

УДК 519.688: 332.87

doi: 10.26102/2310-6018/2018.23.4.020

А.А. Попов, А.О. Кузьмина
**ПРОГРАММНОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА ФАЗОВОЙ
ТРАЕКТОРИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (НА ПРИМЕРЕ ОРГАНИЗАЦИИ В
СФЕРЕ УПРАВЛЕНИЯ ЖИЛИЩНО-КОММУНАЛЬНЫМ
ХОЗЯЙСТВОМ)**

*Федеральное Государственное бюджетное образовательное учреждение
«Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова», Москва,
Россия
GMCS, Москва, Россия*

Целью статьи является совершенствование инструментальных средств для автоматизации качественного исследования динамической системы и прогнозирования значений параметров, характеризующих деятельность организаций в сфере экономики (в частности, в сфере управления жилищно-коммунальным хозяйством). В работе решается задача автоматизации анализа фазовой траектории динамической системы (организации по управлению жилищно-коммунальным хозяйством) с использованием положений качественной теории динамических систем. Актуальность задачи обусловлена недостаточным уровнем автоматизации качественного исследования динамических систем в сфере экономики с экономической интерпретацией результатов исследований. Используемые в статье методы качественной теории динамических систем позволяют прогнозировать состояние динамической системы без проведения численного моделирования (например, интегрирования системы дифференциальных уравнений, являющейся моделью динамической системы). В статье представлена методика, в соответствии с которой проводилось исследование фазовой траектории динамической системы с использованием программного приложения. Выявлены типы фазовых точек в фазовых плоскостях в соответствии с характером поведения проекции фазовой траектории в окрестности проекции фазовой точки. На примере анализа фазовой траектории, характеризующей деятельность организации по управлению жилищно-коммунальным хозяйством, продемонстрированы возможности программного приложения, которые предусматривают построение проекций фазовой траектории на три фазовых плоскости. Установлено, что в фазовых плоскостях отсутствуют состояния равновесия типа «устойчивый узел» и «устойчивый фокус», но присутствуют состояния равновесия типа «неустойчивый узел», «неустойчивый фокус» и «седло». Приведен пример обнаружения «области притяжения» фазовой траектории в фазовой плоскости. Определены типы «областей притяжения» и дана экономическая интерпретация «областям притяжения». Сформулированы основные направления совершенствования функциональных возможностей разработанного программного приложения. Материалы статьи представляют практическую ценность для специалистов, занимающихся прогнозированием состояния предприятий в экономике и, в частности, в жилищно-коммунальном хозяйстве.

Ключевые слова: организация, управление, жилищно-коммунальное хозяйство, программное приложение, автоматизация, прогнозирование, качественное исследование, динамическая система, фазовая траектория, фазовая точка

Введение

Жилищно-коммунальное хозяйство (ЖКХ) РФ в настоящее время является отраслью экономики, в деятельность которой активно внедряются современные информационные технологии. Ранее многие процессы в организациях по управлению ЖКХ считались трудно формализуемыми и автоматизируемыми. Но с появлением современных информационных технологий возможности по автоматизации увеличились. К организациям по управлению ЖКХ (ОУ ЖКХ), рассматриваемым в данной статье, относятся управляющие компании, товарищества собственников жилья, жилищные кооперативы и другие аналогичные организации, осуществляющие деятельность по непосредственному управлению многоквартирными домами (МКД).

Деятельность ОУ ЖКХ, рассматриваемой в данной статье в качестве динамической системы, характеризуется состояниями (фазовыми точками). Фазовая точка в n -й момент времени ($n = 1, 2, \dots, N$) характеризуется совокупностью значений параметров $x(i)$, ($i = 1, 2, \dots, I$). Фазовая траектория в виде последовательности фазовых точек $ft(n)$ отражает изменение состояния динамической системы. Каждому n -му моменту времени ($n = 1, 2, \dots, N$) соответствует одна фазовая точка $ft(n)$. Значения параметров x_i ($i = 1, 2, \dots, I$), характеризующие ОУ ЖКХ в n -й момент времени задаются матрицей X размерностью $N \times I$ (N – количество фазовых точек, равное количеству моментов времени; I – количество параметров, характеризующих каждую фазовую точку):

$$X = \{ft(n); n=1, 2, \dots, N\}, ft(n) = \{x(i, n); i=1, 2, \dots, I\}.$$

Каждой n -й строке матрицы X соответствует фазовая точка $ft(n)$.

Фазовая траектория динамической системы представляет собой I -мерную кривую, которую визуализировать невозможно. Поэтому для визуализации фазовой траектории в данной работе предлагается рассматривать проекции фазовой траектории на фазовые плоскости, соответствующие параметрам $x(i)$ и $x(j)$ ($j = 1, 2, \dots, I; i=j$).

Деятельность ОУ ЖКХ может характеризоваться параметрами, объединенными в следующие группы:

- сведения, содержащиеся в бухгалтерской отчетности ОУ ЖКХ;
- сведения о доходах ОУ ЖКХ, связанных оказанием услуг по управлению многоквартирными домами (МКД) и частными домами;
- сведения о расходах, связанных с оказанием услуг по управлению МКД и частными домами;
- сведения, содержащиеся в сметах доходов и расходов и отчетах об их выполнении;
- сведения об общей информации о МКД и частных домах, управление которыми осуществляет ОУ ЖКХ;
- сведения о стоимости работ и услуг по содержанию, техническому обслуживанию и ремонту общего имущества МКД;
- сведения о выполненных работах (оказанных услугах) по содержанию, техническому обслуживанию и ремонту МКД;
- сведения о средствах, имеющихся у ОУ ЖКХ, для проведения технического обслуживания и ремонтов МКД;
- сведения об аренде общего имущества МКД и частных домов;
- сведения о ценах на жилищные и коммунальные услуги;
- сведения о поставленных в ОУ ЖКХ коммунальных услугах и нормативах потребления коммунальных услуг;
- сведения о поставщиках коммунальных услуг и ресурсов;
- сведения об энергоэффективности многоквартирных (частных) домов;
- сведения о нарушениях, совершенных в ОУ ЖКХ, в сфере управления многоквартирными (частными) домами;
- сведения об аварийных ситуациях и ликвидации их последствий;
- сведения о начислениях платежей жильцов МКД и частных домов за жилищно-коммунальные услуги (ЖКУ) и информационные сервисы;
- сведения о задолженностях жильцов;
- сведения о социально-демографическом положении жильцов, их льготах и жилищных субсидиях;
- сведения о количестве жильцов, участвующих в управлении деятельностью ОУ ЖКХ, по отношению к общему количеству жильцов, обслуживаемых ОУ ЖКХ;
- сведения, характеризующие ИТ-инфраструктуру ОУ ЖКХ и возможности ОУ ЖКХ по работе с информационными

сервисами (отношение максимального количества информационных сервисов, которыми может воспользоваться ОУ ЖКХ, к общему количеству информационных сервисов, необходимых ОУ ЖКХ, которые могут быть предоставлены провайдером);

- сведения о навыках сотрудников ОУ ЖКХ и жильцов МКД по работе с информационными системами и сервисами.

