УДК 531.391 doi: 10.26102/2310-6018/2018.23.4.010

О. В. Любимцев[1], О. Л. Любимцева[2]

БИФУРКАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ С УДАРАМИ ДВУХМАССОВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

[1]ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», г. Нижний Новгород, Россия
[2] ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет», г. Нижний Новгород, Россия

Проблемы динамики и устойчивости виброударных систем сегодня составляет самостоятельный раздел прикладной теории колебаний. Интерес к этим проблемам обусловлен в первую очередь широким использованием в практике машин и технологий, использующих систематические ударные взаимодействия в качестве основы рабочих процессов. Вибромолоты, виброударный инструмент, демпферы ударного действия, дисковые тормоза, машины для виброударных испытаний, устройства вибротранспорта штучных и массовых грузов, вибросепарации, объемной виброобработки – вот далеко не полный перечень, который дает представление о многообразии технологических использований виброударных систем и о круге вопросов, требующих применения теории этих систем. Виброударные системы по сравнению с обычными колебательными системами имеют дополнительные параметры, характеризующие для одномерных систем зазоры в ударных парах и коэффициенты восстановления скорости при ударе. Ранее одним из авторов были найдены условия существования и устойчивости периодических движений тела, двигающегося горизонтально с помощью ленточного механизма за счет силы сухого трения, расположенного внутри контейнера, который совершает прямолинейные гармонические колебания. Указанная модель и ее частные случаи отражают динамику как систем с ударными взаимодействиями, так и систем с трением. Отметим так же, что таким неавтономным системам с одной степенью свободы присущи и некоторые свойства многомерных систем. В данной работе исследуется эволюция периодических движений с ударами в зависимости от одного из параметров (остальные параметры считаем фиксированными) и проводится общий анализ бифуркации удвоения периода для периодических движений с двумя ударами.

Ключевые слова: динамическая система, точечное отображение, периодическое движение, устойчивость, бифуркация.

Введение. Исследование вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы и ударами об ограничитель получили активное развитие, начиная с середины 20-го века в связи с решением ряда практических задач с виброударными элементами. К их числу относятся известные задачи о вертикальном движении частицы на вибрирующем основании (см., напр., [1], [2], [3]) и о линейном осцилляторе, соударяющемся с неподвижным ограничителем [4]. Необходимо также отметить близость рассмотренных в данной работе динамических систем с системой «ползун на движущейся ленте» (см., напр., [5]). Впервые аналогичная система (тормозная колодка) была рассмотрена в [6], а затем она приобрела широкую популярность, что обусловлено сочетанием простоты самой системы со сложностью ее динамики [7]. Исследования периодических движений с ударами о неудерживающие связи показывают, что для них остаются справедливыми многие результаты в гладких системах. Такая аналогия основана на достаточной гладкости отображения Пуанкаре стробоскопического типа в окрестности неподвижной точки, соответствующей периодическому движению с конечным числом ударов за период. Получены явные формулы для построения определяющей матрицы и характеристического уравнения. Корни этого уравнения определяют характер устойчивости и бифуркаций периодических движений. Такой подход в сочетании с исследованиями качественных особенностей динамических систем с ударными взаимодействиями приводят к новым интересным закономерностям и выводам, имеющим важное значение для практики.

Модели и методы. Цель исследования состоит в создании математического аппарата для расчета и анализа периодических движений конкретных динамических систем с одной степенью свободы, совершающих вынужденные колебания под действием силы трения и удары об ограничитель. Отметим, что системы двух тел, одно из которых движется внутри другого по горизонтальной прямой, рассматривались ранее в работах [8], [9], [10] и др. В них решались задачи оптимального управления движением внутренней массы, при котором система тел осуществляет периодическое по скорости движение вдоль прямой на плоскости. В данной работе аналитические исследования проводились методами теоретической механики и качественной теории дифференциальных уравнений. Для решения поставленных задач, в частности, был применен метод точечных отображений, метод линеаризации для движений с ударами, метод линеаризации Айзермана-Гантмахера в системах с трением.

