УДК 519.83:519.81 doi: 10.26102/2310-6018/2018.23.4.027

Т.В. Меньших, В.И. Новосельцев

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СООБЩЕСТВ ИГРОКОВ И ФУНКЦИЙ ВЫИГРЫША В ИГРАХ С НЕПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ИНТЕРЕСАМИ

Воронежский институт ФСИН России,
Воронеж, Россия

При решении многих прикладных задач используются методы теории игр. В частности, при принятии управленческих решений требуется согласование различных аспектов решений, за которые отвечают специалисты разного профиля. Это приводит к необходимости использования игр с непротивоположными интересами и нахождения для них равновесий по Дж. Нэшу. Решение указанной задачи для частного случая игр с иерархическим вектором интересов определяется теоремой Гермейера и Вателя. Однако, при доказательстве теоремы, не был учтен целый ряд аспектов. В частности, неопределенны условия построения иерархического дерева групп игроков и в неполной мере описаны свойства функции выигрыша для этих групп. В данной работе предлагается ввести понятия целей игроков и на этой основе построить структурно-параметрическую модель сообщества игроков, представляющую собой нечеткий граф с множеством вершин, соответствующих игрокам, и дуг, отражающих совпадение целей игроков. Веса дуг определяются функциями принадлежности нечетких множеств, описывающих значимости целей для игроков. Цвета дуг соответствуют целям игроков. После этого вводится понятие цветной клики и разрабатывается алгоритм построения иерархической структуры групп на основе последовательного нахождения цветных клик. Далее, на основе анализа доказательства теоремы Гермейера и Вателя, показывается, что функция выигрыша группы игроков должна быть непрерывной. Следствием этого является исключение случаев, использования дискретных (в частности, целочисленных) ресурсов.

Ключевые слова: игры с непротивоположными интересами, равновесие по Нэшу, цели игроков, структурно-параметрическая модель сообщества, иерархическая структура групп игроков, функция полезности группы игроков.

ВВЕДЕНИЕ

Подготовка управленческих решений осуществляется группами специалистов, каждый из которых учитывает различные аспекты (стороны), связанные с данным решением [1]. При этом каждый из специалистов стремится в максимальной степени учитывать определенные аспекты, связанные с его областью ответственности. Общее же решение должно быть таким, чтобы в максимальной степени учесть интересы, за которые отвечает каждый из специалистов [2]. Учитывая, что все специалисты стремятся к принятию сбалансированного решения, то указанная ситуация может быть математически описана как нахождение равновесия в игре с непротивоположными интересами [3-5].

Одной из основных задач, решаемых с использованием таких игр, является нахождение равновесия по Дж. Нэшу. В частности, для решения этой задачи в играх с иерархическим вектором интересов используется теорема Гермейера и Вателя [6,7]. Однако для нахождения равновесия в соответствии с этой теоремой требуется выполнение для сообщества игроков целого ряда условий.

В частности, нахождение равновесия предполагает использование в явном виде иерархически построенного дерева групп игроков, вершинами которого является все сообщество игроков, а листьями – отдельные игроки. Однако вопрос объединение игроков в группы, представляющие собой промежуточные вершины дерева, в научной литературе практически не рассматривается.

Кроме того, решение задачи нахождения равновесия по Дж. Нэшу сводится к распределению имеющегося ресурса игроков по группам, в которые они входят с учетом важности этих групп для каждого игрока и свойств функций выигрыша для группы в целом. Однако изучение требований к свойствам функции выигрыша групп до настоящего времени не производилось.

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения иерархически упорядоченного множества групп игроков на основании изучения их целей и свойств функций выигрыша этих групп, что позволяет повысить обоснованность использования теоремы Гермейера и Вателя для нахождения равновесия по Дж. Нэшу.

ОПИСАНИЕ ИГР С ИЕРАРХИЧЕСКИМ ВЕКТОРОМ ИНТЕРЕСОВ

Предположим, что сообщество образуют n игроков, которые составляют группу нулевого уровня S^0, представляющую собой вершину иерархического дерева групп игроков. Группа нулевого уровня разбивается на группы первого уровня, каждая из которых, в свою очередь, разбивается на группы второго уровня и т. д. Обозначим S_j^k – множество номеров игроков, входящих в группу j уровня k. Последний m-й уровень, то есть листья иерархического дерева, образуют группы, каждая из которых состоит только из одного игрока.