Постановка задачи исследований

Таким образом, деятельность ОУ ЖКХ в n -й момент времени описывается значениями параметров $x(i)$ в соответствии с указанными выше группами параметров. При этом значительная часть данных не приводится ни в каких официальных отчетах и, как следствие, не используется лицами, принимающими решения, для анализа и управления в сфере ЖКХ. Поэтому зачастую решения в сфере управления ЖКХ недостаточно обоснованы. Следовательно, анализ значений параметров $x(i)$, не приведенных в официальных отчетах, является важным при принятии решений, но требует дополнительных затрат времени при принятии решений по управлению ЖКХ. Для сокращения времени на принятие решений с использованием таких данных могут быть использованы «области притяжения» фазовой траектории, получение которых рассматривается в данной работе. В данной работе «областями притяжения» фазовой траектории считаются окрестности фазовых точек, в которых фазовая траектория находится в течение периода времени, значение которого не менее T^{min} . Для получения «областей притяжения» используются данные из матрицы X .

Одним из способов получения «областей притяжения» является анализ фазовой траектории, полученной с использованием количественных методов (например, интегрирование системы дифференциальных уравнений, описывающих деятельность ОУ ЖКХ с использованием фазовых точек с координатами, задаваемыми уже существующими значениями параметров $x(i)$ в n -й момент времени в качестве «разгонных» точек).

Вторым способом получения «областей притяжения» является качественный анализ фазовой траектории с использованием положений качественной теории динамических систем. Такой способ предусматривает определение закономерностей поведения уже существующей фазовой траектории.

Вопросы качественной теории динамических систем достаточно хорошо проработано теоретически. При этом определение состояний равновесия динамических систем рассматриваются для случаев первого или второго порядков системы дифференциальных уравнений, описывающей динамическую систему. Это соответствует определению точек равновесия на фазовой плоскости [1, 2, 3].

В работе [4] рассмотрены основные типы фазовых траекторий, поведение траекторий в окрестности положений равновесия, периодические траектории, а также рассматриваются задачи качественного интегрирования дифференциальных уравнений.

Особенностью многомерных динамических систем с простым поведением фазовых траекторий является их аналогия с динамическими системами на плоскости. При этом особенностью является возможность существования в фазовом пространстве инвариантного тора с охватывающей его квазипериодической траекторией. Рассмотрение инвариантных торов для трехмерного фазового пространства производится в [5]. Рассмотрение типов точек равновесия для случая многомерных динамических систем также приведено в работе [6].

Результаты качественного исследования поведения фазовых траекторий динамической системы успешно интерпретируются в технических областях знаний, например, в работах [7, 8, 9], где модель представлена в виде автономной динамической системы второго порядка и для ее анализа применяются положения теории бифуркаций и качественной теории динамических систем. При этом в [7, 8, 9] формируется аналитическое решение системы дифференциальных уравнений, с помощью которого производится определение особенностей поведения фазовой траектории. В [7, 8] приводятся результаты анализа фазовой траектории в виде точек равновесия и имеющих вид эллипса «областей притяжения» фазовой траектории. В работе [9] рассмотрен качественный подход к анализу нелинейных моделей и построение аттракторов («областей притяжения») фазовых траекторий динамических систем с управлениями.

В работе [10] рассматриваются фазовые портреты динамических систем, которые дают качественное представление об их свойствах и позволяют решать задачи управления динамическими системами.

К сожалению, в перечисленных выше работах методы качественного исследования приводятся в формальном виде, но при этом не приводятся алгоритмы, с помощью которых данные методы могут быть реализованы на ЭВМ для автоматизации определения состояний равновесия,

определения циклических движений, а также аттракторов («областей притяжения»). Формирование алгоритмов для проведения качественного анализа фазовой траектории динамической системы рассмотрено в [11]. Кроме этого в [11] приведены типы фазовых точек:

неподвижная «вход-зависание», соответствующая устойчивому состоянию равновесия (устойчивому узлу или устойчивому фокусу [1, 2, 3, 4]);

«вход-выход», соответствующая точке фазовой траектории, через окрестность которой она проходит только один раз;

кратная «вход-выход», соответствующая точке фазовой траектории, в окрестность которой она неоднократно входит и сразу же выходит, что может соответствовать состояниям равновесия «седло» или «седлоузел» [1, 2, 3, 4];

«вход-зависание-выход» с кратностью, равной единице, соответствующая случаю, когда фазовая траектория попадает в окрестность фазовой точки и находится там в течение некоторого промежутка времени, после чего выходит из окрестности и больше в нее не возвращается, что соответствует неустойчивому состоянию равновесия «узел» или «фокус» или состояниям равновесия «седло» или «седлоузел» [1, 2, 3, 4];

«вход-зависание-выход», с кратностью, большей единицы, то есть фазовая траектория неоднократно сначала входит в окрестность фазовой точки, находится там в течение некоторого времени, а затем выходит из окрестности, что соответствует циклическому движению с постоянным или переменным циклом [1, 2, 3, 4].

Также в работе [11] приведены примеры «шаблонов для принятия решений», являющихся аналогами «областей притяжения». Использование «шаблонов...» позволяет прогнозировать поведение динамической системы без проведения численного моделирования.

Реализация на ЭВМ качественных исследований динамических систем рассматривается в работах [12, 13], где приведена методология использования программного комплекса WinSet.

В [13] рассматривается визуальное отображение структур [1, 2, 3, 4], возникающих в нелинейных динамических системах, дается описание программы WinSet, а также приводится перечень основных отображений, фракталов и дифференциальных уравнений, для которых программа

производит визуальное отображение и позволяет определить свойства динамических систем.

В [14] рассмотрено описание алгоритмов качественно-численного исследования динамических систем второго порядка, а также руководство пользователя для работы программного комплекса ADIS для проведения анализа координат состояния равновесия и его типа.

Вместе с тем следует отметить, что интерпретация результатов анализа с использованием качественной теории динамических систем в областях знаний, связанных с экономикой, в том числе, ЖКХ, является более сложной задачей. Во-первых, порядок системы дифференциальных уравнений, описывающей экономическую динамическую систему, значительно больше двух. Во-вторых, в правых частях системы дифференциальных уравнений будут присутствовать параметры, отображающие случайное влияние различных социально-экономических факторов на экономическую динамическую систему, и вследствие этого аналитическое решение (как это делалось для технических областей знаний) получить сложно. Поэтому количество публикаций, в которых приведена экономическая интерпретация результатов качественных исследований, значительно меньше количества публикаций с интерпретацией результатов в технических областях знаний.

В работе [15] рассмотрены результаты качественного анализа динамических моделей экономического равновесия и экономического роста, популяционных моделей экономики и неравновесной динамической модели фондового рынка.

В работах [16, 17] произведен обзор эффектов нелинейной динамики и возможностей их использования в сфере экономики для антикризисного управления.

Таким образом видно, что автоматизация качественного исследования динамических систем в сфере экономики с экономической интерпретацией результатов исследований является актуальной задачей.

Целью данной статьи является совершенствование инструментальных средств для автоматизации качественного исследования динамической системы и прогнозирования значений параметров, характеризующих деятельность организаций в сфере экономики (в частности, в сфере управления ЖКХ).

В статье рассмотрено решение задачи разработки программного приложения, которое позволяет проанализировать имеющуюся фазовую траекторию динамической системы, полученную по результатам

деятельности организации по управлению ЖКХ, получить множество «областей притяжения» фазовой траектории динамической системы, а также установить типы фазовых точек в фазовых плоскостях.

Математическая постановка задачи, решаемой в данной статье, выглядит следующим образом:

Дано:

Матрица исходных данных X , содержащая фазовые точки (совокупность значений параметров, характеризующих деятельность организации по управлению ЖКХ в определенный момент времени)

Требуется получить:

1. Преобразование **PROG** в виде программного приложения для автоматизации анализа фазовой траектории динамической системы с использованием качественной теории динамических систем.