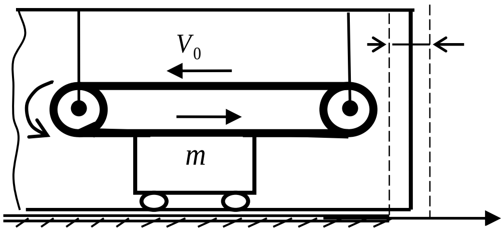

Рисунок 1

Принимаемая для исследования модель приведена на Рисунке 1. Она состоит из подвижной массы *m*, расположенной внутри контейнера, которая движется горизонтально с помощью ленточного механизма за счет силы сухого трения *F(V)*, зависящей от относительной скорости $V = V_0 - \dot{x}$, V_0 − постоянная скорость ленты. Будем считать, что

$$F(V) = \begin{cases} F_0 - \delta V, & 0 < V \le V_1 \\ F_0 - \delta V_1, & V > V_1 \end{cases} \qquad \delta = const > 0.$$

Движение тела перемежается с ударами о правую стенку контейнера, который совершает прямолинейные гармонические колебания. Уравнения движения тела имеют вид (координата *x* определяется как расстояние от тела до правой стенки):

$$\begin{cases} m(x + A\sin\omega s)'' = F(V_0 - \dot{x}), \quad x < 0, \quad \dot{x} < V_0 & (1) \\ \ddot{x} = 0, \quad x < 0, \quad \dot{x} = V_0 & (2) \\ \dot{x}^{+} = -R\dot{x}^{-}, \quad x = 0 & (3) \end{cases}$$

где R − коэффициент восстановления скорости тела при ударе; $\dot{x}^{+}$ и $\dot{x}^{-}$ − скорость тела после и до удара, соответственно.

Для поступательного движения массы m к ограничителю (и от ограничителя, после удара) должно быть выполнено условие $A\omega^2 < F_0$. При этом $\dot{x} \le V_0$ и $V_1 = 2V_0$. Тогда величина $\mu = \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0} \le 1$, где $\alpha_0 = \frac{F(V_0)}{F_0}$ характеризует крутизну зависимости *F(V)* при $V = V_0$. В этом случае $\delta = \frac{(1-\alpha_0)F_0}{V_0}$, откуда получим:

$$F(V_0 - \dot{x}) = F_0 - \delta(V_0 - \dot{x}) = F_0 - \frac{(1-\alpha_0)F_0}{V_0}(V_0 - \dot{x}) = F_0\left(\alpha_0 + \frac{1-\alpha_0}{V_0}\dot{x}\right).$$

Нетрудно видеть, что $F(V_0 - \dot{x}) = F_0\alpha_0\left(1 + \mu\frac{\dot{x}}{V_0}\right)$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\frac{m}{F_0\alpha_0}\ddot{x} = 1 + \mu\frac{\dot{x}}{V_0} + \frac{m\omega^2 A}{F_0\alpha_0} sin\omega\tau.$$

Введем безразмерные переменные $y = \frac{m\omega^2}{F_0\alpha_0}x$, $t = \omega\tau$; параметры $\varepsilon = \frac{m\omega^2 A}{F_0\alpha_0}$; $\eta = \mu\frac{F_0\alpha_0}{m\omega V_0}$. Имеем: $y'_t = \frac{m\omega^2}{F_0\alpha_0}x'_\tau\tau'_t = \frac{m\omega}{F_0\alpha_0}x'_\tau$, откуда $x'_\tau = \frac{F_0\alpha_0}{m\omega}y'_t$. Заметим, что если $x'_\tau = V_0$, то $y'_t = \frac{m\omega V_0}{F_0\alpha_0} = \frac{\mu}{\eta}$. Далее, находим: $y''_{tt} = \frac{m}{F_0\alpha_0}x''_{\tau\tau}$.

Система (1) – (3) перепишется в виде:

$$\begin{cases} \ddot{y} = 1 + \eta\dot{y} + \varepsilon\, sint, \quad y < 0, \ \dot{y} < \frac{\mu}{\eta} & (4) \\ \ddot{y} = 0, \quad y < 0, \ \dot{y} = \frac{\mu}{\eta} & (5) \\ \dot{y}^{+} = -R\dot{y}^{-}, \quad y = 0 & (6) \end{cases}$$