Множество номеров всех уровней обозначим $K = \{0,1,\ldots,m\}$. Через n_k будем обозначать число номеров групп на уровне k. Вообще говоря, число групп на каждом уровне различно, и поэтому индекс j принимает значение из множества $\{0,1,\ldots,n_k\}$. Причем число групп на каждом уровне различно и поэтому индекс j принимает значения из множества, относящегося к данному конкретному уровню k.

В играх с иерархическим вектором интересов принято определять выигрыши w_i для каждого i-го игрока в зависимости в зависимости от важности для него λ_i^k каждой группы S_j^k, в которую он входит и от величины выигрыша w_j^k данной группы.

В свою очередь w_j^k зависит от величины ресурсов x_i выделяемых всеми игроками, входящими в группу S_j^k. Предполагается, что w_j^k монотонно возрастает при увеличении x_i для каждого игрока i.

Будем считать, что каждый игрок i, независимо от выбора других игроков, распоряжается распределением ресурса по группам, в которые он входит, задаваемым вектором $x_i \in X_i$. При этом выборы всех игроков в общем случае принадлежат некоторому множеству X, т. е. $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Будем рассматривать класс игр с независимыми ресурсами Γ^R. Таким образом оказывается определенной система групповых интересов $w_j^k = f_j^k(x_s \mid s \in S_j^k), k \in K, j \in n_k$.

В результате у каждого игрока i имеется $m+1$ - мерный вектор интересов с компонентами w_j^k.

Будем считать, что

$$\sum_{k=0}^{m} \bar{x}_i^k = a_i, \bar{x}_i^k \geq 0, k \in K.$$

В этой формуле a_i - заданный векторный ресурс игрока i.

Предполагается, что функция f_j^k при всех $k \in K$ и соответствующих j обладает следующими свойствами:

$f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k)$ монотонно возрастают с ростом любой компоненты вектора $\bar{x}_s^k$;

$f_j^k(\bar{x}_s^k = 0 \mid s \in S_j^k) = f_j^k(0) = 0$.

Явный вид функции w_j^k определяется отдельно для каждой прикладной задачи [8].

Следовательно, чем большим ресурсом обладает группа, тем больше выигрыш для входящих в нее игроков.

НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ЦЕЛЕЙ ИГРОКОВ

Для построения иерархического дерева групп игроков предположим, что известны цели каждого игрока. При этом множество целей различных игроков могут пересекаться, но даже при совпадении целей их значимости для игроков могу быть различны.

Обозначим через $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_q\}$ - множество всех целей игроков, входящих в коалицию.

Значимость целей является качественным понятием, поэтому для их задания целесообразно использовать методы, разработанные в теории нечетких множеств [9].

Обратимся к описанию способов нахождения оценок значимости целей для игроков, входящих в коалицию. Для каждого игрока i может быть определено нечеткое множества $M_i : Z \to [0,1]$, носителем которого является множество целей Z. Функция принадлежности $\mu_{M_i}(z_j)$ является оценкой заинтересованности игрока i_k в реализации цели z_j. Отсутствие у него цели z_j означает, что $\mu_{M_i}(z_j) = 0$.

Для нахождения количественных оценок $\mu_{M_i}(z_j)$ могут быть использованы методы анализа иерархий [10]. С этой целью находится матрица попарного сравнения $A = (a_{ij})$ значимости целей для каждого игрока по следующему правилу:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если цели } z_i \text{ и } z_j \text{ одинакого значимы;} \\ 3, \text{ если цель } z_i \text{ несколько более значима, чем цель } z_j; \\ 5, \text{ если цель } z_i \text{ существенно белее значима, чем цель } z_j; \\ 7, \text{ если цель } z_i \text{ значительно белее значима, чем цель } z_j; \\ 9, \text{ если цель } z_i \text{ абсолютно белее значима, чем цель } z_j; \end{cases}$$

$$a_{ij} = a_{ji}^{-1}.$$

Для матрицы $A = (a_{ij})$ находится положительный собственный вектор x_i, соответствующий ее максимальному собственному значению, координаты которого рассматриваются в качестве нечетких оценок $\mu_{M_i}(z_j)$ значимости целей для игрока i.

ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВАЯ МОДЕЛЬ КОАЛИЦИИ ИГРОКОВ

Обратимся к разработке математической модели коалиции игроков, для каждого из которых определен набор целей. Для этого будем использовать нечеткие графы [11].

В качестве модели предлагается использовать ориентированный l - раскрашенный нечеткий граф G. Опишем способ его построения.

Будем считать, что вершины V графа G соответствуют игрокам S^0. Для каждого игрока $i \in S^0$ будем считать заданным нечеткое множество $M_i: Z \to [0,1]$, носителем которого является множество целей Z. Функция принадлежности $\mu_{M_i}(z_j)$ является оценкой заинтересованности игрока i в реализации цели z_j; отсутствие у него цели z_j означает, что $\mu_{M_i}(z_j)=0$.

Бинарное отношение совпадения целей игроков позволяет задать множество дуг E графа G следующим образом:

вершины соединяются дугами, если соответствующие игроки имеют общую цель;

цвет дуги определяется функцией раскраски $\nu: E \to Z$, в соответствии с которой дуги раскрашиваются одинаково, если они определены одной целью;

вес дуги соответствует оценке значимости цели для игрока соответствующего началу дуги.

Таким образом, граф G задается четверкой $G=(V,E,\nu,M)$, где $M=(M_1,M_2,...,M_n)$ - вектор, координатами которого являются нечеткие множества оценки значимости целей для игроков.

Полученный граф можно считать структурно-параметрической моделью коалиций игроков, что позволяет использовать его в дальнейшем для исследования данной коалиции, например, в интересах нахождения ситуаций равновесия в играх.

ПОСТРОЕНИЕ ИЕРАРХИЧЕСКОГО ДЕРЕВА ГРУПП ИГРОКОВ

Введем понятие цветной клики ориентированного графа. Под кликой цвета η будем понимать множество вершин графа такое, что

из каждой вершины исходит дуга цвета η в каждую другую вершину;

данное множество не является собственным подмножеством другого множества вершин, обладающим предыдущим свойством.

Размером клики будем называть мощность множества вершин его составляющего, а весом – сумму весов дуг, определяющих клику.

Обратимся к описанию алгоритма построения иерархического дерева групп игроков, использую полученное выше теоретико-графовое представление их коалиции.

Группы игроков, соответствующие кликам максимального размера, имеющим наибольший вес, составляют первый уровень иерархии. Далее подграфы, построенные по вершинам, составляющим клику, рассматриваются в отдельности.

Процедура дальнейшего формирования иерархической структуры групп игроков имеет следующий вид:

в подграфе, построенном по клике, удаляются определившие его дуги;

вновь находятся все клики максимального размера, имеющие максимальный вес – они соответствуют группам второго уровня иерархии, являющимися непосредственными потомками вершины, соответствующей рассматриваемой группе;

процесс продолжается до тех пор, пока все клики не станут одновершинными, что соответствует последнему уровню.

Приведем численный пример.

Будем считать, что коалиция состоит из пяти игроков, имеющих 8 различных целей; использование метода анализа иерархий, описанного выше, позволило определить функции принадлежности для всех целей игроков (таблица 1).

Таблица 1 - Оценки важности целей игроков

Игроки	Цели							
	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8
1	0,9	0,4	0	0	0	0	0	0,7
2	0,3	0,7	0,3	0,6	0	0	0	0
3	0	0	0,8	0	0,4	0	0	0
4	0,9	0	0	0,7	0	0,5	0	0
5	0,3	0,6	0	0	0	0	0,9	0

Применение описанного выше метода в этом случае приводит к построению иерархической структуры коалиции, приведенной на рисунке 1.