2. Матрицу **OBPR**, содержащую результаты определения «областей притяжения» фазовой траектории в фазовых плоскостях

3. Матрицу **TIPFT**, содержащую результаты определения типов проекций фазовых точек на фазовые плоскости.

Таким образом:

PROG: $X \rightarrow (OBPR, TIPFT)$

где $X = \{ft(n); n=1, 2, \dots, N\}$

$ft(n) = \{x(i, n); i=1, 2, \dots, I\}$

OBPR = $\{obpr(i, j); i=1, 2, \dots, I; j=1, 2, \dots, I\}$

$obpr(i, j) = \{op(f); f=1, 2, \dots, F(i, j); i \neq j\}$

$obpr(i, j) = \{\emptyset; i=j\}$

TIPFT = $\{tipft(n); n=1, 2, \dots, N\}$,

$tipft(n) = \{tip(i, j, n); i=1, 2, \dots, I; j=1, 2, \dots, I; i \neq j\}$

$tipft(n) = \{\emptyset; i=j\}$

I – количество параметров, характеризующих деятельность ОУ ЖКХ;

N – количество моментов времени, для которых построены фазовые точки;

$x(i, n)$ – значение параметра x_i в n -й момент времени;

$ft(n)$ – фазовая точка в n -й момент времени;

$obpr(f, i, j)$ – множество «областей притяжения» в фазовой плоскости, которая соответствует параметрам $x(i)$ и $x(j)$, ($i \neq j$);

$F(i, j)$ – количество «областей притяжения» в фазовой плоскости, которая соответствует параметрам $x(i)$ и $x(j)$, ($i \neq j$);

$tip(i, j, n)$ – тип проекции фазовая точка в n -й момент времени на фазовую плоскость, которая соответствует параметрам $x(i)$ и $x(j)$, ($i \neq j$), в соответствии с приведенными выше в данной статье типами фазовых точек.

Методика анализа фазовой траектории, реализованная в программном приложении

Для анализа фазовой траектории сначала нормируется набор исходных данных - матрица X . Далее, для удобства построения фазовой траектории и приведения значений $x(i, n)$ к безразмерному виду производится их нормирование. Для этого сначала определяются максимальные значения $max(i)$ для каждого из параметров $x(i)$, ($i = 1, 2, \dots, I$). После этого для каждого n -го момента времени ($n=1, 2, \dots, N$) получаются нормированные значения $x(i, n)^{норм}$ путем деления значений $x(i, n)$ на значение $max(i)$.

В результате формируется матрица нормированных значений $X^{норм}$:

$$X^{норм} = \{ft(n)^{норм}; n=1, 2, \dots, N\}$$

$$ft(n) = \{x(i, n)^{норм}; i=1, 2, \dots, I\}$$

Нормированное значение каждого элемента $x(i, n)^{норм}$ находится в пределах от 0 до 1.

Следующим этапом анализа фазовой траектории является построение матриц $IS(i, j)$ исследования состояний:

$$IS(i, j) = \{is(i, j); i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, I; i \neq j\}$$

Каждая из матриц $IS(i, j)$ содержит исходные данные для анализа проекций фазовой траектории на фазовые плоскости $x(i), x(j)$ ($i = 1, 2, \dots, I; j = 1, 2, \dots, I; i \neq j$). Каждая из матриц $IS(i, j)$ имеет размерность $N \times N$. При $i = j$ матрицы $IS(i, j)$ не формируются, так как фазовая плоскость $x(i), x(j)$ при $i = j$ трансформируется в координатную ось $x(i)$.

Формирование матрицы $IS(i, j)$ производится с помощью попарного сравнения проекций фазовых точек $ft(n)^{норм}$ на фазовую плоскость $x(i), x(j)$. При этом сами точки не сравниваются сами с собой. Значение элемента $is(i, j)_{kl}$ ($k=1, 2, \dots, N; l=1, 2, \dots, N$) матрицы $IS(i, j)$ при $k \neq l$ равно единице,

если проекция l -й точки $ft(l)^{\text{норм}}$ на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$ лежит в окрестности проекции k -й точки на эту фазовую плоскость.

В противном случае значение $is(i, j)_{kl}$ равно нулю. Также $is(i, j)_{kl}$ равно нулю в случае, когда $k=l$. Для всех элементов матрицы $IS(i, j)$ справедливо равенство $is(i, j)_{kl} = is(i, j)_{lk}$.

Таким образом, k -я строка матрицы $IS(i, j)$ соответствует проекции фазовой точки $ft(l)^{\text{норм}}$ на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$.

Далее с использованием матрицы производится определение типов проекций фазовых точек (в соответствии с приведенными выше типами точек) на фазовые плоскости. Проекция $ft(n)^{\text{норм}}$ на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$ является неподвижной точкой (точкой первого типа), если начиная с некоторого k -го момента времени момента времени t_k ($1 \leq k < N$) выполняется соотношение

$$U(ft(k)^{\text{норм}}, ft(l)^{\text{норм}}) \leq \Delta,$$

где Δ – величина окрестности точки $ft(k)^{\text{норм}}$, при которой фиксируется попадание проекции фазовой траектории в окрестность проекции фазовой точки;

U – расстояние между проекциями фазовых точек $ft(k)^{\text{норм}}$ и $ft(l)^{\text{норм}}$ на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$. Отметим, что в любой фазовой плоскости $x(i)$, $x(j)$ может быть только одна точка первого типа («вход-зависание»).

Проекция фазовой точки $ft(k)^{\text{норм}}$ является точкой типа «вход-зависание» в фазовой плоскости $x(i)$, $x(j)$ если равны единице значения элементов $is(i, j)_{kl}$ матрицы $IS(i, j)$ при $l = k + 1, k+2, \dots, N$. Если это условие не выполняется, то точек типа «вход-зависание» в фазовой плоскости $x(i)$, $x(j)$ нет.

В случае отсутствия в фазовой плоскости $x(i)$, $x(j)$ точек типа «вход-зависание» производится определения точек других типов («вход-выход», кратная «вход-выход», «вход-зависание-выход» с кратностью, равной единице, «вход-зависание-выход», с кратностью, большей единице).

Точками «вход-зависание-выход» с различной кратностью являются такие точки $ft(k)^{\text{норм}}$ и G точек $ft(w)^{\text{норм}}$ ($w = w_1, w_2, \dots, w_G, k \leq w < N$), для которых выполняется соотношение

$$U(ft(k)^{\text{норм}}, ft(w)^{\text{норм}}) \leq \Delta.$$

При этом для точек $ft(w)^{\text{норм}}$ ($w \neq w_1, w_2, \dots, w_G$) данное соотношение не выполняется.

Для определения точек типа «вход-выход», а также «вход-зависание-выход» с различной кратностью на фазовой плоскости $x(i)$, $x(j)$ строятся массивы VH , ZAV , VIH , соответствующие строкам матрицы $IS(i, j)$.

В массив VH заносятся номера точек $ft(l)^{норм}$ ($k \leq l < N$), в которых проекция фазовой траектории на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$ попадает в окрестность точки $ft(k)^{норм}$.

Если в массив VH содержит единственный элемент, равный нулю, то возврата проекции фазовой траектории в окрестность фазовой точки $ft(k)^{норм}$ не происходит (k – номер строки матрицы $IS(i, j)$). Проекция фазовой точки $ft(k)^{норм}$ на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$ в этом случае является точкой типа «вход-выход».