Результаты. Исследуем эволюцию периодических движений с ударами в зависимости от параметра ε (остальные параметры считаем фиксированными). Примем допущение об отсутствии для рассматриваемого периодического движения участков скольжения и касаний ограничителя, т.е. считаем, что $\dot{y}^{-} < \dfrac{\mu}{\eta}$. Окончательный вывод о характере бифуркаций можно сделать на основе анализа нелинейных членов отображения Пуанкаре в окрестности неподвижной точки. Будем сопоставлять с периодическим движением пару целых чисел (k, n), если его период равен $2\pi n$ и оно испытывает в течение этого времени k ударов. В работе [11] были найдены условия существования и устойчивости периодических движений системы:

а) вид однократных неподвижных точек отображения Пуанкаре, соответствующих движениям $(1, n)$:

$$x_2^- = \frac{2\pi n}{1+R}; \quad t_0 = arcsin\frac{\sqrt{1+\eta^2}\left(2\pi n\eta\xi_1 - 1\right)}{\varepsilon\eta} - arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}, \qquad (*)$$

$$x_2^- = \frac{2\pi n}{1+R}; \quad t_0 = \pi - arcsin\frac{\sqrt{1+\eta^2}\left(2\pi n\eta\xi_1 - 1\right)}{\varepsilon\eta} - arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}}, \qquad (**)$$

где $\xi_1 = \dfrac{1+Re^{2\pi n\eta}}{(e^{2\pi n\eta}-1)(1+R)}$; $x_2^- < \dfrac{\mu}{\eta}$ (т.е. $\mu > \dfrac{2\pi n\eta}{1+R}$).

б) вид их N_{+1}-границ существования

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1+\eta^2}\left|2\pi n\eta\xi_1 - 1\right|}{\eta} = f(n,R,\eta);$$

в) вид границ устойчивости (N_{-1} и N_{φ}-границы)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{1+\eta^2}}{\eta}\sqrt{\left(2\pi n\eta\xi_1 - 1\right)^2 + 16\pi^2 n^2\eta^4\xi_2} = f_1(n,R,\eta),$$

$$R^2 e^{2\pi n\eta} = 1,$$

где $\xi_2 = \dfrac{\left(1+R^2e^{2\pi n\eta}\right)^2}{\left(e^{2\pi n\eta}-1\right)^2\left(1+R\right)^4}$;

г) характеристическое уравнение для неподвижных точек (*) и (**) имеет вид

$$\rho^2 + \left[R\left(e^{2\pi n\eta}+1\right) - \frac{\left(1+R\right)^2\left(e^{2\pi n\eta}-1\right)\left(1+\varepsilon\, sint_0\right)}{2\pi n\eta}\right]\rho + R^2e^{2\pi n\eta} = 0.$$

Будем судить о характере бифуркации непосредственно, путем аналитического построения периодических движений, близких к данному. Для периодических движений типа (1, n) выясним поведение на границе области существования и устойчивости (т.е. при переходе параметра ε через N_{+1} и N_{-1}-границы).

Согласно формуле б) $\varepsilon_0 = \dfrac{\sqrt{1+\eta^2}\,|2\pi n\eta\xi_1 - 1|}{\eta}$ есть N_{+1}-граница. В этом случае корни характеристического уравнения $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = R^2 e^{2\pi n\eta}$. Если параметр ε получает положительное приращение от ε_0, то уравнение имеет два корня. Тогда существуют две неподвижные точки точечного отображения, одна из которых устойчива, а другая нет. При $\varepsilon = \varepsilon_0$ эти точки сливаются в одну, с последующим их исчезновением как только параметр ε получит отрицательное приращение от ε_0.Такое поведение характеризует бифуркацию «седло-узел» [12]. В случае N_{-1}-границы корни характеристического уравнения есть $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = R^2 e^{2\pi n\eta}$, т.е. один из мультипликаторов равен минус единице. Можно сделать вывод, что при выполнении некоторого условия невырожденности мы имеем бифуркацию удвоения периода ([5], [12]). Тип бифуркации (субкритическая или суперкритическая [4]) выясняться при нижеследующем анализе.