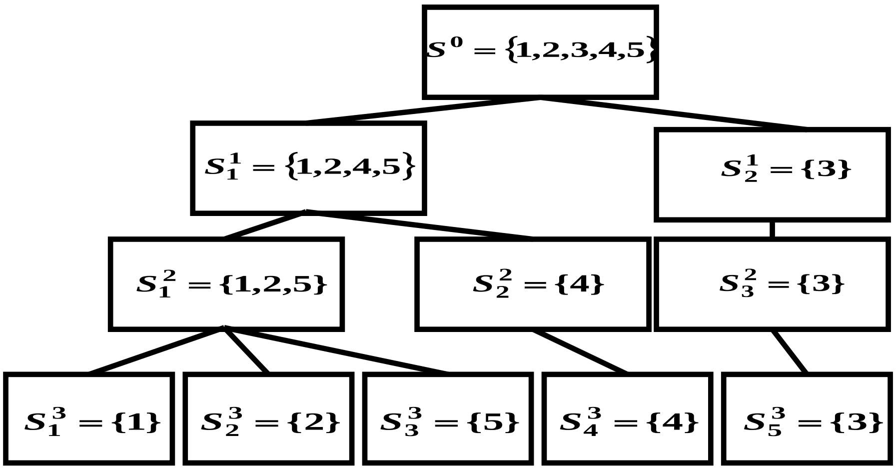

Рисунок 1 - Иерархическая структура коалиции игроков

ПОНЯТИЕ РАВНОВЕСИЯ ПО ДЖ. НЭШУ И ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ ГЕРМЕЙЕРА И ВАТЕЛЯ.

Предположим, что игроки принимают коллективное решение, исходя из принципа ситуаций равновесия. Пусть $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ - набор распределений ресурсов всех игроков, где $\bar{x}_i = \{\bar{x}_i^0, \bar{x}_i^1, ..., \bar{x}_i^m\},\ i \in S^0$. Будем считать, что в этом случае выполнены следующие условия:

при всех $i \in S^0$

$$w_i(\bar{x}) = \max_{\substack{S_j^k \supset i \\ k \in K}} \lambda_i^k f_j^k(x_s^k \mid s \in S_j^k =$$

$$= \max_{x_i \in X_i}(\min_{\substack{S_j^k \supset i \\ k \in K}} \lambda_i^k f_j^k(x_i^k, \bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k, s \neq i)).$$

Здесь множества X_i задаются соотношением: $\sum_{k=0}^{m} x_i^k = a_i, x_i^k \geq 0.$

В ситуации $\bar{x}$ эти соотношения принимают вид $\sum_{k=0}^{m} \bar{x}_i^k = a_i, \bar{x}_i^k \geq 0.$

Игру, в которой все члены данного сообщества распределяют свои ресурсы, исходя из принципа ситуаций равновесия, будем называть $\overline{\Gamma}^R$.

Теорема Гермейера и Вателя. Чтобы в игре $\overline{\Gamma}^R$ с независимыми скалярными ресурсами a_i ситуация $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ была ситуацией равновесия, необходимо и достаточно, чтобы для любого $i \in S^0$ существовал такой набор разбиений множества $K \setminus \{m\}$ на два подмножества K'_i и K''_i ($K'_i \cup K''_i = K \setminus \{m\}, K'_i \cap K''_i = \varnothing$), для которого вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, удовлетворяющий $\sum_{k=0}^{m} \bar{x}_i^k = a_i, \bar{x}_i^k \geq 0, k \in K, i \in S^0$, является решением системы

$$\begin{cases} \lambda_i^m f_i^m(\bar{x}_i^m) = \lambda_i^k f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k), \bar{x}_s^k \geq 0, k \in K'_i; \\ \lambda_i^m f_i^m(\bar{x}_i^m) < \lambda_i^k f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k), \bar{x}_s^k = 0, k \in K''_i. \end{cases}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ВЫИГРЫША ГРУППЫ ИГРОКОВ

При доказательстве теоремы Гермейера и Вателя [6] не в полной мере рассматривались вопросы допустимых свойств функций выигрыша. Покажем, что при доказательстве необходимости существенным является непрерывность функции выигрыша группы игроков.

Доказательство разбиения множества уровней $K \setminus \{m\}$ (без последнего уровня) на два подмножества K'_i и K''_i:

$$\lambda_i^m f_i^m(\bar{x}_i^m) = \lambda_i^k f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k), \bar{x}_s^k \geq 0, k \in K'_i;$$

$$\lambda_i^m f_i^m(\bar{x}_i^m) < \lambda_i^k f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k), \bar{x}_s^k = 0, k \in K''_i.$$

и исключения возможности существования K'''_i:

$$\lambda_i^m f_i^m(\bar{x}_i^m) > \lambda_i^k f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k), \bar{x}_s^k \geq 0, k \in K'''_i.$$

Докажем теперь, что из свойства о монотонном возрастании функции выигрыша возможно перераспределение ресурса, для увеличения выигрыша игроков.