Если в массиве VH только один элемент с ненулевым значением, равный p_1 ($k \leq p_1 < N$), то проекция фазовой траектории возвращается в окрестность проекции точки $ft(k)^{норм}$ только один раз. Проекция фазовой точки $ft(k)^{норм}$ на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$ в этом случае является точкой типа кратная «вход-выход» или «вход-зависание-выход» с различной кратностью.

Если массив VH содержит F элементов со значениями, не равными нулю ($p_1, p_2, \dots, p_F; k \leq p_f < K; f=1, 2, \dots, F$), то проекция фазовой траектории неоднократно возвращается в окрестность проекции фазовой точки $ft(k)^{норм}$ на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$. Проекция фазовой точки на фазовую плоскость в этом случае является точкой типа «кратная «вход-выход» или «вход-зависание-выход» с кратностью больше единице.

Далее с помощью массивов ZAV и VIH производится уточнение типов точек (кратная «вход-выход», «вход-зависание-выход» с кратностью, равной единице, или с кратностью больше единицы), полученных ранее после анализа массива VH .

Массив ZAV содержит номера точек $ft(l)^{норм}$, в которых проекция фазовой траектории на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$ находится в окрестности проекции фазовой точки $ft(k)^{норм}$.

Массив VIH содержит номера точек, начиная с которых проекция фазовой траектории на фазовую плоскость $x(i)$, $x(j)$ покидает окрестность точки проекции фазовой точки $ft(k)^{норм}$.

Таким образом, с помощью анализа массивов VH , ZAV , VIH формируются элементы матрицы $TIPFT = \{tipft(n); n=1, 2, \dots, N\}$ в соответствии с математической постановкой задачи.

Определение «областей притяжения» производится с помощью анализа уже обнаруженных точек (кратная «вход-выход» или «вход-зависание-выход» с различной кратностью).

В случае, если для окрестности проекции фазовой точки $ft(k)^{норм}$ на фазовую плоскость $x(i), x(j)$ выполняются соотношения

$$U(ft(k)^{норм}, ft(d)^{норм}) \leq \Delta \quad (d = d_1, d_2, \dots, d_R, k \leq d < N) \text{ и}$$

$$R \geq R^{min},$$

где R – количество проекций фазовых точек, попавших в окрестность проекции фазовой точки $ft(k)^{норм}$,

R^{min} - минимальное количество попаданий проекций фазовых точек в окрестность Δ проекции фазовой точки $ft(k)^{норм}$,

то окрестность проекции фазовой точки $ft(k)^{норм}$ является «областью притяжения».

При этом, в соответствии с математической постановкой задачи, каждая обнаруженная в фазовой плоскости $x(i), x(j)$ «область притяжения» $op(f)$ входит в состав элемента матрицы $obpr(i, j) = \{op(f); f=1, 2, \dots, F(i, j); i \neq j\}$ и $F(i, j) = R$.

Более подробно алгоритмы определения типов фазовых точек и «областей притяжения», реализованные в рассмотренном далее программном приложении, приведены в [11].

Функциональные возможности программного приложения для проведения качественного исследования динамической системы

Первая версия программа для определения типов фазовых точек и «областей притяжения» разработана на языке программирования Visual Basic.Net в среде разработки Visual Studio.Net 2015 [18, 19].

В первой версии программного приложения демонстрируется анализ проекции фазовой траектории на три фазовых плоскости (в соответствии с Параметрами №1, 2, 3). В качестве трех параметров, которым соответствуют фазовые плоскости, рассматриваются параметры, характеризующие деятельность организации по управлению ЖКХ. В качестве Параметра №1 рассматривается количество средств, поступивших от жильцов многоквартирных домов за оплату ЖКУ. В качестве Параметра №2 рассматривается количество жильцов - должников по оплате за ЖКУ. В качестве Параметра №3 рассматривается количество собственных средств, поступивших в ОУ ЖКХ для проведения ремонтов многоквартирных домов.

В качестве матрицы исходных данных X используется Таблица в файле Excel. Каждая строка Таблицы соответствует фазовой точке $ft(n)$ ($n=1, 2, \dots, N$). Значениями параметров $x(i, n)$, характеризующими фазовую точку $ft(n)$, являются значения параметров №1, №2, №3 в заданный момент времени (помесячно). В данной работе рассмотрена обработка значений параметров, характеризующих деятельность организации по управлению ЖКХ за несколько лет (4 года). Доступ к табличным данным обеспечивает технология OLE DB - Object Linking and Embedding Database. После успешной загрузки данных из файла в программном интерфейсе (форма №1) отображается путь к файлу, с которого загружены исходные данные. Выбор пути к файлу производится с помощью элемента управления «OpenFileDialog». Загрузка данных осуществляется из выбранного файла в элемент управления «DataGridView». После загрузки данных на пользовательском интерфейсе становится доступной кнопка «Нормализация данных». После нажатия кнопки «Нормализация данных» проводится описанная ранее в данной работе нормализация данных. После нормализации в элементе управления «DataGridView» происходит замена первоначально загруженных данных нормализованными (матрица $X^{\text{норм}}$).

После завершения нормализации кнопки «Загрузить файл» и «Нормализация данных» на пользовательском интерфейсе становятся недоступными для работы, но при этом становятся доступны для работы радиокнопки (элементы управления «RadioButton») с названиями фазовых плоскостей (Рисунок 1).

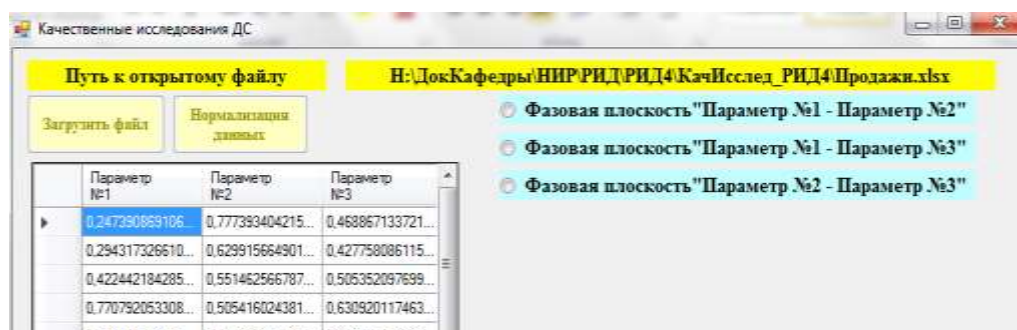


Рисунок 1 – Пользовательский интерфейс программного приложения после проведения нормализации

После выбора одного из элементов управления «Радиокнопка» («RadioButton») производится анализ данных в соответствующих

столбцах, отображенных в элементе управления «DataGridView» с использованием алгоритмов, приведенных в [11]. Для построения проекций фазовых траекторий используется пространство имен для работы с графикой Drawing.Drawing2D. При нажатии на элемент управления «RadioButton» с названием «Фазовая плоскость «Параметр №1 – Параметр №2» в элементе управления «PictureBox» на пользовательском интерфейсе производится построение проекции фазовой траектории, характеризующей деятельность предприятия по месяцам (Рисунок 2).