Будем строить движения типа (2, 2n). Обозначим моменты ударов $t_0 + \eta_1$, $t_0 + 2\pi n + \eta_2$, а скорости тела после отскоков

$$\dot y(t_0 + \eta_1 + 0) = -Rx_2^- + \upsilon_1 = -\frac{2\pi nR}{1+R} + \upsilon_1, \quad \dot y(t_0 + 2\pi n + \eta_2 + 0) = -\frac{2\pi nR}{1+R} + \upsilon_2 .$$

Обозначим $h = \varepsilon \sin t_0$, тогда $\dot h = \varepsilon \cos t_0$, $\ddot h = -\varepsilon \sin t_0 = -h$. Кроме этого, положим $h_{1,2} = h(t_0 + \eta_{1,2})$. Уравнения движения в промежутке до первого удара с начальными условиями $y(t_0 + \eta_1) = 0, \dot y(t_0 + \eta_1) = \dot y(t_0 + \eta_1 + 0)$ согласно [11, формулы (7), (8)] имеют вид

$$y(t) = \frac{1}{1+\eta^2}\left(-\eta\dot h_1 + h_1 + \eta\dot h(t) - h(t)\right) + \frac{1}{\eta}\left(\dot y(t_0 + \eta_1 + 0) + \frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h_1 + \dot h_1\right) + \frac{1}{\eta}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(e^{\eta(t - t_0 - \eta_1)} - 1\right) - \frac{1}{\eta}(t - t_0 - \eta_1), \qquad (7)$$

$$\dot y(t) = -\frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h(t) + \dot h(t)\right) + \left[\dot y(t_0 + \eta_1 + 0) + \frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h_1 + \dot h_1\right) + \frac{1}{\eta}\right] e^{\eta(t - t_0 - \eta_1)} - \frac{1}{\eta},$$

где $h(t) = \varepsilon\, sint;\ \dot h(t) = \varepsilon\, cost$.

В момент удара

$$y(t_0 + 2\pi n + \eta_2) = 0, \quad \dot y(t_0 + 2\pi n + \eta_2 - 0) = -\frac{1}{R}\dot y(t_0 + 2\pi n + \eta_2 + 0),$$

откуда при учете (7) получаем

$$\frac{\eta}{1+\eta^2}\left(-\eta\left(\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)+\left(h_1-h_2\right)\right)+\left(\frac{-2\pi nR}{1+R}+\nu_1+\frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h_1+\dot{h}_1\right)+\frac{1}{\eta}\right)\left(e^{\eta(2\pi n+\eta_2-\eta_1)}-1\right)-$$
$$-2\pi n-\eta_2+\eta_1=0; \qquad (8)$$
$$-\frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h_2+\dot{h}_2\right)+\left(-\frac{2\pi nR}{1+R}+\nu_1+\frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h_1+\dot{h}_1\right)+\frac{1}{\eta}\right)e^{\eta(2\pi n+\eta_2-\eta_1)}-\frac{1}{\eta}=$$
$$=-\frac{1}{R}\left(\frac{-2\pi nR}{1+R}+\nu_2\right).$$

Соотношения (8) связывают переменные $\eta_1,\ \eta_2,\ \nu_1,\ \nu_2$. Рассматривая движение тела до второго удара, получим при учете периодичности уравнения, формулы, аналогичные (8), но с перестановкой индексов:

$$\frac{\eta}{1+\eta^2}\left(-\eta\left(\dot{h}_2-\dot{h}_1\right)+\left(h_2-h_1\right)\right)+\left(\frac{-2\pi nR}{1+R}+\nu_2+\frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h_2+\dot{h}_2\right)+\frac{1}{\eta}\right)\left(e^{\eta(2\pi n+\eta_1-\eta_2)}-1\right)-$$
$$-2\pi n-\eta_1+\eta_2=0 \qquad (9)$$
$$-\frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h_1+\dot{h}_1\right)+\left(-\frac{2\pi nR}{1+R}+\nu_2+\frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h_2+\dot{h}_2\right)+\frac{1}{\eta}\right)e^{\eta(2\pi n+\eta_1-\eta_2)}-\frac{1}{\eta}=$$
$$=-\frac{1}{R}\left(\frac{-2\pi nR}{1+R}+\nu_1\right).$$

Поскольку переменные ν_1 и ν_2 входят линейно в уравнения (8) и (9), то их легко исключить. После элементарных вычислений получим

$$\upsilon_2=-\frac{R\left(\eta_2-\eta_1+\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)}{1-R},\quad \upsilon_1=\frac{R\left(\eta_2-\eta_1+\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)}{1-R},$$

