робототехнических комплексов, которые в режиме реального времени производят преследование целей на поверхностях, заданных точечным базисом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубанов А.А., Эрдынеева Л. И. Задача преследования в системе вычислительной математики «MathCAD»/ Дубанов А.А. Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований, 2016, № 9, стр. 7-12
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии / Рашевский П.К. Государственное издательство технико-теоретической литературы, М. – Л., 1950 г., 428 с.
3. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия / Выгодский М.Я. Государственное издательство технико-теоретической литературы, М. – Л., 1949 г., 513 с.
4. Жукова Н.И., Багаев А.В. Геодезические линии на поверхностях. Учебно-методическое пособие. / Жукова Н.И., Багаев А.В.

Издательство Нижегородского госуниверситета, Н. Новгород, 2008 г., 54 с.

5. Дубанов А.А. Геодезические линии в задаче преследования. Геодезические/ Дубанов А.А. Сайт «Геометрическое моделирование в MathCAD» - URL : <http://dubanov.exponenta.ru>
6. Дубанов А.А. Геодезические линии в задаче преследования. Построение геодезической до бегущей точки. Использование блока «Given-Odesolve»/ Дубанов А.А. Сайт «Геометрическое моделирование в MathCAD» - URL : <http://dubanov.exponenta.ru>
7. Дубанов А.А. Геодезическая линия. Сайт <http://www.youtube.com>, URL : <https://www.youtube.com/watch?v=XIzV9kQdM-s>

A.A. Dubanov, M.N. Bildushkina

**CONSTRUCTION OF GEODESIC LINES APPLIED TO THE
PROBLEM OF PERSECUTION IN THE SYSTEM OF COMPUTER
MATHEMATICS «MATHCAD»**

*Buryat Institute of Infocommunications of the Siberian State University
Telecommunications and Informatics*

This article deals with the modeling of geodetic lines, with respect to the pursuit problem. When predicting the trajectory to the prospective location of the object of pursuit, it is preferable to use geodetic lines. For this, a local dynamic coordinate system is selected. The abscissa of a given coordinate system is a line belonging to the horizontal plane of projections and connecting the horizontal projections of the pursued point with the pursuing point. When solving a boundary problem with given boundary conditions in the form of the coordinates of points, the "shooting" method was used. To do this, a series of "shots" is produced from the haunting point in a given range of angles. Based on the results of a series of "shots", an interpolating curve is constructed, where the argument is the angle from the specified range, and the value is the minimum distance to the point of pursuit from the trajectory points. Further, by built-in means of computer mathematics systems, an angle is sought such that the minimum distance to the point of pursuit from the points of the trajectory is zero. As a programming environment, for clarity, the computer mathematics system "MathCAD" was chosen. The system "MathCAD" allows you to quickly and clearly make animated images, which allowed the results of the program to be placed on the channel "Youtube.com".

Keywords: pursuit problem, pursuit object, pursuit object, horizontal projection of the velocity vector, surface equation, Christoffel symbols, local coordinate system, boundary conditions, shooting method.

REFERENCES

1. Dubanov A.A., EHrdyneeva L. I. Zadacha presledovaniya v sisteme vychislitel'noj matematiki «MathCAD»/ Dubanov A.A. Mezhdunarodnyj zhurnal prikladnyh i fundamental'nyh issledovanij, 2016, № 9, str. 7-12
2. Rashevskij P.K. Kurs differencial'noj geometrii / Rashevskij P.K. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, M. – L., 1950 g., 428 s.
3. Vygodskij M.YA. Differencial'naya geometriya / Vygodskij M.YA. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, M. – L., 1949 g., 513 s.
4. ZHukova N.I., Bagaev A.V. Geodezicheskie linii na poverhnostyah. Uchebno-metodicheskoe posobie. / ZHukova N.I., Bagaev A.V. Izdatel'stvo Nizhegorodskogo gosuniversiteta, N. Novgorod, 2008 g., 54 s.
5. Dubanov A.A. Geodezicheskie linii v zadache presledovaniya. Geodezicheskie/ Dubanov A.A. Sajt «Geometricheskoe modelirovanie v MathCAD» - URL : <http://dubanov.exponenta.ru>
6. Dubanov A.A. Geodezicheskie linii v zadache presledovaniya. Postroenie geodezicheskoy do begushchej tochki. Ispol'zvanie bloka «Given-Odesolve»/ Dubanov A.A. Sajt «Geometricheskoe modelirovanie v MathCAD» - URL : <http://dubanov.exponenta.ru>
7. Dubanov A.A. Geodezicheskaya liniya. Sajt <http://www.youtube.com>, URL : <https://www.youtube.com/watch?v=XIzV9kQdM-s>