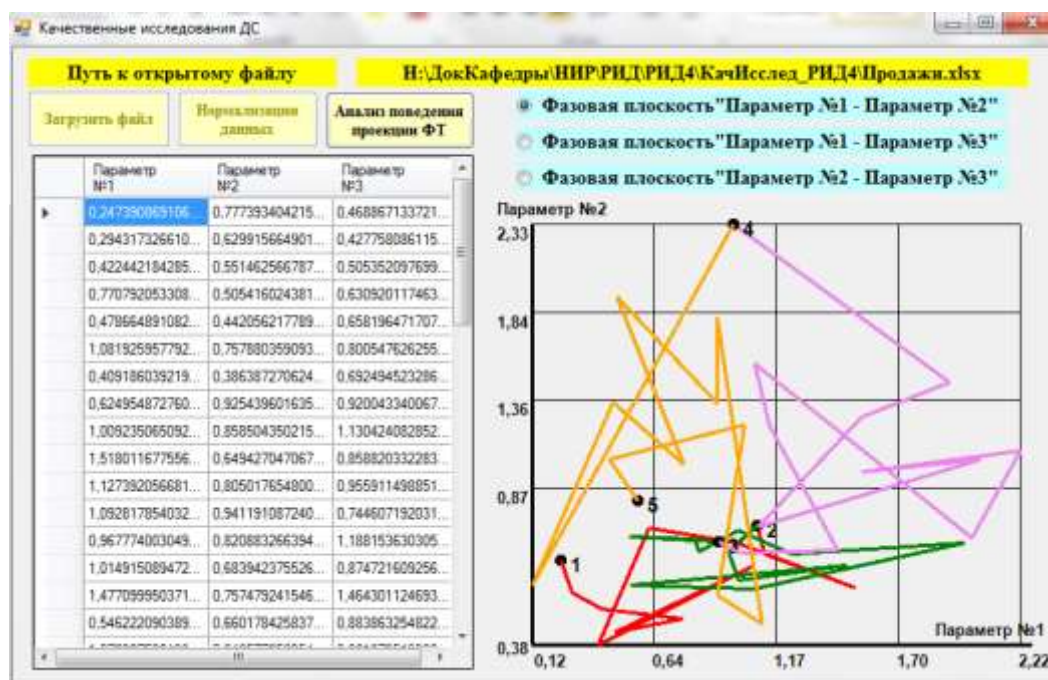


Рисунок 2 - Отображение проекции фазовой траектории на фазовую плоскость «Параметр №1 – Параметр №2»

Точка 1 на проекции фазовой траектории соответствует началу первого года. Точка 2 – началу второго года. Точка 3 – началу третьего года. Точка 4 – началу четвертого года, а точка 5 – концу четвертого года. Точки с номерами представлены на графике (Рисунок 2) в виде маркеров с соответствующими номерами. Проекция фазовой траектории за каждый календарный год отображается разным цветом.

Для двух других фазовых плоскостей («Параметр №1 – Параметр №3» и «Параметр №2 – Параметр №3») построение проекций фазовых траекторий производится с помощью элементов управления «RadioButton» с соответствующими названиями.

После построения проекции фазовой траектории в пользовательском интерфейсе появляется и становится активной кнопка «Анализ поведения проекции ФТ». При этом остальные кнопки на форме №1 остаются недоступными для работы (Рисунок 2). Нажатие на эту кнопку вызывает форму №2 (Рисунок 3), предназначенную:

для задания размеров окрестности Δ проекции фазовой точки $ft(k)^{норм}$, необходимых для анализа элементов матрицы $X^{норм}$ и получения $IS(i, j)$;

для отображения матрицы $IS(i, j)$;

для отображения элементов матрицы $TIPFT$, которую необходимо получить, исходя из постановки задачи (определяются с использованием заданной окрестности Δ и матрицы $IS(i, j)$).

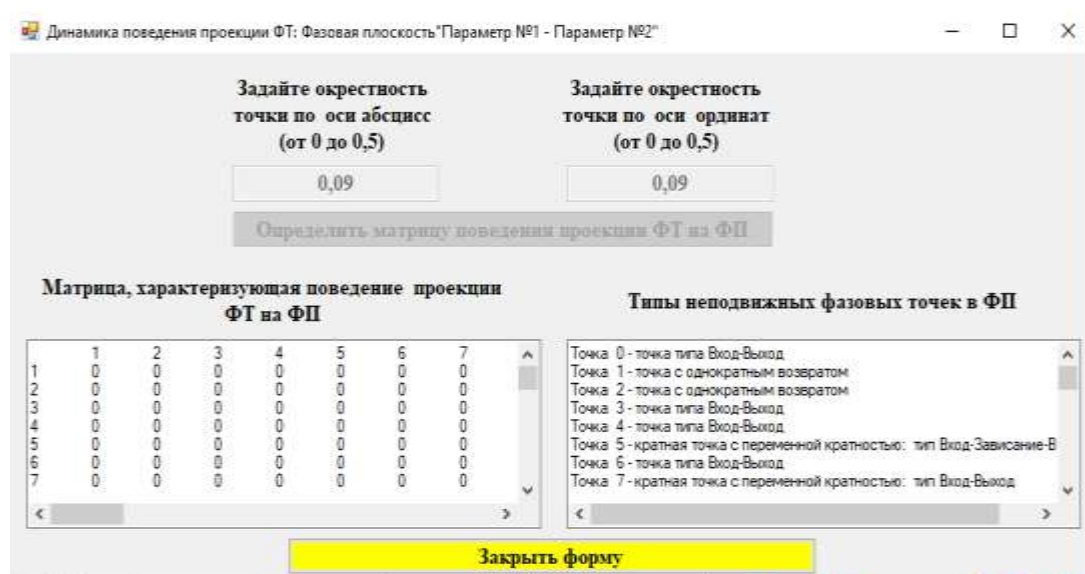


Рисунок 3 – Внешний вид формы №2 с результатами анализа поведения проекции фазовой траектории в фазовой плоскости «Параметр №1 – Параметр №2»

Для удобства программной реализации определения «области притяжения» было принято решение о том, что «области притяжения» будут отображаться в виде прямоугольника. Поэтому в начале работы с формой № 2 (Рисунок 3) необходимо ввести значения окрестностей по осям абсцисс и ординат ($\Delta(x(i))$ и $\Delta(x(j))$) в элементы управления «TextBox»

в верхней части формы, чтобы задать общую окрестность Δ для последующей проверки приведенного ранее соотношения

$$U(ft(k)^{\text{норм}}, ft(l)^{\text{норм}}) \leq \Delta,$$

$$\text{где } \Delta^2 = (\Delta(x(i)))^2 + (\Delta(x(j)))^2.$$

После этого необходимо нажать на кнопку «Определить матрицу поведения проекции ФТ на ФП» (матрицу $IS(i, j)$), которая после нажатия становится недоступной для работы. После нажатия на кнопку производится формирование матрицы $IS(i, j)$ (с использованием матрицы $X^{\text{норм}}$ и введенного ранее значения окрестности Δ) в соответствии с приведенной выше методикой анализа фазовой траектории и алгоритмами, приведенными в [11].

Элементы матрицы $IS(i, j)$ отображаются в элементе управления «TextVox» с левой части формы. Элементы матрицы $TIPFT$ отображаются в элементе управления «TextVox» в правой части формы (Рисунок 3).