и два уравнения для определения неизвестных $\eta_{1,2}$:

$$-\frac{1}{1+\eta^2}\left(\eta h_2+\dot{h}_2\right)+\left(-\frac{2\pi nR}{1+R}+\frac{R\left(\eta_2-\eta_1+\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)}{1-R}+\frac{\eta h_1+\dot{h}_1}{1+\eta^2}+\frac{1}{\eta}\right)\cdot e^{\eta(2\pi n+\eta_2-\eta_1)}-\frac{1}{\eta}=$$
$$=\frac{2\pi n}{1+R}+\frac{\eta_2-\eta_1+\dot{h}_1-\dot{h}_2}{1-R}, \qquad (10)$$
$$\frac{\eta}{1+\eta^2}\left(-\eta(\dot{h}_2-\dot{h}_1)+h_2-h_1\right)+\left(-\frac{2\pi nR}{1+R}-\frac{R\left(\eta_2-\eta_1+\dot{h}_1-\dot{h}_2\right)}{1-R}+\frac{\eta h_2+\dot{h}_2}{1+\eta^2}+\frac{1}{\eta}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(e^{\eta(2\pi n+\eta_1-\eta_2)}-1\right)-2\pi n-\eta_1+\eta_2=0.$$

По формуле Тейлора

$$h_i = h(t_0+\eta_i) = h + \dot{h}\eta_i + \frac{1}{2}\ddot{h}\eta_i^2 + \frac{1}{6}\dddot{h}\eta_i^3 + o\left(\eta_i^3\right),$$

$$\dot{h}_i = \dot{h}(t_0+\eta_i) = \dot{h} + \ddot{h}\eta_i + \frac{1}{2}\dddot{h}\eta_i^2 + \frac{1}{6}h^{(4)}\eta_i^3 + o\left(\eta_i^3\right), \qquad (11)$$

где $i = 1,2.$

Кроме того,

$$e^{(2\pi n+\eta_2-\eta_1)} = e^{2\pi n\eta}\cdot e^{\eta\eta_2}\cdot e^{-\eta\eta_1} = e^{2\pi n\eta}\left(1+\eta\eta_2+\frac{1}{2}\eta^2\eta_2^2+o\left(\eta_2^2\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1-\eta\eta_1+\frac{1}{2}\eta^2\eta_1^2+o\left(\eta_1^2\right)\right)$$

Пусть $\eta_2 = a_0 + a_1\eta_1 + a_2\eta_1^2 + o\left(\eta_1^2\right).$ Подставляя (11) в первую из формул (10), получим

$$\eta_2 = -\eta_1 + a_2\eta_1^2 + o\left(\eta_1^2\right),$$

$$где \quad a_2 = \frac{1+R}{1+R^2e^{2\pi n\eta}}\left[\frac{2\eta e^{2\pi n\eta}(1-R)}{e^{2\pi n\eta}-1} - \frac{(1+R)\left(e^{2\pi n\eta}-1\right)}{4\pi n\eta^2} + \frac{1+R^2e^{2\pi n\eta}}{2\eta}\right]. \qquad (12)$$

При расчетах были использованы следующие соотношения:

$$\eta h + \dot{h} = \left(\frac{2\pi n}{e^{2\pi n\eta}-1} + \frac{2\pi nR}{1+R} - \frac{1}{\eta}\right)\left(1+\eta^2\right),$$

$$1+h = \frac{2\pi n\eta(1-R)\left(Re^{2\pi n\eta}-1\right)}{\left(e^{2\pi n\eta}-1\right)(1+R)^2},$$

$$\eta\dot{h} + \ddot{h} = \eta\dot{h} - h = \frac{4\pi n\eta\left(1+\eta^2\right)\left(1+R^2e^{2\pi n\eta}\right)}{\left(e^{2\pi n\eta}-1\right)(1+R)^2}.$$

Первая из этих формул следует из [11, формула (12)], вторая из [11, формула (18)]. Последняя формула является комбинацией первых двух. Кроме того, $\ddot{h} = -h,\ \dddot{h} = -h',\ h^{(4)} = h.$

Если $\eta_1 = \eta_2$, то ввиду (11) $\eta_1 = 0$. Второе уравнение (10) удовлетворяется при $\eta_1 = \eta_2$. В самом деле, учитывая что $h_1 = h_2$, имеем

$$\left(-\frac{2\pi nR}{1+R}+\frac{\eta h_1+\dot{h}_1}{1+\eta^2}+\frac{1}{\eta}\right)\cdot\left(e^{2\pi n\eta}-1\right)-2\pi n=0\,.$$

Последнее соотношение выполнено при $\eta_1=0$ в силу [11, формула (9)], и соотношения (*). Значит, построенное движение совпадает с рассматриваемым движением типа (1, *n*).