Действительно, в случае существования K'''_i можно перераспределить ресурс так, чтобы некоторая часть ресурса с уровней $k \in K'_i$ перешла на ресурсы уровней $k \in K'''_i$, при этом не нарушив соотношение между выигрышами на этих уровнях.

Однако указанная операция может быть осуществлена только в том случае, когда $f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k)$ непрерывна, так как при перераспределении могут потребоваться малые изменения ресурса, приводящие к малым изменениям функции выигрыша $f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k)$, что обеспечивает не нарушения соотношений между выигрышами при данных изменениях.

Таким образом, для того чтобы это логическое следствие было верное, необходимо добавить условие непрерывности функции $f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k)$.

То есть для $i \in S^0$ выполняются следующие условия:

для $k_0 \in K'_i$

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(\bar{x}_i^{k_0} :| \bar{x}_i^{k_0} - x_i^{k_0} | < \delta)[| \lambda_i^{k_0} f_j^{k_0}(\bar{x}_i^{k_0}) - \lambda_i^{k_0} f_j^{k_0}(x_i^{k_0}) | < \varepsilon];$$

для $k \in K'''_i$

$$\forall(\varepsilon_1 > 0)\exists(\delta > 0)\forall(\bar{x}_i^{k} :| \bar{x}_i^{k} - x_i^{k} | < \delta)[| \lambda_i^{k} f_j^{k}(\bar{x}_i^{k}) - \lambda_i^{k} f_j^{k}(x_i^{k}) | < \varepsilon_1].$$

При этом $\varepsilon + \varepsilon_1 < \lambda_i^m f_j^m(\bar{x}_i^m) - \lambda_i^k f_j^k(x_s^k \mid s \in S_j^k)$ для $k \in K \setminus \{m\}$.

Следствием из свойства непрерывности функции выигрыша группы $f_j^k(\bar{x}_s^k \mid s \in S_j^k)$ является отсутствие дискретного распределения ресурса, так как это приводило бы к скачкообразным изменениям функции выигрыша. Поэтому, в случаи дискретного (в частности, целочисленного ресурса), теорема Гермейера и Вателя позволяет получать приближенное решение задачи нахождения равновесия по Нэшу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, полученные результаты позволяют получить иерархическое представление групп игроков для возможности применения теоремы Гермейера и Вателя и уточнить свойства функции выигрыша для этих групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бублик Н.Г. Логико-лингвистическое моделирование в военных системных исследованиях / Н.Г. Бублик, В.Е. Евстигнеев, В.И. Новосельцев, А.И. Рог, Е.К. Суворов, Б.В. Тарасов. — М. : Военное издательство. — 1988. — 232 с.
2. Меньших В.В. Структурная адаптация систем управления / В.В. Меньших, В.В. Сысоев. — М. : Радиотехника. — 2002. — 150 с.
3. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами / Ю.Б. Гермейер. — М.: Наука, 1976. — 326 с.
4. Новосельцев В.И. Системный анализ: современные концепции / В.И. Новосельцев. — Воронеж: Издательство «Кварта», 2003. — 360 с.
5. Новосельцев В.И. Системная конфликтология. / В.И. Новосельцев — Воронеж: Издательство «Кварта», 2001. — 169 с.
6. Гермейер Ю.Б. Игры с иерархическим вектором интересов. / Ю.Б. Гермейер, И.А. Ватель. – Техническая комбинаторика. — 1974. — №3. — С. 54-69.
7. Меньших Т.В. Оценка параметров игр с иерархическим вектором интересов / Т.В. Меньших // Вестник Южно-Уральского

государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2018. — С. 118-122.
8. Меньших Т.В. Использование методов теории игр в прикладных задачах / Т.В. Меньших // Актуальные вопросы эксплуатации систем охраны и защищенных телекоммуникационных систем. Материалы Всероссийская научно-практическая конференция. — Воронеж: Воронежский институт МВД России. -2015. —С. 140-142.
9. Нечеткие множества в моделях управления и искусственном интеллекте / Под. ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука, 1986 — 312 с.
10. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. / Т. Саати. — М.: Радио и связь, 1993. — 278 с.
11. Емеличев В.А. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич - М. : Книжный дом "Либроком", 2009. – 392 с.