После формирования элементов матрицы $TIPFT$ производится формирование элементов матрицы $OBPR$, содержащей в себе параметры «областей притяжения» в фазовой плоскости, которая соответствует параметрам $x(i)$ и $x(j)$, ($i \neq j$). Происходит определение количества областей притяжения $F(i, j)$ и имеющих форму прямоугольника «областей притяжения» $op(f)$ в каждой фазовой плоскости, после чего формируются элементы $obpr(i, j)$ матрицы $OBPR$ (на основании матрицы поведения $IS(i, j)$ и полученной матрицы $TIPFT$), где

$$obpr(i, j) = \{op(f); f=1, 2, \dots, F(i, j); i \neq j\},$$

$$op(f) = \{[x(i, k)^{\text{норм}} - \Delta(x(i)), x(i, k)^{\text{норм}} + \Delta(x(i)); \\ [x(j, k)^{\text{норм}} - \Delta(x(j)), x(j, k)^{\text{норм}} + \Delta(x(j))]\}.$$

Отображение «областей притяжения» производится на форме №1 непосредственно на проекции фазовой траектории (Рисунок 4).

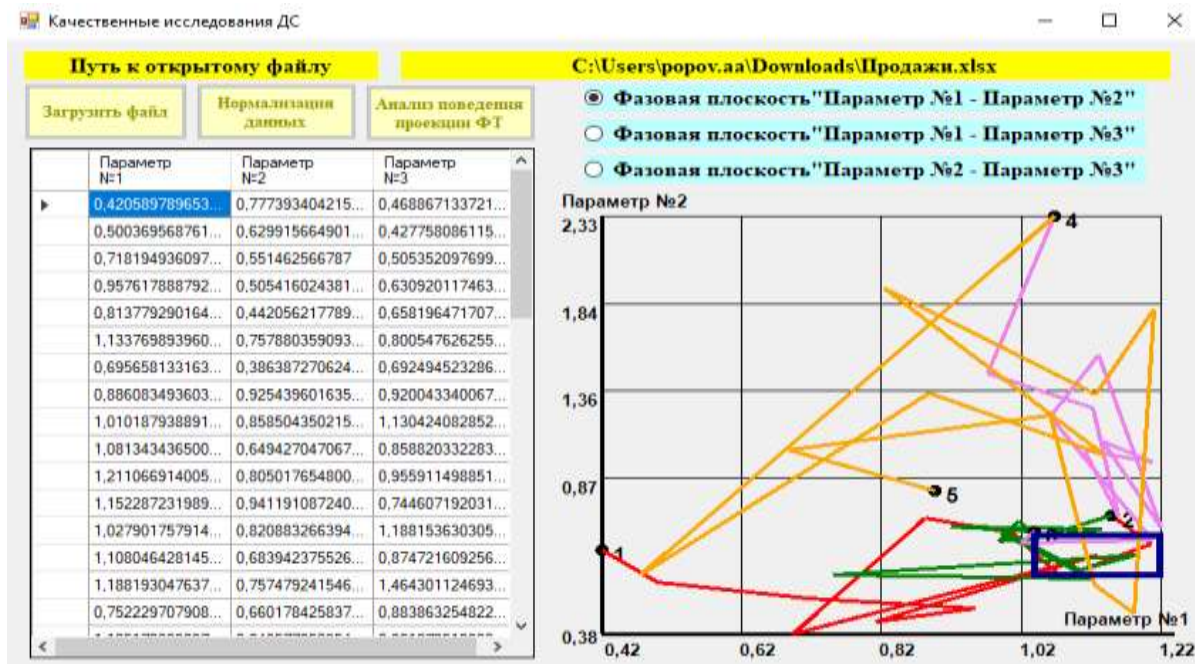


Рисунок 4 - «Область притяжения» отображена на фазовой плоскости

Наличие «области притяжения» фиксируется в том случае, если в окрестности некоторой фазовой точки $ft(k)^{норм}$ находится не менее 6 проекций фазовых точек $ft(l)^{норм}$ на фазовую плоскость (то есть в течение не менее 6 месяцев из всего периода времени, за который приведены данные по ОУ ЖКХ, проекции фазовых точек, соответствующих деятельности организации по управлению ЖКХ, находятся в окрестности Δ проекции фазовой точки $ft(k)^{норм}$).

Алгоритмом программы, приведенным в [11] предусмотрен анализ матриц $IS(i, j)$ и $TIPFT$ для определения «областей притяжения». Как видно из Рисунка 4, в фазовой плоскости «Параметр №1 – Параметр №2» обнаружена только одна «область притяжения».

Экономическая интерпретация полученных типов фазовых точек и «областей притяжения»

Анализ элементов полученной с помощью программного приложения (преобразования $PROG$) матрицы $TIPFT$ показывает, что в рассматриваемом в данной работе примере в фазовых плоскостях $x(i)$ и $x(j)$ не обнаруживаются точки типа «вход-зависание», которые соответствуют

«классическим» состояниям равновесия «устойчивый узел» и «устойчивый фокус» [1, 2, 3, 4].

В случае обнаружения в фазовой плоскости $x(i)$, $x(j)$ точки (проекция фазовой точки $fi(k)^{норм}$), являющейся точкой типа «вход-зависание», значения параметров $x(i)$ и $x(j)$ изменялись бы только в определенных пределах:

$$(x(i, k)^{норм} - \Delta) \leq x(i) \leq (x(i, k)^{норм} + \Delta)$$

$$(x(j, k)^{норм} - \Delta) \leq x(j) \leq (x(j, k)^{норм} + \Delta).$$

В рассматриваемом примере в фазовых плоскостях обнаружены точки типа «вход-зависание-выход» как с кратностью, равной единице, так и с кратностью больше единицы.

Наличие таких точек свидетельствует о наличии в фазовых плоскостях состояний равновесия типа «неустойчивый узел», «неустойчивый фокус» и «седло» [1, 2, 3, 4].

Во время нахождения проекции фазовой траектории в окрестности проекции фазовой точки $fi(k)^{норм}$ значения параметров $x(i)$ и $x(j)$ изменяются также в определенных пределах, установленных указанными выше неравенствами. При этом изменение значений параметров в указанных пределах может соответствовать позитивному, негативному или смешанному варианту развития ОУ ЖКХ по параметрам $x(i)$ и $x(j)$.

Пример позитивного развития ОУ ЖКХ в случае наличия точки типа «вход-зависание-выход»:

в качестве параметра $x(i)$ рассматривается количество средств, поступивших от жильцов многоквартирных домов за оплату жилищно-коммунальных услуг (ЖКУ) – Параметр №1 в соответствии с Рисунками 1, 2, 4;

в качестве параметра $x(j)$ рассматривается количество жильцов - должников по оплате за ЖКУ – Параметр №2 в соответствии с Рисунками 1, 2, 4;

значение $x(i, k)^{норм}$ для обнаруженной точки равно 1,18 (по сравнению с предыдущим отчетным периодом платежи увеличились);

значение $x(j, k)^{норм}$ для обнаруженной точки равно 0,86 (по сравнению с предыдущим отчетным периодом уменьшилось количество должников);

значение окрестности точки равно 0,13.

Попадание проекции фазовой траектории в окрестность такой точки соответствует постоянному росту оплаты за ЖКУ и уменьшению количества должников по оплате.

Пример негативного развития ОУ ЖКХ в случае наличия точки типа «вход-зависание»:

- в качестве параметра $x(i)$ рассматривается количество средств, поступивших от жильцов многоквартирных домов за оплату жилищно-коммунальных услуг (ЖКУ);
- в качестве параметра $x(j)$ рассматривается количество собственных средств, поступивших в ОУ ЖКХ для проведения ремонтов многоквартирных домов - Параметр №3 в соответствии с Рисунками 1, 2, 4;
- значение $x(i, k)^{\text{норм}}$ для обнаруженной точки равно 0,86 (по сравнению с предыдущим отчетным периодом платежи за ЖКУ уменьшились);
- значение $x(j, k)^{\text{норм}}$ для обнаруженной точки равно 0,81 (по сравнению с предыдущим отчетным периодом количество средств, поступивших на ремонт многоквартирных домов, уменьшилось);
- значение окрестности точки равно 0,12.