Пусть $\eta_1\neq\eta_2$. Сокращая второе уравнение (10) на $(\eta_2-\eta_1)$ и используя (11), (12) находим:

$$\left(\frac{A}{1+\eta^2}-\frac{B\cdot R}{1-R}\right)\cdot\eta_1^2-\frac{C\cdot R}{1-R}\cdot\eta_1+D=0\,, \qquad (13)$$

где $A=\frac{\eta}{2}\left(a_2\left(\eta\dot{h}-h\right)-\frac{1}{3}\left(\eta h+\dot{h}\right)\right)$;

$$B=\frac{1}{2}\left(\dot{h}-\frac{1}{3}h\right)\left(1-e^{2\pi n\eta}\right)-\eta e^{2\pi n\eta}(1+h)\left(\frac{1}{2}\eta(2-a_2)^2-a_2\right);$$

$$C=2(1+h)e^{2\pi n\eta}\,;$$

$$D=\frac{R}{1-R}(1+h)\left(1-e^{2\pi n\eta}\right)+\frac{\eta}{1+\eta^2}\left(\eta h+\dot{h}\right)+1.$$

Анализируя области, в которых уравнение (13) имеет решение, можно выяснить тип бифуркации. Как показали численные расчеты, в данной модели возможна лишь суперкритическая бифуркация. Представляет особый интерес доказательство этой гипотезы в общем случае.

Заключение. Полученные при изучении данной виброударной системы результаты могут быть использованы при выборе рабочих режимов для процессов виброперемещения, вибросепарации, пневмовибротранспорта и тому подобное. Проводимые в работе теоретические исследования могут быть применены при аналитическом и численном рассмотрении конкретных динамических систем с ударными взаимодействиями. В частности, рассмотренные в работе схемы, дают возможность реализации рациональных настроек в конструкции дисковых тормозов, которые действуют по принципу фрикционной муфты [13].

Узость областей существования и устойчивости периодических режимов и зависимость их от начальных условий могут существенно снизить эффективность указанных устройств, а поэтому должны надлежащим образом учитываться при их разработке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобринский А. А., Кобринский А. Е. Двумерные виброударные системы. Монография. – М.: Наука, 1981. 336 с.
2. Беспалова Л. В. К теории виброударного механизма // Изв. Ан. СССР, 1957. Сер. ОТН. № 5. С. 3–14.
3. Di Bernardo M., Feigin M. I., Hogan S. J., and Homer M. E. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise smooth dynamical systems // Chaos, Solitons and Fractals, 1999. V. 10. P.1881−1908.
4. Иванов А. П. Динамика систем с механическими соударениями. Монография. – М.: «Международная программа образования», 1997. 336
5. Иванов А.П. Основы теории систем с трением. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 304 с.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Монография. – М.: Физматгиз, 1956. 915 с.
7. Тейфель А., Штайндль А., Трогер Х. Классификация негладких бифуркаций для осциллятора с трением // Проблемы аналитической механики и теории устойчивости. Сб. научных статей, посвященных памяти академика В. В. Румянцева. М.: НПУ РАН, 2009. С. 161−175.
8. Фигурина, Т. Ю. Оптимальное управление движением системы двух тел по прямой // Известия РАН. Теория и системы управления, 2007. № 2. С. 65-71.
9. Черноусько, Ф. Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Докл. Акад. Наук, 2005. Т. 405, № 1. С. 1-5.
10. Черноусько, Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Прикладная мат. и механика, 2006. Т. 70, вып. 6. С. 915-941.
11. Любимцева О. Л. Об устойчивости периодических движений системы с вибрирующим ограничителем // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование. Оптимальное управление, 2012. №.2(1). С. 184–189.
12. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, ч. I, II, III. // Известия высших учебных заведений, серия «Радиофизика». 1958. Т.1. № 1, 2, 5–6.
13. Александров М. П., Лысяков А. Г., Федосеев В. Н., Новожилов М. В. Тормозные устройства: Справочник. М.: Машиностроение, 1985. 312 с.