T.V. Menshikh, V.I. Novoseltsev

THE STUDY OF THE PROPERTIES OF COMMUNITIES OF PLAYERS AND FUNCTIONS OF WIN IN GAMES WITH NON-OPPOSING INTERESTS

Voronezh institute of the Federal Penitentiary Service of Russia, Voronezh, Russia

When solving many applied problems, methods of game theory are used. In particular, when making management decisions, it is necessary to coordinate various aspects of decisions for which specialists in different fields are responsible. This leads to the need to use games with non-opposing interests and finding for them Nash equilibrium. The solution of this problem for the particular case of games with a hierarchical vector of interests is determined by the theorem of Germeyer and Vatel. However, in proving the theorem, a number of aspects were not taken into account. In particular, the conditions for constructing a hierarchical tree of groups of players are undefined and the properties of the functions of win for these groups are not fully described. In this paper, it is proposed to introduce the concepts of player goals and, on this basis, construct a structural-parametric model of a community of players, representing a fuzzy graph with a set of vertices corresponding to players, and arcs reflecting the coincidence of players' goals. The weights of the arcs are determined by the membership functions of fuzzy sets describing the significance of goals for players. The colors of the arcs correspond to the goals of the players. After that, the concept of a color clique is introduced and an algorithm is developed for constructing the hierarchical structure of groups based on the successive finding of color cliques. Further, based on the analysis of the proof of the theorem of Germeyer and Vatel, it is shown that the function of win of a group of players must be continuous. The consequence of this is the exclusion of cases of using discrete (in particular, integer) resources.

Keywords: games with non-opposite interests, Nash equilibrium, structural-parametric model of the community, hierarchical structure of groups of players, the utility function of a group of players.

REFERENCES

1. Bublik N.G. Logiko-lingvisticheskoye modelirovaniye v voyennykh sis-temnykh issledovaniyakh / N.G. Bublik. V.E. Evstigneyev. V.I. Novoseltsev. A.I. Rog. E.K. Suvorov. B.V. Tarasov. — M. : Voyennoye izdatelstvo. — 1988. — 232 p.
2. Menshikh V.V. Strukturnaya adaptatsiya sistem upravleniya / V.V. Menshikh. V.V. Sysoyev. — M. : Radiotekhnika. — 2002. — 150 s.
3. Germeyer Yu.B. Igry s neprotivopolozhnymi interesami / Yu.B. Ger-meyer. — M.: Nauka. 1976. — 326 p.
4. Novoseltsev V.I. Sistemnyy analiz: sovremennyye kontseptsii / V.I. Novoseltsev. — Voronezh: Izdatelstvo «Kvarta». 2003. — 360 p.
5. Novoseltsev V.I. Sistemnaya konfliktologiya. / V.I. Novoseltsev — Voronezh: Izdatelstvo «Kvarta». 2001. — 169 p.
6. Germeyer Yu.B. Igry s iyerarkhicheskim vektorom interesov. / Yu.B. Germeyer. I.A. Vatel. – Tekhnicheskaya kombinatorika. — 1974. — №3. — pp. 54-69.
7. Menshikh T.V. Otsenka parametrov igr s iyerarkhicheskim vektorom interesov / T.V. Menshikh // Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoye modelirovaniye i programmirovaniye». — 2018. — pp. 118-122.
8. Menshikh T.V. Ispolzovaniye metodov teorii igr v prikladnykh zadachakh / T.V. Menshikh // Aktualnyye voprosy ekspluatatsii sistem okhrany i zashchishchennykh telekommunikatsionnykh sistem. Materialy Vserossiyskaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya. — Voronezh: Voronezhskiy institut MVD Rossii. — 2015. — pp. 140-142.
9. Nechetkiye mnozhestva v modelyakh upravleniya i iskusstvennom intellekte / Pod. red. D.A. Pospelova. — M.: Nauka. 1986 — 312 p.
10. Saati T. Prinyatiye resheniy. Metod analiza iyerarkhiy. / T. Saati. — M.: Radio i svyaz. 1993. — 278 p.
11. Emelichev V.A. Lektsii po teorii grafov / V.A. Emelichev. O.I. Mel-nikov. V.I. Sarvanov. R.I. Tyshkevich - M. : Knizhnyy dom "Libro-kom". 2009. – 392 p.