Попадание проекции фазовой траектории в окрестность такой точки соответствует постоянному уменьшению средств, поступивших в ОУ ЖКХ на ремонт многоквартирных домов, и уменьшению платежей за ЖКУ.

При наличии точек типа «вход-зависание-выход» как с кратностью, равной единице, так и с кратностью больше единицы после выхода проекции фазовой траектории из окрестности таких точек через некоторое время происходит возврат проекции фазовой траектории в окрестность таких точек. Поэтому для точек такого типа важно направление выхода фазовой траектории из окрестности. Например, наилучшим вариантом выхода из окрестности точки (в соответствии с приведенным выше примером) является вариант, когда обеспечивается позитивное развитие ОУ ЖКХ по параметрам $x(i)$ и $x(j)$. Например, наилучшим вариантом выхода из окрестности (применительно рассмотренному ранее к позитивному варианту) является направление, когда $x(i) \geq 1$ и $x(j) \leq 1$. Наихудшим вариантом выхода из окрестности (применительно к рассмотренному ранее позитивному варианту) является направление, при котором $x(i) < 1$ и $x(j) > 1$.

Также при исследовании элементов матрицы *TIPFT* были обнаружены кратные точки типа «вход-выход». Особенностью таких точек является отсутствие нахождения проекции фазовой траектории в окрестности точки (выход фазовой траектории из окрестности точки происходит в следующий момент после ее входа в окрестность точки). При этом вход в окрестность и выход из нее повторяется через некоторые промежутки времени. Таким образом, так же, как и для рассмотренных ранее точек типа «вход-зависание-выход» важным является сочетание варианта окрестности точки (положительного или отрицательного) и варианта выхода из окрестности точки (удачного или неудачного).

Существование «области притяжения» в фазовой плоскости считается обнаруженным, если количество проекций фазовых точек, попавших в окрестность проекции фазовой точки $ft(k)^{norm}$ больше некоторого минимального «порогового» количества попаданий, которое в приведенном примере равно шести. Это соответствует условию нахождения проекции фазовой траектории в пределах «области притяжения» в течение периода времени, значение которого не менее T^{min} , равного 6 месяцам. Полученные в фазовой плоскости $x(i)$, $x(j)$ «области притяжения» могут быть положительными, отрицательными и нейтральными для деятельности ОУ ЖКХ.

Если проекция фазовой траектории попала в положительную «область притяжения», то нахождение проекции фазовой траектории в такой области соответствует успешной деятельности ОУ ЖКХ по параметрам $x(i)$ и $x(j)$.

Если проекция фазовой траектории попала в нейтральную «область притяжения», то нахождение проекции фазовой траектории в данной области соответствует успешной деятельности ОУ ЖКХ только по одному параметру ($x(i)$ или $x(j)$).

Если проекция фазовой траектории попала в отрицательную «область притяжения», то нахождение проекции фазовой траектории в данной области соответствует ухудшению деятельности ОУ ЖКХ по параметрам $x(i)$ и $x(j)$.

В рассмотренном примере обнаружена только одна область притяжения. Таким образом, сформирован элемент матрицы *OBPR* для фазовой плоскости «Параметр №1 – Параметр №2».

$$obpr(1, 2) = \{op(1)\},$$

$$\text{где } op(1) = \{[1,02, 1,22], [0,46, 0,64]\}$$

Обнаруженная и отображенная на Рисунок 4 «область притяжения» является позитивной, так как ей соответствует улучшение деятельности ОУ ЖКХ по двум параметрам (увеличение поступивших платежей за ЖКУ, а также уменьшение количества неплательщиков за ЖКУ).

Направления совершенствования функциональных возможностей программного приложения

Функциональные возможности программного приложения планируется усовершенствовать следующим образом:

1. Осуществление определения условий перехода (в пределах одной фазовой плоскости) между «областями притяжения» $op(f)$, входящих в состав элемента $obpr(i, j)$. В настоящий момент производится анализ только количества «областей притяжения» и определение их границ.

2. Осуществление анализа взаимного влияния «областей притяжения» - элементов $obpr(i, j)$ матрицы **OBPR**, соответствующих фазовым плоскостям $x(i)$, $x(j)$, с целью построения обобщенных «областей притяжения» и определения условий перехода между ними. В настоящий момент такой анализ не производится.

3. Осуществление анализа полученных точек «вход-зависание», «вход-зависание-выход» как с кратностью, равной единице, так и с кратностью больше единицы, а также кратных точек «вход-выход» с целью определения их соответствия «классическим» состояниям равновесия «узел», «фокус» и «седло» в соответствии с [1, 2, 3, 4]. В настоящий момент функциональные возможности программного приложения предусматривают только обнаружение в фазовых плоскостях точек типа «вход-зависание», «вход-выход», кратных точек «вход-выход», а также точек «вход-зависание-выход» как с кратностью, равной единице, так и с кратностью больше единицы.

Заключение

В данной работе рассмотрен один из подходов к автоматизации анализа динамической системы (организации по управлению ЖКХ) с использованием качественной теории динамических систем.

Рассмотрена постановка задачи, которая предусматривает разработку программного приложения для анализа динамической системы с использованием качественной теории динамических систем (для определения типов точек в фазовых плоскостях, а также определения «областей притяжения» фазовой траектории в фазовых плоскостях).

Приведена методика, в соответствии с которой проводились качественное исследование фазовой траектории динамической системы.

Определены типы фазовых точек в фазовых плоскостях в соответствии с характером поведения проекции фазовой траектории в окрестности проекции фазовой точки («вход-выход», кратные «вход-выход», «вход-зависание», «вход-зависание-выход» с кратностью, равной единице, «вход-зависание-выход» с кратностью больше единицы) и их соответствие «классическим» состояниям равновесия в качественной теории динамических систем. На примере анализа фазовой траектории, характеризующей деятельность организации по управлению ЖКХ, (приведены значения трех параметров за 2014 - 2017 годы с шагом в один месяц) продемонстрированы возможности первой версии программного приложения, которые предусматривают построение проекций фазовой траектории на три фазовых плоскости. Таким образом произведено первого пункта задачи исследований – построение преобразования *PROG*.

С помощью программного приложения установлено, что в фазовых плоскостях отсутствуют состояния равновесия типа «устойчивый узел» и «устойчивый фокус». Одновременно с этим установлено, что в фазовых плоскостях присутствуют состояния равновесия типа «неустойчивый узел», «неустойчивый фокус» и «седло». Дана экономическая интерпретация типов точек в фазовых плоскостях. Результаты анализа типа проекций фазовых точек на фазовые плоскости отображаются на специальной форме в виде, удобном для пользователя. Таким образом произведено решение еще одного пункта поставленной задачи – построение матрицы *TIPFT*.

Дана экономическая интерпретация для «областей притяжения» различного типа (позитивных, негативных, нейтральных). С помощью программного приложения приведен пример обнаружения «области притяжения», которая носит позитивный характер. Таким образом, произведено построение матрицы *OBPR*. Это свидетельствует о том, что задача исследований решена.

Также в статье сформулированы основные направления совершенствования функциональных возможностей разработанного программного приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
2. Петров Л.Ф. Методы динамического анализа экономики. М.: Инфра-М, 2010. 240с.

3. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976. 496 с.
4. Степанов В. В., Немыцкий В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М: URSS: ЛЕНАНД, 2017. 552 с.
5. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Учебное пособие. М.: МЦНМО, 2013. 548 с.
6. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 472 с.
7. Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. М.: Наука, 1990. 336 с.
8. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. Орбитальное функционирование связанных космических объектов. М.: ИНФРА-М, 2014, 320 с.
9. Никульчев Е.В. Геометрический подход к моделированию нелинейных систем по экспериментальным данным. М.: МГУП, 2007. 162 с.
10. Бутковский А. Г. Фазовые портреты управляемых динамических систем. М.: Наука. 1985. 136 с.
11. Черников Б.В., Попов А.А. Анализ фазовой траектории в интересах контроллинга при управлении динамической системой // Контроллинг. 2017. №1(63). С. 62- 77.
12. Морозов А.В. Качественная теория дифференциальных уравнений – основная составляющая теории динамических систем // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. 2014. № 642. С. 177-184.
13. Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 304 с.
14. Киселева Н.В. Компьютерный комплекс по качественной теории дифференциальных уравнений для поддержки самостоятельной работы обучающихся // Образовательные технологии и общество. 2018. Т. 21. № 1. С. 423-434.
15. Дмитриев А.В. Регулярная и хаотическая динамика социально-экономических систем: монография. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2016. 160 с.
16. Петров Л.Ф. Методы нелинейной динамики как инструменты управления экономической эффективностью // Эффективное антикризисное управление. 2011. №2. С. 58-67.

17. Petrov L.F. Nonlinear effects in economic dynamic models // Nonlinear analysis. 2009. Volume. 71. Issue 12. PP. e2366-e2371. DOI: 10.1016/j.na.2009.05.066
18. Шакин В.Н. Базовые средства программирования на Visual Basic в среде Visual Studio. Net. М.: Форум, Инфра-М, 2017. 304 с.
19. Bryan Newsome Beginning Visual Basic 2015. Indianapolis: Publisher: John Wiley & Sons, 2016. 586 p.

A.A. Popov, A.O. Kuzmina

**A SOFTWARE APPLICATION FOR THE ANALYSIS OF PHASE
TRAJECTORY OF DYNAMIC SYSTEM WITH USING OF
QUALITATIVE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS
(ON EXAMPLE OF THE ORGANIZATION IN THE
MANAGEMENT OF HOUSING AND COMMUNAL SERVICES)**

Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

GMCS, Moscow, Russia

The purpose of the article is the enhancement of the instruments for automation of the qualitative research of the dynamic system and forecasting values of the parameters, which characterize organization activities in the economy (particularly in the field of management of housing and communal services). In this article, the problem of automation of the analysis of the phase trajectory of the dynamic system is solved (organization of management of housing and communal services), using the qualitative theory of dynamic systems. The research is relevant due to the insufficient level of automation of qualitative research of dynamic systems in the economy with the economic interpretation of research results. Methods of qualitative theory of dynamic systems, which are used, allow forecasting the state of the dynamic system without numerical simulation (for example, integrating differential system, which is a model of the dynamic system). In the article is presented technique, in accordance with research of the phase trajectory of the dynamic system using the software application, was conducted. Types of phase points in the phase plane in accordance with character of behavior of the phase trajectory plane in the neighborhood of the projection of the phase point were identified. By the example of the phase trajectory analysis, which characterizes activity of organization of management of housing and communal services, opportunities of the software application, building of projection of the phase trajectory into the three planes occurs. It was identified that in the phase planes equilibrium states as «stable node» and «stable focus» are missing, but there are equilibrium states such as «unstable node», «unstable focus» and «saddle». The example of detection of the «field of attraction» of the phase trajectory in phase plane is given. Types of «fields of attraction» were identified and economic interpretation for the «fields of attraction» was given. The main directions for the enhancement of the developed software application functionality are formulated. The materials of the article present the practical value for the experts, who are forecasting state of the organization in economy, and particularly in the housing and communal services.

Keywords: organization, management, housing and utilities, software application, automation, forecasting, qualitative research, dynamic system, phase trajectory, phase poin

REFERENCES

1. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Majer A.G. Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka. M.: Nauka, 1966. 568p.
2. Petrov L.F. Metody dinamicheskogo analiza ehkonomiki. M.: Infra-M, 2010. 240p.
3. Bautin N. N., Leontovich E. A. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti. M.: Nauka, 1976. 496p.
4. Stepanov V. V., Nemyckij V. V. Kachestvennaya teoriya differencial'nyh uravnenij. M: URSS: LENAND, 2017. 552p.
5. Shil'nikov L.P., Shil'nikov A.L., Turaev D.V., Chua L. Metody kachestvennoj teorii v nelinejnoj dinamike. Uchebnoe posobie. M.: MCNMO, 2013. 548p.
6. Nejmark YU.I. Metod tochechnyh otobrazhenij v teorii nelinejnyh kolebanij. M.: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2010. 472p.
7. Beleckij V.V., Levin E.M. Dinamika kosmicheskikh trosovyh sistem. M.: Nauka, 1990. 336p.
8. Ivanov V.A., Kupreev S.A., Ruchinskij V.S. Orbital'noe funkcionirovanie svyazannyh kosmicheskikh ob"ektov. M.: INFRA-M, 2014, 320p.
9. Nikul'chev E.V. Geometricheskij podhod k modelirovaniyu nelinejnyh sistem po ehksperimental'nym dannym. M.: MGUP, 2007. 162p.
10. Butkovskij A. G. Fazovye portrety upravlyaemyh dinamicheskikh sistem. M.: Nauka. 1985. 136p.
11. Chernikov B.V., Popov A.A. Analiz fazovoj traektorii v interesah kontrollinga pri upravlenii dinamicheskoy sistemoy // Kontrolling. 2017. №1(63). Pp. 62-77.
12. Morozov A.V. Kachestvennaya teoriya differencial'nyh uravnenij – osnovnaya sostavlyayushchaya teorii dinamicheskikh sistem // Trudy Voenno-kosmicheskoy akademii im. A.F. Mozhajskogo. 2014. № 642. PP. 177-184.
13. Morozov A.D., Dragunov T.N. Vizualizaciya i analiz invariantnyh mnozhestv dinamicheskikh sistem. – Moskva-Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovanij, 2003. 304p.
14. Kiseleva N.V. Komp'yuternyj kompleks po kachestvennoj teorii differencial'nyh uravnenij dlya podderzhki samostoyatel'noj raboty obuchayushchihsya // Obrazovatel'nye tekhnologii i obshchestvo. 2018. T. 21. № 1. PP. 423-434.

15. Dmitriev A.V. Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika social'no-ehkonomicheskikh sistem: monografiya. Izhevsk: Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika, Institut komp'yuternyh issledovaniy, 2016. 160p.
16. Petrov L.F. Metody nelinejnoj dinamiki kak instrumenty upravleniya ehkonomicheskij ehffektivnost'yu // EHffektivnoe antikrizisnoe upravlenie. 2011. №2. PP. 58-67.
17. Petrov L.F. Nonlinear effects in economic dynamic models // Nonlinear analysis. 2009. Volume. 71. Issue 12. PP. e2366-e2371. DOI: 10.1016/j.na.2009.05.066
18. Shakin V.N. Bazovye sredstva programirovaniya na Visual Basic v srede Visual Studio. Net. M.: Forum, Infra-M, 2017. 304p.
19. Bryan Newsome Beginning Visual Basic 2015. Indianapolis: Publisher: John Wiley & Sons, 2016. 586p.