O.V. Lyubimtsev[1], O.L. Lyubimtseva[2]

BIFURCATIONS OF PERIODIC MOVEMENTS WITH HITS TWO MASS DYNAMIC SYSTEM

[1]Nizhny Novgorod state university named after N.I. Lobachevsky
[2]Nizhny Novgorod state architectural and construction university

The problems of the dynamics and stability of vibro-impact systems today constitute an independent section of the applied theory of oscillations. The interest in these problems is primarily due to the wide use in practice of machines and technologies that use systematic shock interactions as the basis of work processes. Vibrating hammers, vibro-impact tools, shock absorbers, disc brakes, machines for vibro-impact testing, devices for vibrotransport of piece and bulk cargo, vibroseparation, volumetric vibro-processing - this is not a complete list, which gives an idea of the diversity of technological uses of vibro-impact systems and range of issues requiring the application of the theory of these systems. Vibro-impact systems, as compared with conventional oscillatory systems, have additional parameters that characterize for one-dimensional systems, the gaps in shock pairs and the coefficients of restoring the speed upon impact. Previously, one of the authors found conditions for the existence and stability of periodic motions of a body moving horizontally using a belt mechanism due to the force of dry friction located inside the container, which performs straight-line harmonic oscillations. This model and its particular cases reflect the dynamics of both systems with shock interactions and systems with friction. We also note that some non-autonomous systems with one degree of freedom are inherent in some properties of multidimensional systems. In this paper, we study the evolution of periodic motions with impacts depending on one of the parameters (the other parameters are assumed to be fixed) and a general analysis of the period doubling bifurcation for periodic motions with two impacts is carried out.

Keywords: Dinamic system, point mapping, periodic motion, stability.

REFERENCES

1. Kobrinsky A. A., Kobrinsky A. E. Two-dimensional vibro-impact systems. Monograph. - M.: Science, 1981. 336 p.
2. Bespalova L.V. On the theory of a vibro-impact mechanism // Izv. An. USSR. 1957. Ser. OTN. № 5. P. 3–14.
3. Di Bernardo M., Feigin M. I., Hogan S. J., and Homer M. E. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise smooth dynamical systems // Chaos, Solitons and Fractals, 1999. V. 10. P.1881−1908.
4. Ivanov A.P. Dynamics of systems with mechanical collisions. M: “International Education Program”, 1997. 336 p.
5. Ivanov A.P. Fundamentals of the theory of systems with friction. M. – Izhevsk: SIC “Regular and chaotic dynamics”, Izhevsk Institute of Computer Science, 2011. 304 p.
6. Andronov A. A., Witt A. A., Khaikin S. E. Oscillation Theory. M.: Fiz-Matgiz, 1956. 915 p.

7. Teifel A., Steindl A., Troger H. Classification of nonsmooth bifurcations for an oscillator with friction // Problems of Analytical Mechanics and Theory of Stability. Sat scientific articles dedicated to the memory of Academician V.V. Rumyantsev. Moscow: NPU RAS, 2009. p. 161−175.
8. Figurina, T. Yu. Optimal control of the motion of a two-body system along a straight line // Izvestia RAN. Theory and control systems, 2007. № 2. S. 65-71.
9. Chernousko, F. L. On the motion of a body containing a mobile internal mass // Dokl. Acad. Science, 2005. T. 405, № 1. P. 1-5.
10. Chernousko, F. L. Analysis and optimization of body movement, controlled by moving internal mass // Applied Mat. and Mechanics, 2006. T. 70, no. 6. pp. 915-941.
11. Lyubimtseva O.L. On the stability of periodic motions of a system with a vibrating limiter // Bulletin of the Nizhny Novgorod University. N. I. Lobachevsky. Series: Mathematical Modeling. Optimal control, 2012. №.2 (1). P. 184–189.
12. Neimark Yu. I. The method of point mappings in the theory of nonlinear oscillations, parts I, II, III. // Proceedings of higher educational institutions, the series “Radio fizika”. 1958. V. 1. № 1, 2, 5–6.
13. Aleksandrov, M.P., Lysyakov, A.G., Fedoseev, V.N., Novozhilov, M.V. Brake Devices: A Handbook. M.: Mashinostroenie, 1985. 312 p.